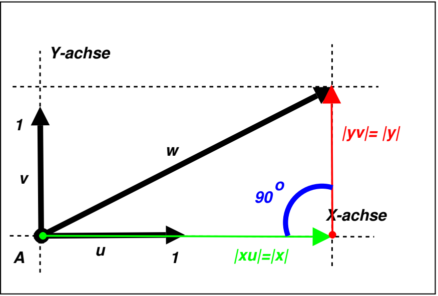
Die Länge

Def. *Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Für jeden Vektor $v \in V$ heißt die Zahl $\sqrt{\langle v, v\rangle}$ die* Länge *von v und wird $|v|$ bezeichnet.*

Bemerkung. Die Länge des Vektors ist wohldefiniert, da nach Definition des Skalarprodukts $\langle v, v\rangle \geq 0$ gilt. Ferner gilt: $|v| > 0$ für $v \neq \vec{0}$ und für $v = \vec{0}$ ist $|v| = 0$.

Bemerkung *Auf der Ebene bzw. im Raum ist die Länge eines Vektors im Sinne der Definition oben die „übliche" Länge.*



Tatsächlich, wir betrachten eine kartesische Basis (u, v) in der Ebene (die Vektoren u, v sind zueinander orthogonal und haben die Länge 1). Dann ist die Länge von $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ gegeben durch $|w|^2 \overset{\text{Def.}}{=} \langle w, w\rangle = \langle x\vec{u} + y\vec{v}, x\vec{u} + y\vec{v}\rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=}$

$$\underbrace{\langle x\vec{u}, x\vec{u}\rangle}_{=x^2} + \underbrace{\langle x\vec{u}, y\vec{v}\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y\vec{v}, x\vec{u}\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y\vec{v}, y\vec{v}\rangle}_{=y^2}$$

$= x^2 + y^2 \overset{\text{Pythagoras}}{=}$ Die „übliche" Länge (weil alle Winkel im Parallelogramm $\pi/2$ sind).

Rechnen Sie selbst: berechnen Sie die Länge von v in $(\mathbb{R}^2, \langle\ ,\ \rangle_{\text{standard}})$

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

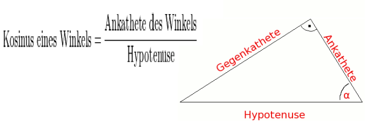
Antwort. $|v| = \sqrt{\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle} = \sqrt{3 \cdot 3 + 4 \cdot 4} = \sqrt{9 + 16} = 5.$

Der Winkel

Def. *Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Für je zwei Vektoren $u \neq 0, v \neq 0$ heißt die Zahl* $\arccos\left(\frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|}\right) \in [0,\pi]$ *der Winkel zwischen u und v.*

Bemerkung *Um zu zeigen, dass der Winkel zwischen u und v wohldefiniert ist, werden wir gleich die Cauchy-Schwarz-Ungleichung zeigen: $-1 \leq \frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|} \leq 1$, d.h. $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$.*

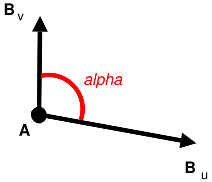
Um Winkel zu definieren, brauchen wir deswegen die Funktion cos. In der Schule haben wir aber cos mit Hilfe eines Winkels definiert; also befinden wir uns in einer logischen Schleife.



In der Analysis-Vorlesung wird die Funktion cos (und deswegen auch arccos) rein analytisch, also ohne Bezug zur Schulgeometrie eingeführt; so werden wir „die Schleife verlassen“

Bemerkung *In der Ebene/Im Raum ist der Winkel im Sinne der Definition oben der übliche Winkel*

Wiederholung – Schulgeometrie: In der Ebene/Im Raum ist $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(alpha)$. Also ist $\cos(alpha) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{u}||\vec{v}|}$.



Rechnen Sie bitte selbst:

Im $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt berechne man den Winkel zwischen den Vektoren
$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung. $\cos(\alpha) = \frac{\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}{\sqrt{\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \cdot \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}} = \frac{2}{\sqrt{4 \cdot 2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dann ist $\alpha = \arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 45^\circ$.

Rechnen Sie bitte selbst:

Im $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt berechne man den Winkel zwischen den Vektoren
$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Lösung. $\cos(\alpha) = \frac{\langle \binom{3}{4}, \binom{-4}{3} \rangle}{|u| \cdot |v|} = \frac{-3 \cdot 4 + 4 \cdot 3}{|u| \cdot |v|} = \frac{0}{|u| \cdot |v|} = 0$.
Dann ist $\alpha = \arccos(0) = 90^\circ$.

Bemerkung. Wie ich bereits angekündigt habe: die Vektoren sind genau dann orthogonal (im Sinne der Definition in Vorl. 15, in welcher wir das „Lot“ definiert haben), wenn der Winkel zwischen Vektoren gleich 90° ist.

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Lemma 32 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$. Ferner gilt: $|\langle u, v\rangle| = |u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren linear abhängig sind.

Beweis. Ist $v = \vec{0}$, so sind beide Seiten gleich Null. Sei $v \neq \vec{0}$. Sind die Vektoren linear abhängig, so ist $u = \lambda v$, und $|\langle u, v\rangle| = |\langle \lambda v, v\rangle| = |\lambda| \cdot |v|^2 = |\lambda v| \cdot |v|$.

Angenommen, die Vektoren sind linear unabhängig. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle u + tv, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle u, u + tv\rangle + t\langle v, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=}$$

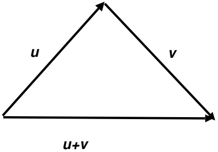
$$\langle u, u\rangle + \underbrace{t\langle u, v\rangle + t\langle v, u\rangle}_{2t\langle u, v\rangle \text{ wegen Symmetrie}} + t^2\langle v, v\rangle = \underbrace{|u|^2}_{c} + \underbrace{2\langle u, v\rangle}_{b} t + t^2 \underbrace{|v|^2}_{a}.$$

Dies ist ein quadratisches Polynom in t. Es hat keine Nullstelle, da $\langle u + tv, u + tv\rangle$ gleich Null sein kann nur falls $u = -tv$, also falls u, v linear abhängig sind, was wir oben explizit ausgeschlossen haben. Da das Polynom keine Nullstelle hat, ist die Diskriminante negativ, also

$$\mathcal{D} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = \langle u, v\rangle^2 - |v|^2|u|^2 < 0. \quad \text{Dann ist } |\langle u, v\rangle| < |v||u|. \quad \square$$

Einige schulgeometrische Aussagen

Folgerung: Dreiecksungleichung: *Sei $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Dann gilt für alle $u, v \in V$: $|u+v| \le |u| + |v|$.*

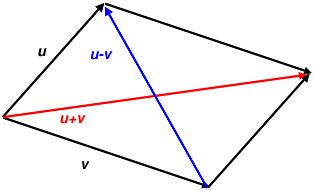


Beweis.

$$(|u+v|)^2 = \langle u+v, u+v\rangle \overset{\text{Wie im Beweis Lem. 32}}{=} |u|^2 + 2\langle u, v\rangle + |v|^2$$

$$(|u|+|v|)^2 = |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2.$$

Da nach Lemma 32 $\langle u, v\rangle \le |u||v|$, ist $(|u+v|)^2 \le (|u|+|v|)^2$ und deswegen $|u+v| \le |u| + |v|$. $\square$



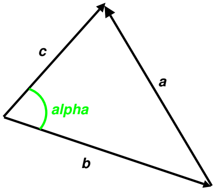
Parallelogrammgleichung: *Für alle $u, v \in V$ gilt:*
$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$.

Beweis. $|u+v|^2 + |u-v|^2 = \langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle =$
$\langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle + \langle u,u\rangle - \underbrace{2\langle u,v\rangle}_{=2\langle v,u\rangle} + \langle v,v\rangle =$

$2\big(\langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle\big) = 2(|u|^2 + |v|^2)$. □

Kosinussatz

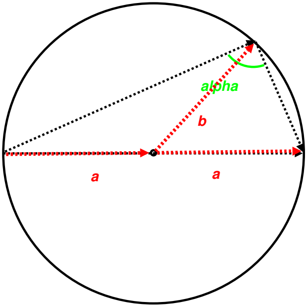
Kosinussatz *Im Dreieck auf dem Bild*



ist $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2|\vec{b}||\vec{c}|\cos(alpha)$.
Beweis: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$, also $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$.
Dann ist $|\vec{a}|^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{c} - \vec{b}, \vec{c} - \vec{b} \rangle = \langle \vec{c}, \vec{c} \rangle - 2\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2|\vec{b}||\vec{c}|\cos(alpha)$. □

Mit Hilfe der Bilinearität des Skalarprodukts kann man mehrere schulgeometrische Aufgaben lösen (Bsp: Thales)

Z.Z. *Im Dreieck auf dem Bild* ist der Winkel *alpha* gleich 90°.



Satz von Thales

624 v. C. - 546 v. C.

Beweis. Man betrachte die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ wie auf dem Bild. Wir zeigen, dass $\langle \underbrace{\vec{a}+\vec{b}}_{\vec{u}}, \underbrace{\vec{a}-\vec{b}}_{\vec{v}} \rangle = 0$. Wegen Bilinearität und Symmetrie ist

$$\langle \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \underbrace{\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}_{=0,\ \text{Symmetrie}} - \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle =$$

$|a|^2 - |b|^2 = 0$. Dann ist $\arccos\left(\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|u|\,|v|}\right) = \arccos(0) = 90^\circ$. $\square$

Def.

Ein Endomorphismus $f : V \to V$ eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ heißt orthogonal, falls für alle $u, v \in V$ gilt: $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.

Bemerkung *Orthogonale Abbildungen erhalten die Längen und die Winkel, d.h. für alle $u, v \in V$ gilt: $|f(u)| = |u|$ und die Winkel zwischen u und v sowie zwischen $f(u)$ und $f(v)$ sind gleich.*

Tatsächlich, $|f(u)| \stackrel{\text{Def.}}{=} \sqrt{\langle f(u), f(u)\rangle} \stackrel{\text{Def.}}{=} \sqrt{\langle u, u\rangle} \stackrel{\text{Def.}}{=} |u|$;
Der Winkel zwischen $f(u)$ und $f(v)$ ist nach Definition $\arccos\left(\frac{\langle f(u), f(v)\rangle}{|f(u)|\,|f(v)|}\right) \stackrel{\text{Def.}}{=} \arccos\left(\frac{\langle u, v\rangle}{|u|\,|v|}\right)$ und somit gleich dem Winkel zwischen u und v.

Satz 36b *Sei f ein Endomorphismus eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, so dass für jedes $v \in V$ gilt: $|f(v)| = |v|$. Dann gilt: f ist eine orthogonale Abbildung*

In Worten: *Längenerhaltende lineare Abbildungen sind orthogonal*

Beweis. Z.z.: für beliebige Vektoren u, v gilt: $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.
Wir rechnen $|f(u+v)|^2$ zweimal aus.

1. Weg: wir haben

$$|f(u+v)|^2 = \langle f(u+v), f(u+v)\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle f(u)+f(v), f(u)+f(v)\rangle$$

$$\overset{\substack{\text{Bilinearität}\\ \text{Symmetrie}}}{=} \langle f(u), f(u)\rangle + 2\langle f(u), f(v)\rangle + \langle f(v), f(v)\rangle$$

$$= |f(u)|^2 + 2\langle f(u), f(v)\rangle + |f(v)|^2$$

$$\overset{\text{Voraussetzungen}}{=} |u|^2 + 2\langle f(u), f(v)\rangle + |v|^2$$

2. Weg $|f(u+v)|^2$ auszurechnen:

$$|f(u+v)|^2 = |u+v|^2 = \langle u+v, u+v\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle u+v, u+v\rangle$$

$$\overset{\substack{\text{Bilinearität}\\ \text{Symmetrie}}}{=} \langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle = |u|^2 + 2\langle u, v\rangle + |v|^2.$$

Also, $|u|^2 + 2\langle f(u), f(v)\rangle + |v|^2 = |u|^2 + 2\langle u, v\rangle + |v|^2$, daraus folgt
$2\langle f(u), f(v)\rangle = 2\langle u, v\rangle$, $\square$

Satz 37 *Man betrachte $\mathbb{R}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei $A \in Mat(n,n)$. Dann gilt: f_A ist genau dann orthogonal, falls $A^t = A^{-1}$.*

Def. Solche Matrizen $A \in Mat(n,n)$ (s.d. $A^t A = Id$) heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^t A^t A y = x^t Id\, y = x^t y = \langle x, y\rangle$. Also ist f_A orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^t Ay = x^t A^t A y = \sigma_{A^t A}(x,y)$. Da $(Ax)^t Ay = \langle x, y\rangle = \sigma_{Id}(x,y)$, ist $A^t A = Id$. $\square$

Folgerung A *Sind $A, B \in Mat(n,n)$ orthogonal, so sind A^{-1}, AB auch orthogonal.*
Beweis. Wir zeigen dass A^{-1} orthogonal ist. Nach Definition ist $A^{-1} = A^t$. Z.z.: $(A^t)^t = (A^t)^{-1}$,d.h. $(A^t)^t A^t = Id$. Aber $(A^t)^t A^t = AA^t = AA^{-1} = Id$, also ist A^{-1} auch eine orthogonale Matrix.
Wir zeigen dass AB orthogonal ist.
$(AB)^t AB = B^t A^t AB = B^t \underbrace{A^{-1} A}_{Id} B = B^t B = B^{-1} B = Id$, also

$(AB)^t = (AB)^{-1}$. □

Folgerung B *Die Determinante einer orthogonalen Matrix ist ± 1*
Beweis. $det(A^t A) = det(Id) = 1$. Aber $det(A^t A) \overset{\text{Satz 19}}{=} det(A^t) det(A) \overset{\text{Satz 22}}{=} det(A)^2$. Also, $det(A)^2 = 1$, und deswegen $det(A) = \pm 1$. □

Bedeutung von $AA^t = Id$.

Lemma 33 *$A \in Mat(n,n)$ ist genau dann orthogonal, wenn das Standard-Skalarprodukt der $i-$ten Zeile mit der $j-$ten Zeile gleich* $\begin{cases} 1, & \textit{falls } i=j \\ 0, & \textit{falls } i \neq j \end{cases}$.

Wir werden benutzen: *Eine $(n \times n)$-Matrix ist genau dann gleich Id, falls deren (i,j)-Element gleich* $\begin{cases} 1, & \textit{falls } i=j \\ 0, & \textit{falls } i \neq j \end{cases}$.

Beweis des Lemmas: $AA^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Nach der Rechenregel für das Produkt von Matrizen (Satz 14) ist das (i,j)-Element von AA^t gleich dem Standard-Skalarprodukt der $i-$ten Zeile von A mit der $j-$ten Spalte von A^t, die gleich der $j-$ten Zeile von A ist. Also ist AA^t genau dann gleich Id, wenn das Standard-Skalarprodukt der $i-$ten Zeile mit der $j-$ten Zeile gleich $\begin{cases} 1, & \text{falls } i=j \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases}$ ist.

□

Folgerung *$A \in Mat(n,n)$ ist genau dann orthogonal, wenn das Standard-Skalarprodukt der $i-$ten Spalte mit der $j-$ten Spalte gleich* $\begin{cases} 1, & \textit{falls } i=j \\ 0, & \textit{falls } i \neq j \end{cases}$.

Tatsächlich, nach obiger Folgerung ist A^t auch orthogonal. □

Anwendung des Lemmas 33 in $\mathbb{R}^2$

Bsp. Die Matrix $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ ist orthogonal. In der Tat, $A^t A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) & -\cos(\alpha)\sin(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ \cos(\alpha)\sin(\alpha) - \sin(\alpha)\cos(\alpha) & \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Man bemerke, dass $\det(A) = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.

Bsp. Die Matrix $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$ ist ebenfalls orthogonal. In der Tat, $A^t A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\alpha) - \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ \cos(\alpha)\sin(\alpha) - \sin(\alpha)\cos(\alpha) & \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Man bemerke, dass $\det(A) = -\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = -1$.

Wir zeigen jetzt, dass jede $2 \times 2-$Orthogonalmatrix ist wie in den Bsp. oben ist.

Lemma 34. Es gilt:

(a) Jede $2 \times 2-$Orthogonalmatrix A mit $det(A) = 1$ hat das Aussehen $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$. Ist $\sin(\alpha) \neq 0$, so hat die Matrix keine Eigenvektoren.

(b) Jede $2 \times 2-$Orthogonalmatrix A mit $det(A) = -1$ hat das Aussehen $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.

Diese Matrix hat die Eigenwerte 1 und -1.

Bemerkung. Die Bedingung $det(A) = \pm 1$ in Lemma 34 ist keine Beschränkung: nach Folgerung B aus Satz 37 ist die Determinante einer Orthogonalmatrix gleich ± 1.

Beweis. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ orthogonal. Dann gilt nach Definition von Orthogonalmatrizen:

$$A^t A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

Da nach Definition von Orthogonalmatrizen muss $A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sein, die Zahlen a, b, c, d erfüllen somit die Bedingungen

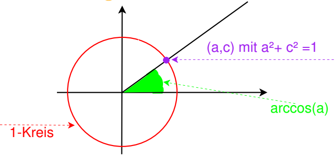
$$a^2 + c^2 = 1,\ b^2 + d^2 = 1,\ ab + cd = 0. \qquad (*)$$

Aufgrund der ersten Gleichung $a^2 + c^2 = 1$ gibt es eine Zahl θ mit $a = \cos(\theta), c = \sin(\theta)$. In der Tat, setze $\theta = \arccos(a)$ (wohldefiniert, denn $|a| \leq 1$ und der Definitionsbereich der Funktion arccos ist $[-1, 1]$). Dann gilt selbstverständlich $a = \cos(\theta)$. Außerdem gilt:

$$\sin(\theta) = \sin(\arccos(a)) \overset{\text{Schulformel; wird in Analysis noch einmal erklärt}}{=} \sqrt{1 - a^2},$$

deswegen ist $\sin^2(\theta) = 1 - a^2$ und wegen $a^2 + c^2 = 1$ bekommen wir $\sin^2(\theta) = c^2$.

Erklärung der "Schulformel"



Daraus folgt, dass $\sin(\theta) = c$ ist (was wir wollen), oder dass $\sin(\theta) = -c$ ist. Im zweiten Fall ersetzen wir θ durch $-\theta$: die Bedingung $a = \cos(\theta)$ wird dadurch nicht beeinträchtigt (weil $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ ist). Die Bedingung $\sin(\theta) = -c$ wird nach Umbenennung $\theta \mapsto -\theta$ die gewünschte Bedingung $\sin(\theta) = c$.

Analog (aus $b^2 + d^2 = 1$) folgern wir, dass $\exists\, \phi$ mit $b = \cos(\phi), d = \sin(\phi)$.

Wir setzen $a = \cos(\theta), c = \sin(\theta),\ b = \cos(\phi), d = \sin(\phi)$ in die dritte der Gleichungen $(*)$ ein:

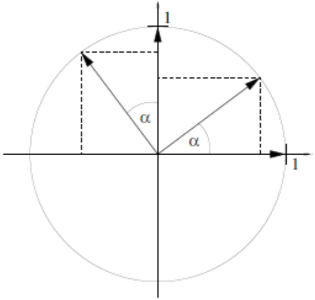
$0 = ab + cd = \cos(\theta)\cos(\phi) + \sin(\theta)\sin(\phi) \overset{\text{Schulformel}}{=} \cos(\theta - \phi)$; daraus folgt dass (o.B.d.A) $\theta - \phi = \pm 90^\circ$ ist.
Falls $\theta - \phi = +90^\circ$ ist, also $\phi = 90^\circ - \theta$, dann ist
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \cos(90^\circ - \theta) \\ \sin(\theta) & \sin(90^\circ - \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$.
Wir sehen, dass die Matrix A wie in Fall (b) von Lemma 34 ist!

Falls $\theta - \phi = -90^\circ$ ist, also $\phi = -90^\circ - \theta$, dann ist
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \cos(-90^\circ - \theta) \\ \sin(\theta) & \sin(-90^\circ - \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
Wir sehen, dass die Matrix A wie in Fall (a) (mit $\alpha = \theta$) von Lemma 34 ist!

Also, die Ortogonalmatrix A hat das Aussehen $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ (Fall (a)) oder
$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$ (Fall (b)).
Jetzt wollen wir die Eigenwerte ermitteln. Im Fall (a) gilt: $\det(A - t \cdot Id) = t^2 - 2\cos(\alpha)t + 1$. Da Diskriminant $\mathcal{D} = \cos(\alpha)^2 - 1 < 0$ für $\sin(\alpha) \neq 0$. Also fur $\sin(\alpha) \neq 0$ hat das Polynom keine Nullstelle, daher hat A keine Eigenwerte. Falls $sin(\alpha) = 0$, hat die Matrix das Aussehen $\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; dann ist ± 1 der einzige Eigenwert, und alle Vektoren $v \neq \vec{0}$ von $\mathbb{R}^2$ sind Eigenvektoren.
Im Fall (b) gilt: $\det(A - t \cdot Id) = t^2 - 1$; dann sind die Eigenwerte $1, -1$. $\square$

Orthogonale Matrix mit det $= 1$ entspricht einer Drehung

Wir betrachten die Matrix $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ aus Fall (a) von Lemma 34.
Diese Matrix entspricht der Drehung (mit Winkel α) um den $0-$Punkt des Koordinatensystems:
In der Tat, die Multiplikation mit der Matrix A dreht die Basisvektoren (und deswegen auch alle Vektoren) um den Winkel α:



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

(Drehungen werden dabei gegen den Uhrzeigersinn durchgeführt.)

Orthogonale Matrix mit det $= -1$ entspricht einer Spiegelung

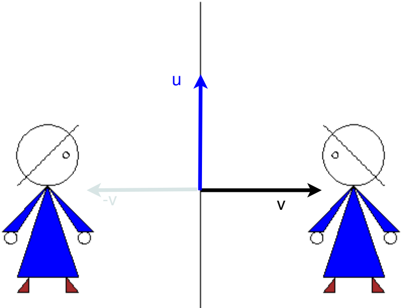
Wir ermitteln zuerst die Eigenvektoren von $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$.

Der Eigenvektor zu 1 ist $u := \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ 1-\cos(\alpha) \end{pmatrix}$ für $\alpha \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ und $\begin{pmatrix} 1+\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ für $\alpha = 2\pi k$.

(In der Tat, $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ 1-\cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ 1-\cos(\alpha) \end{pmatrix}$).

Der Eigenvektor zu -1 ist $v := \begin{pmatrix} \cos(\alpha)-1 \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$ für $\alpha \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ für $\alpha = 2\pi k$.

Man bemerke, dass u zu v orthogonal ist (sodass wir eine orthonormierte Basis bekommen, wenn wir sie normieren). In dieser Basis $(\frac{1}{|v|}v, \frac{1}{|u|}u)$ ist die Matrix der Abbildung gleich $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, und die Abbildung ist die Spiegelung bzgl. der Geraden mit dem Richtungsvektor u



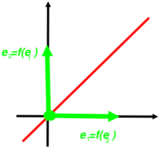
Bemerkung. Es ist einfach zu verstehen, ob eine gegebene orthogonale $(2 \times 2)-$Matrix einer Drehung oder der Verkettung einer Drehung mit einer Spiegelung entspricht.

In der Tat (wie oben einmal berechnet wurde),
$\det \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1.$

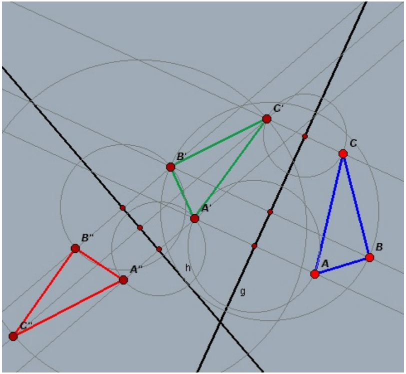
$\det \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} = -1.$

Also, wenn $det(A) = 1$ (wobei A eine $2 \times 2-$orthogonale Matrix), dann ist A die Matrix einer Drehung; wenn $det(A) = -1$, dann entspricht A einer Spiegelung.

Bsp. Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist orthogonal; $\det(A) = -1$. Dann muss sie die Matrix einer Spiegelung sein, und es ist so:
Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist die Matrix der Spiegelung bzgl. der Gerade auf dem Bild.



Folgerung. Verkettung von zwei Spiegelungen ist eine Drehung.



Beweis. Die Multiplikation von zwei orthogonalen Matrizen ist orthogonal; die Determinante davon ist
(det der ersten Matrix)$\cdot$(det der ersten Matrix)$= (-1) \cdot (-1) = 1$ $\square$