Metrische Räume

Def. Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt eine Metrik, wenn $\forall x, y, z \in X$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(Definitheit) $\quad d\,(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

(Symmetrie) $\quad d\,(x, y) = d(y, x),$

(Dreiecksungleichung) $\quad d\,(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$

Die Nicht-Negativität $d\,(x, y) \geq 0$ haben wir als zusätzliche Eigenschaft angegeben, obwohl sie aus den anderen Bedingungen folgt. Sie ist daher überflüssig:

$2d(x, y) = d(x, y) + d(x, y) \overset{\text{(Symmetrie)}}{=}$

$d(x, y) + d(y, x) \overset{\text{(Dreiecksungleichung)}}{\geq} d(x, x) \overset{\text{(Definitheit)}}{=} 0 \quad \Rightarrow d(x, y) \geq 0.$

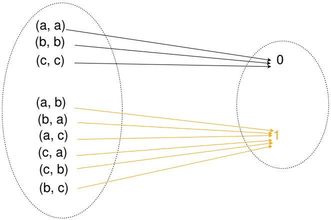
Das Paar (X, d) heißt ein metrischer Raum.

Eine Abbildung $I : X \to X$, welche die Metrik erhält, d.h. $d(I(x), I(y)) = d(x, y)$, heißt Isometrie (oder Bewegung, Kongruenz). Die Menge $Iso(X, d) := \{\text{alle bijektive Isometrien von } X\}$ heisst die Isometriegruppe von (X, d).

Einfaches Bsp.

Sei $X = \{a, b, c\}$. Dann ist
$X \times X = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)\}$.
Wir definieren die Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ mit Hilfe der Regel

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{for } x = y \\ 1 & \text{for } x \neq y \end{cases}$$



Dies ist eine Metrik: Die Bedingungen „Definitheit“ sowie „Symmetrie“ sind offensichtlich erfüllt (weil $d(x, y) = 0$ nur für $x = y$) und die Bedingung „Dreiecksungleichung“ ist einfach nachzuweisen, in dem man alle möglichen Tripel ausprobiert (z.B. $d(a, b) + a(b, b) = 1 \geq d(a, b) = 1$).

Für diese Metrik gilt: $Iso(X, d) = \{\text{alle Bijektionen } \phi : X \to X\}$.
In der Tat,

$$d(\phi(x), \phi(y)) = \begin{cases} 0 & \text{für } \phi(x) = \phi(y) \quad \overset{\text{für Bijektionen}}{\Longleftrightarrow} \quad x = y \\ 1 & \text{für } \phi(x) \neq \phi(y) \quad \overset{\text{für Bijektionen}}{\Longleftrightarrow} \quad x \neq y \end{cases}$$

$$= d(x, y).$$

Wicht. Bsp. – Standard-Metrik auf einem Euklidischen Raum

Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidischer Raum. Wir definieren die Metrik $d : V \times V \to \mathbb{R},\ d(u,v) := |u - v| := \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle}$. Das ist tatsächlich eine Metrik:

(Definitheit) $d\,(u,v) = 0 \Longleftrightarrow |u - v| = 0$

$\overset{\text{Positivdefinitheit}}{\Longleftrightarrow} \quad u - v = \vec{0} \Longleftrightarrow u = v,$

(Symmetrie)

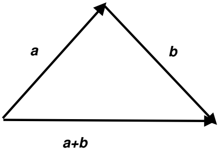
$$d(u,v) = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle} = \sqrt{(-1)^2 \cdot \langle (v-u), \cdot (v-u)\rangle} \overset{\text{Bilinerität}}{=} \sqrt{\langle -1\cdot(v-u), -1\cdot(v-u)\rangle} = \sqrt{\langle v-u, v-u\rangle} = d(v,u).$$

(Dreiecksungleichung) $\quad d\,(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$

Beweis der Dreiecksungleichung: $\forall u, v, w$ gilt $d(u,w) \le d(u,v) + d(v,w)$

Wir zeigen, dass die Dreiecksungleichung aus **Folgerung aus Lemma 32 (Cauchy-Schwarz) in Vorlesung 16** folgt (ist eigentlich das selbe)

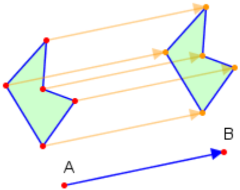
Wiederholung –
Folgerung aus Lemma 32:
Sei $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Dann gilt für alle $a, b \in V$: $|a| + |b| \ge |a+b|$.



Z.z. ist:
$d(u,w) \le d(u,v) + d(v,w)$ für alle Vektoren u, v, w, d.h.,
$|\underbrace{u-v}_{a}| + |\underbrace{v-w}_{b}| \ge |\underbrace{u-w}_{a+b}|$ (weil $u - v + v - w = u - w$).

Aber die Formel $|a| + |b| \ge |a+b|$ (für alle a, b) ist die Folgerung aus Cauchy-Schwarz $\square$

Bsp. Die Parallelverschiebungen $T_w : V \to V$, $T_w(v) := v + w$ sind Isometrien für für die Standard-Metrik.



In der Tat, $d(T_w(u), T_w(v)) = d(u + w, v + w) = |u + w - (v + w)| = |u - v| = d(u, v)$.

Bemerkung 1. Parallelverschiebungen T_w sind keine linearen Abbildungen für $w \neq \vec{0}$. (Für $w = \vec{0}$ ist $T_{\vec{0}} = Id$ und ist deswegen eine lineare Abbildung.) In der Tat,

$T_w(\vec{0}) \overset{Def}{=} w + \vec{0} = w \neq \vec{0}$. Lineare Abbildungen bilden aber $\vec{0}$ auf $\vec{0}$ ab.

Bemerkung 2. $T_u \circ T_v = T_{u+v}$.

In der Tat, $T_u \circ T_v(w) \overset{Def}{=} (w + v) + u = w + (u + v) \overset{Def}{=} T_{u+v}(w)$.

Bemerkung 3. Parallelverschiebungen sind Bijektionen.

In der Tat, die Abbildung T_{-v} ist die inverse Abbildung für T_v, weil

$T_{-v} \circ T_v \overset{\text{Bem. 2}}{=} T_{-v+v} = T_{\vec{0}} = Id$. Also ist T_{-v} das Linksinverse für T_v.

Ähnlich zeigen wir, dass T_{-v} das Rechtssinverse für T_v ist:

$T_v \circ T_{-v} \overset{\text{Bem. 2}}{=} T_{v-v} = T_{\vec{0}} = Id$. Dann ist T_{-v} die inverse Abbildung zu T_v, also ist T_v bijektiv nach Lemma 13 (Vorl. 7)

Bsp. Die orthogonalen Endomorphismen (siehe Vorl. 16) sind Isometrien für die Standard-Metrik.
Um dies zu zeigen, benutzen wir die folgende in Vorl. 16 (vor Satz 36b) bewiesene

Bemerkung – Wiederholung *Orthogonale Abbildungen erhalten die Längen, d.h.* $\forall u \in V$ *gilt:* $|f(u)| = |u|$.

$(*)$

Beweis der Bemerkung. Es gilt:

$$d(f(u), f(v)) = |f(u) - f(v)| \overset{\text{Linearität}}{=} |f(u-v)| \overset{(*)}{=} |u-v| = d(u,v).$$

Lemma 35 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann hat die Menge $Iso(X, d) := \{\phi : X \to X \mid \phi \text{ ist eine bijektive Isometrie}\}$ die folgenden Eigenschaften:
(i) $\forall \phi, \psi \in Iso(X, d)$ gilt: $\phi \circ \psi \in Iso(X, d)$.
(ii) $\forall \phi \in Iso(X, d)$ gilt: $\phi^{-1} \in Iso(X, d)$.

Bemerkung. Eine Isometrie ist stets eine injektive Abbildung. Tatsächlich, ist $f(x) = f(y)$, so ist $d(f(x), f(y)) = 0$, folglich $d(x, y) = 0$ und folglich $x \overset{\text{(Definitheit)}}{=} y$.
Es gibt aber Beispiele von nichtbijektiven Isometrien – in unendlichdimensionalen Euklidischen Räumen. Wir werden heute zeigen (Satz 38), dass in jedem endlichdimensionalen Euklidischen Raum jede Isometrie eine bijektive Abbildung ist.

Bemerkung. Existenz von ϕ^{-1} folgt aus Lemma 13 (weil nach Voraussetzung ϕ bijektiv ist).

Lemma 13 – Wiederh. *Sei $f : A \to B$. Dann gilt:*

$$f \text{ ist Bijektion} \iff \begin{array}{l} \exists g : B \to A \\ \text{s.d. } g \circ f = Id_A \text{ und } f \circ g = Id_B. \end{array}$$

Beweis des Lemma 35(i).
Z.z.: $\forall \phi, \psi \in Iso(X,d)$ gilt: $\phi \circ \psi \in Iso(X,d)$.

Seien $\phi, \psi \in Iso(X,d)$. Dann ist $d(\phi \circ \psi(x), \phi \circ \psi(y)) =$
$d(\phi(\underbrace{\psi(x)}_{x'}), \phi(\underbrace{\psi(y)}_{y'})) = d(\phi(x'), \phi(y')) \overset{\text{Weil } \phi \text{ eine Isometrie ist}}{=} d(x', y') =$
$d(\psi(x), \psi(y)) \overset{\text{Weil } \psi \text{ eine Isometrie ist}}{=} d(x, y)$.

Beweis des Lemma 35(ii).
Z.z.: $\forall \phi \in Iso(X,d)$ gilt: $\phi^{-1} \in Iso(X,d)$.

Seien $\phi \in Iso(X,d)$. Z.Z.: $\phi^{-1} : X \to X$, $\phi(\phi^{-1}(x)) = x$ ist eine Isometrie.
$d(\underbrace{\phi^{-1}(x)}_{x'}, \underbrace{\phi^{-1}(y)}_{y'}) = d(x', y') \overset{\text{Weil } \phi \text{ eine Isometrie ist}}{=} d(\phi(x'), \phi(y')) =$
$d(\underbrace{\phi(\phi^{-1}(x))}_{x}, \underbrace{\phi(\phi^{-1}(y))}_{y}) \overset{\text{Nach Definition von } \phi^{-1}}{=} d(x, y)$. $\square$

Hauptbeispiel

Folgerung Die Abbildungen der Form $F_{f,w}(v) := T_w \circ f(v) := f(v) + w$, wobei f eine orthogonale Abbildung und T_w eine Parallelverschiebung ist, sind bijektive Isometrien.

Tatsächlich, solche Abbildungen sind Verkettungen von zwei Bijektionen (orthogonale Abbildung und Parallelverschiebung) und deswegen bijektiv (Folg. aus Lemma 17; Vorl. 10). Sie sind Verkettungen von zwei Isometrien und deswegen auch Isometrien nach Lemma 35(i).

Folgerung in Koordinaten Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle \ , \ \rangle$. Dann sind die Abbildungen

$$F_{O,b} : V \to V \ , \ F_{O,b} := Ox + b, \qquad (*)$$

wobei O eine orthogonale $(n \times n)-$ Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ ist, (bijektive) Isometrien (bzgl. Standard-Metrik).

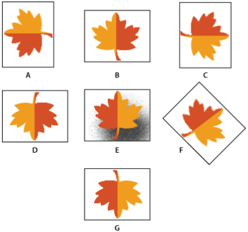


Bild von adobe.com

Satz 38 *Jede Isometrie eines endlichdimensionalen Euklidischen Raums ist wie in Hauptbeispiel, d.h. die Verkettung einer orthogonalen Abbildung und einer Verschiebung.*

Dass heißt, im Standard-Raum $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Skalarprodukt kann man jede Isometrie als

$F\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = O \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ schreiben,

wobei O eine orthogonale Matrix ist.

In Worten Jede Isometrie (der Standard-Metrik) ist

Bemerkung. Wir verlangen im Satz nicht, dass die Abbildung linear ist, d.h. der Satz ist viel allgemeiner als z.B. Satz 36b, in welchem wir eine ähnliche Aussage für LINEARE Abbildungen bewiesen haben. In der Tat folgt Satz 36b sofort aus Satz 38.

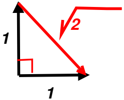
Bemerkung. Aus dem Satz folgt auch, dass die Isometrien von $(V, \langle , \rangle)$ mit $\dim(V) < \infty$ bijektiv sind. In der Tat kann man für jede Abbildung der Form $F(x) = Ox + b$ sofort eine inverse Abbildung konstruieren: $G(x) = O^{-1}x - O^{-1}b$. In der Tat,

$G \circ F(x) = O^{-1}(Ox + b) - O^{-1}b = O^{-1}Ox + O^{-1}b - O^{-1}b = x.$

$F \circ G(x) = O(O^{-1}x - O^{-1}b) + b = OO^{-1}x - OO^{-1}b + b = x.$

Drei Hilfslemmata vor dem Beweis.

Hilfslemma 1 *Sei* $|u| = |v| = 1$. *Dann gilt:*
$\langle u, v\rangle = 0 \iff |u - v| = \sqrt{2}$



Beweis $\Longrightarrow$: $|u - v| = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle} = \sqrt{\langle u, u\rangle - 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle} = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}$.

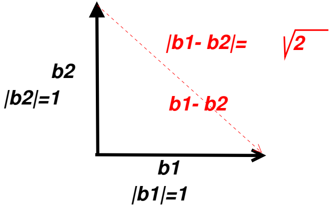
Beweis $\Longleftarrow$:

$$\begin{array}{ccccc} |u - v|^2 & = & \langle u - v, u - v\rangle & = & \langle u, u\rangle - 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle \\ 2 & = & & = & 1 - 2\langle u, v\rangle + 1 \qquad (*) \end{array}$$

Aus $(*)$ folgt $\langle u, v\rangle = 0$ (wir ziehen in $(*)$ 2 von beiden Seiten ab) $\square$

„Elementargeometrische“ Erklärung (kein Beweis!) von HL 1 in D2

Wir betrachten das Dreieck mit Seiten b_1, b_2 und $b_1 - b_2$. Die Voraussetzungen $d(b_1, \vec{0}) = 1$ und $d(b_2, \vec{0}) = 1$ bedeuten, dass $|b_1| = |b_2| = 1$. Die Voraussetzung $d(b_1, b_2) = \sqrt{2}$ bedeutet, dass $|b_1 - b_2| = \sqrt{2}$.



Aus dem Satz von Pythagoras folgt (weil $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$), dass Winkel zwischen b_1 und b_2 gleich 90° ist.

Wir werden das Hilfslemma 1 wie folgt im Beweis von Satz 38 benutzen: Wir zeigen, dass $(F(e_1), ..., F(e_n))$ (wobei $(e_1, ..., e_n)$ eine orthonormale Basis ist) auch eine orthonormale Basis ist, falls $F(\vec{0}) = \vec{0}$. In der Tat,

$1 = \langle e_1, e_1 \rangle = |e_1|^2 = |e_1 - \vec{0}|^2 = d(e_1, \vec{0})^2 = d(F(e_1), F(\vec{0}))^2 =$
$|F(e_1) - F(\vec{0})|^2 = |F(e_1)|^2$.

Also ist die Länge des Vektors $F(e_1)$ gleich 1, wie wir wollen. Analog zeigt man, dass die Länge jedes Vektors $F(e_i)$ gleich 1 ist. Wir zeigen jetzt, dass $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$. Die Länge von $e_1 - e_2$ ist gleich $\sqrt{\langle e_1 - e_2, e_1 - e_2 \rangle} = \sqrt{2}$. Dann ist der Abstand $d(e_1, e_2) = \sqrt{2}$. Dann ist $d(F(e_1), F(e_2)) = \sqrt{2}$, folglich $|F(e_1) - F(e_2)| = \sqrt{2}$. Nach Hilfslemma 1 ist dann $F(e_1)$ zu $F(e_2)$ orthogonal. Analog zeigt man, dass für alle $i \neq j$ $F(e_i)$ zu $F(e_j)$ orthogonal ist, also die Basis $(F(e_1), ..., F(e_n))$ orthonormal ist.

Hilfslemma 2 *Sei $F : V \to V$ eine Isometrie mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Dann gilt $\forall v \in V\ \forall t \in \mathbb{R}$: $F(tv) = tF(v)$.*

Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:

$$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}| = d(F(v), \vec{0}) \overset{\text{Weil } F(\vec{0}) = \vec{0}}{=} d(v, \vec{0}) = |v - \vec{0}| = |v|.$$

Beweis. Für $v = \vec{0}$ ist die Aussage trivial. Unten werden wir $v \neq \vec{0}$ voraussetzen. Nach der Bemerkung gilt:

$|F(v)| = |v|$,
$|F(t \cdot v)| = |t \cdot v| = |t| \cdot |v|$,
$|F((t-1) \cdot v)| = |(t-1) \cdot v| = |t-1| \cdot |v|$.

Wir rechnen jetzt $(d(F(t \cdot v), F(v)))^2$ zweimal aus:

$$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2 = \langle F(t \cdot v) - F(v), F(t \cdot v) - F(v) \rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=}$$
$$\underbrace{|F(t \cdot v)|^2}_{t^2|v|^2} - 2\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle + \underbrace{|F(v)|^2}_{|v|^2} = t^2|v|^2 - 2\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle + |v|^2$$

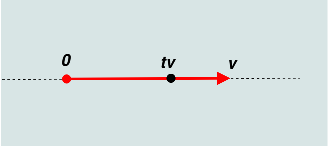
$$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2 \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} (d(t \cdot v, v))^2 = |(t-1) \cdot v|^2 =$$
$$(t-1)^2 \cdot |v|^2 = t^2 \cdot |v|^2 - 2t \cdot |v|^2 + |v|^2.$$

Dann ist $\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle = t \cdot |v| \cdot |v|$. Wir sehen, dass $|\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle| = |t \cdot |v| \cdot |v|| = |F(t \cdot v)| \cdot |F(v)|$.

Nach Cauchy-Schwarz (Lemma 32) sind dann $F(t \cdot v)$ und $F(v)$ linear abhängig, also $F(t \cdot v) = \lambda F(v)$ für ein λ. Dann folgt aus $\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle = t \cdot |v| \cdot |v|$, dass $\lambda = t$, also $F(t \cdot v) = tF(v)$. $\square$

„Elementargeometrische“ Erklärung (kein Beweis!) von HL 2 in D2

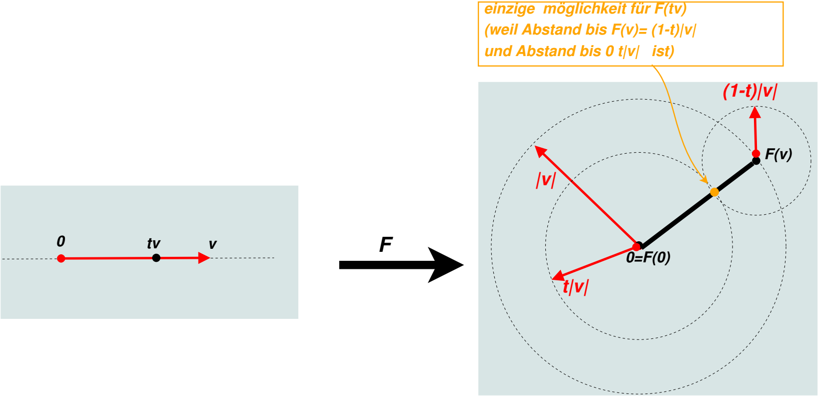
Wir betrachten die Punkte $\vec{0}, v$ und den Punkt $t \cdot v$. Sei z.B. $0 \leq t \leq 1$ (die Fälle $t < 0$ und $t > 1$ kann man analog behandeln). Dann liegt tv auf der Strecke mit den Endpunkten $\vec{0}, v$.



Dann gilt: $d(\vec{0}, v) = |v|$, $d(\vec{0}, tv) = t|v|$. $d(v, tv) = |v - tv| = |(1-t)v| = (1-t)|v|$ (weil $t \geq 0$, $1 - t \geq 0$).

Jetzt betrachten wir eine Isometrie F mit $\vec{0} \mapsto \vec{0}$ sowie die drei Punkte $\vec{0} = F(\vec{0})$, $F(v)$, $F(tv)$.

Wir haben: $d(\vec{0}, F(tv)) = d(F(\vec{0}), F(tv)) \overset{\text{Isometrie}}{=} d(\vec{0}, tv) = t|v|$;
$d(\vec{0}, F(v)) = d(F(\vec{0}), F(v)) \overset{\text{Isometrie}}{=} d(\vec{0}, v) = |v|$;
$d(F(v), F(tv)) \overset{\text{Isometrie}}{=} d(v, tv) = (1-t)|v|$;



Wir betrachten die Kreise um $\vec{0}$ mit Radius $t|v|$ und um v mit Radius $(1-t)|v|$. Da der Abstand von $\vec{0}$ zu v gleich $|v| = (1-t)|v| + t|v|$ ist, haben die Kreise genau einen gemeinsamen Punkt, und dieser liegt auf der Strecke durch $\vec{0}$ und $F(v)$. Aber $F(tv)$ liegt auf beiden Kreisen! Also muss der Punkt $F(tv)$ auf der Strecke mit den Endpunkten $\vec{0}$, $F(v)$ liegen und der Abstand von $F(tv)$ zu $\vec{0}$ ist $t|v|$. Dann ist $F(tv) = tF(v)$.

Def: Bild einer Menge unter einer Abbildung.

Sei $f : A \to B$ eine Abbildung und $A_1 \subseteq A$ eine Teilmenge von A. Wir definieren $Bild_f(A_1) := \{f(a_1) \mid a_1 \in A_1\}$

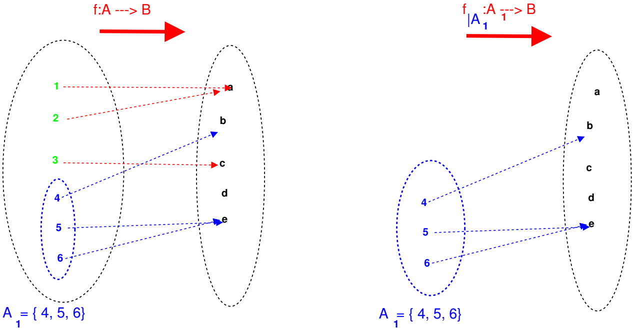
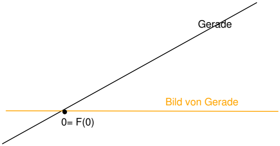


Abbildung: **Bsp:** $A_1 \subseteq A$ und $Bild_f(A_1) := \{f(a_1) \mid a_1 \in A_1\} = \{b, e\}$

Z.B. wenn $A_1 = A$, dann ist $Bild_f(A) = Bild_f$.

Def. Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum. Die Gerade mit Richtungsvektor $v \neq \vec{0}$ ist die Menge $\mathcal{G}_v = Span(v) = \{t \cdot v \mid t \in \mathbb{R}\}$.

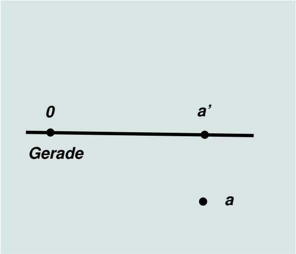
Folgerung aus HL2. Sei $(V, +, \cdot, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidischer Raum und F eine Isometrie, sodass $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Dann gilt für jedes $v \neq \vec{0} \in V$:
$Bild_F(\mathcal{G}_v) := \{F(u) \mid u \in \mathcal{G}_v\} = \mathcal{G}_{F(v)}$.

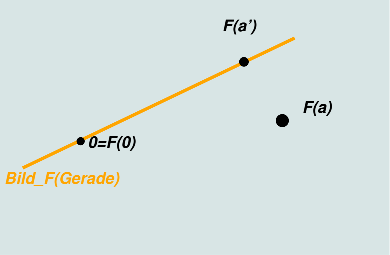


In Worten: Das Bild einer Geraden ist eine Gerade (für Isometrien, die $\vec{0}$ erhalten). Der Richtungsvektor des Bildes ist das Bild des Richtungsvektors.

Beweis. Nach HL 2 ist $F(tv) = t \cdot F(v)$. Dann ist
$Bild_F(\mathcal{G}_v) = \{F(tv) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{t \cdot F(v) \mid t \in \mathbb{R}\} = \mathcal{G}_{F(v)}$. $\square$

Hilfslemma 3 Sei $(V, +, \cdot, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidischer Raum und F eine Isometrie, sodass $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Dann gilt für jedes $a \in V$:
$F(Proj_{\mathcal{G}_v}(a)) = Proj_{Bild_F(\mathcal{G}_v)}(F(a)) \overset{\text{Folg. HL 2}}{=} Proj_{\mathcal{G}_{F(v)}}(F(a))$.





Beweis. Nach Folgerung aus HL 2 ist $Bild_F(\mathcal{G}_v)$ die Gerade $\mathcal{G}_{F(v)}$.
Deswegen ist die Projektion wohldefiniert.
Für jeden Untervektorraum $\mathcal{G}$ ist $Proj_{\mathcal{G}}(a)$ nach Lemma 31 Vorl. 15 der Vektor $a' \in \mathcal{G}$, sodass für jedes $a'' \in \mathcal{G}$, $a'' \neq a'$, gilt: $|a'' - a| > |a' - a|$.
Da F Abstände erhält und nach obiger Folgerung $\mathcal{G}_v$ in $\mathcal{G}_{F(v)}$ überführt, ist für jedes $F(a'') \in \mathcal{G}_{F(v)}$ mit $F(a'') \neq F(a')$
$\underbrace{d(F(a''), F(a))}_{=d(a'',a)} = |F(a'') - F(a)| > |F(a') - F(a)| = \underbrace{d(F(a'), F(a))}_{=d(a',a)}$. Nach Lemma 31 Vorl. 15 ist $F(a') = Proj_{\mathcal{G}_{F(v)}}(F(a))$. $\square$

Beweis des Satzes 38.

Satz 38 – Wiederholung *Jede Isometrie eines endlichdimensionalen Euklidischen Raums ist Verkettung einer orthogonalen Abbildung und einer Parallelverschiebung*

Beweis des Satzes 38. OBdA ist $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Sonst betrachte man $\bar{F} := T_{-F(\vec{0})} \circ F$. Da $T_{-F(\vec{0})}$ eine Isometrie ist, ist $\bar{F} := T_{-F(\vec{0})} \circ F$ auch eine Isometrie. Nach Definition ist $\bar{F}(\vec{0}) = T_{-F(\vec{0})} \circ F(\vec{0}) = T_{-F(\vec{0})}(F(\vec{0})) = F(\vec{0}) + (-F(\vec{0})) = \vec{0}$. Wenn wir beweisen, dass $\bar{F} := T_{-F(\vec{0})} \circ F$ die Form $T_u \circ f$ hat, dann gilt $F = T_{F(\vec{0})} \circ \bar{F} = {T_{-F(\vec{0})}}^{-1} \circ T_{-F(\vec{0})} \circ F = {T_{-F(\vec{0})}}^{-1} \circ \bar{F} = T^{-1}_{-F(\vec{0})} T_u \circ f = T_{F(\vec{0})} \circ T_u \circ f = T_{F(\vec{0})+u} \circ f$.

Also können wir oBdA annehmen, dass $F(\vec{0}) = \vec{0}$

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Wir wählen eine Orthonormalbasis $A := (e_1, ..., e_n)$ in V und setzen $b_i = F(e_i)$. Wir zeigen: $B := (b_1, ..., b_n)$ ist auch eine Orthonormalbasis. Tatsächlich,

$$\left.\begin{array}{r} |b_i| \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} |e_i| = 1, \\ |b_i - b_j| = d(b_i, b_j) = d(e_i, e_j) = |e_i - e_j| = \sqrt{2} \end{array}\right\} \overset{\text{Hilfslemma 1}}{\Longrightarrow} \begin{array}{c} \langle b_i, b_j \rangle = 0 \\ \text{für } i \neq j. \end{array}$$

Dann ist $(b_1, ..., b_n)$ eine Orthonormalbasis.

Wir zeigen: Der Koordinatenvektor eines beliebigen $v \in V$ in der Basis A ist gleich dem Koordinatenvektor von $F(v)$ in der Basis B.

Sei $v := x_1 e_1 + ... + x_n e_n$ und $F(v) = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Z.z.: $x_i = y_i$.

Nach **Wicht. Folg. aus Beweis von Lemma 36** ist (für jedes i) $Proj_{\mathcal{G}_{e_i}}(v) = x_i e_i$; $Proj_{\mathcal{G}_{b_i}} F(v) = y_i b_i$.

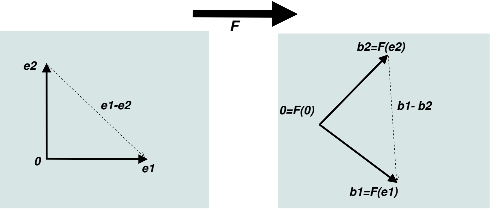
Nach Folgerung aus Hilfslemma 2 ist $\mathcal{G}_{b_i} = Bild_F(\mathcal{G}_{e_i})$. Nach Hilfslemma 3 ist $\underbrace{Proj_{\mathcal{G}_{b_i}} F(v)}_{=y_i b_i} = F\left(\underbrace{Proj_{\mathcal{G}_{e_i}}(v)}_{=x_i e_i}\right)$. Also $y_i b_i = F(x_i e_i)$. Nach HL 2 ist dann $x_i = y_i$, weil $F(x_i e_i) \overset{\text{HL 2}}{=} x_i F(e_i) = x_i b_i$. Dann ist

$$F(x_1 e_1 + ... + x_n e_n) = x_1 b_1 + ... + x_n b_n = x_1 O e_1 + ... + x_n O e_n = O \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

wobei O diejenige Matrix ist, für die $Oe_i = b_i$. Da $|Ox| = d(F(x), \vec{0}) = d(x, \vec{0}) = |x|$ ist, ist O nach Satz 36b orthogonal. $\square$

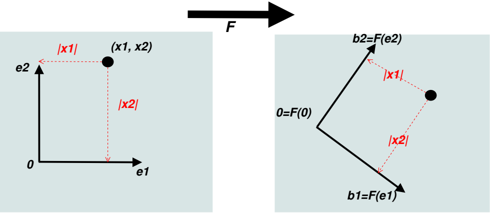
Erklärung des Beweises in Dim 2:

Wie am Anfang des Beweises erklärt, können wir oBdA annehmen, dass $F(\vec{0}) = \vec{0}$ ist. Wir betrachten eine orthonormale Basis (e_1, e_2) und zeigen zuerst, dass $b_1 := F(e_1)$ und $b_2 := F(e_2)$ auch eine orthonormale Basis ist. Da die Abbildung F Isometrie ist, und $F(\vec{0}) = \vec{0}$ ist, wissen wir, dass $|b_1| = |b_2| = 1$ und $|b_1 - b_2| = \sqrt{2}$.



Dann ist b_1 zu b_2 orthogonal nach HL 1. Da $|b_1| = |b_2| = 1$, sind die Vektoren linear unabhängig und die Basis (b_1, b_2) ist orthonormal.
Nach Folg. aus HL 2 überführt die Abbildung F die Geraden $\mathcal{G}_{e_1}$ und $\mathcal{G}_{e_2}$ jeweils in die Geraden $\mathcal{G}_{b_1}$ und $\mathcal{G}_{b_2}$.

Überlegen wir uns jetzt, welche Koordinaten der Punkt $F(x_1 e_1 + x_2 e_2)$ in der Basis (b_1, b_2) hat.



Der kleinste Abstand des Punktes $x_1 e_1 + x_2 e_2$ zu einem Punkt der Geraden $\mathcal{G}_{e_1}$ ist $|x_2|$ (und der Punkt der Geraden, s.d. der Abstand von $x_1 e_1 + x_2 e_2$ minimal ist, ist das Lot von $x_1 e_1 + x_2 e_2$, also $x_1 e_1$). Analog gilt: Der kleinste Abstand des Punktes $x_1 e_1 + x_2 e_2$ zu einem Punkt der Geraden $\mathcal{G}_{e_2}$ ist $|x_1|$.

Da die Abbildung Abstände erhält und da sie $\mathcal{G}_{e_1}$ und $\mathcal{G}_{e_2}$ jeweils in die Geraden $\mathcal{G}_{b_1}$ und $\mathcal{G}_{b_2}$ überführt, ist der kleinste Abstand von $F(x_1 e_1 + x_2 e_2)$ zu einem Punkt der Geraden $\mathcal{G}_{b_1}$ auch $|x_2|$ und zu einem Punkt der Geraden $\mathcal{G}_{b_2}$ auch $|x_1|$.

Aber der kleinste Abstand von $F(x_1 e_1 + x_2 e_2)$ zu einem Punkt der Geraden $\mathcal{G}_{b_1}$ ist der Betrag der zweiten Koordinate von $F(x_1 e_1 + x_2 e_2)$!

Wir haben also gesehen, dass F einen Punkt mit den Koordinaten $\binom{x_1}{x_2}$ auf einen Punkt abbildet, dessen Koordinaten in der Basis (b_1, b_2) gleich $\binom{\pm x_1}{\pm x_2}$ sind.
Im Beweis des Satzes waren wir ein Bisschen sorgfältiger und haben gezeigt, dass die Koordinaten von $F(\binom{x_1}{x_2})$ gleich $\binom{x_1}{x_2}$ sind.
Dann ist die Abbildung durch die Formeln
$F\binom{x_1}{x_2} = \binom{x_1}{x_2}$ gegeben, wobei $\binom{x_1}{x_2}$ die Koordinaten bzgl. der Basis (e_1, e_2) und $\binom{x_1}{x_2}$ die Koordinaten bzgl. (b_1, b_2) sind. Dann ist sie offensichtlich linear.

Diagonalisiereung symmetrischer Matrizen über $\mathbb{R}$

Wiederholung: A heißt symmetrisch, falls $A^t = A$.
Satz 39 *Ist A symmetrisch, so gibt es eine orthogonale Matrix O, sodass $O^{-1}AO$ diagonal ist. (Symmetrische Matrizen über $\mathbb{R}$ sind diagonalisierbar mit Hilfe von ortogonalen Transformationen.)*

Bemerkung Da $O^t = O^{-1}$, ist auch O^tAO diagonal. Also sind Matrizen von symmetrischen Bilinearformen auf reellen Vektorräumen diagonalisierbar mit Hilfe eines Basiswechsels.

Während des Beweises werde ich eine Aussage benötigen, die erst in LA II bewiesen wird (Hilfsaussage 2)

Hilfsaussage 1 *Sei O eine orthogonale Matrix und A eine symmetrische Matrix. Dann gilt: $O^{-1}AO$ ist symmetrisch.*

Beweis: $\left\{ \begin{array}{c} O^{-1} = O^t \\ A^t = A \end{array} \right. \implies (O^{-1}AO)^t = (O^tAO)^t = O^tA^t(O^t)^t = O^{-1}AO,$ $\square$

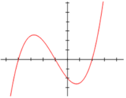
Hilfsaussage 2 *Jede symmetrische $(n \times n)-$Matrix A hat mind. einen (reellen) Eigenwert.*

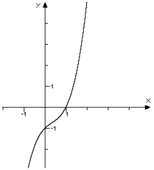
Wir werden diese Aussage ohne Beweis annehmen. Der Beweis für beliebige Matrizen kommt in LAAG II. In den Dimensionen $2, 3$ können wir den Beweis sogar jetzt durchführen.

Zuerst nehmen wir an, dass die Dimension gleich 2 ist. Sei also $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Dann ist $\aleph_A = \det \begin{pmatrix} a-t & b \\ b & c-t \end{pmatrix} = t^2 - (a+c)t + (ac - b^2)$. Das ist ein quadratisches Polynom mit der Diskriminante

$$\mathcal{D} = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + 4b^2 = a^2 - 2ac + c^2 + 4b^2 = \underbrace{(a-c)^2}_{\geq 0} + \underbrace{4b^2}_{\geq 0} \geq 0$$

Dann hat das Polynom mind. eine Nullstelle und die Matrix somit mind. einen Eigenwert.





Jetzt sei die Dimension gleich 3. Dann hat das Polynom den Grad 3. Jedes Polynom vom Grad 3 hat eine Nulsstelle (siehe Bild) Daher hat jede (nicht nur symmetrische oder orthogonale) 3×3 Matrix einen Eigenwert.

Beweis von Satz 39: Nach HA 2 gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$, mit $Av = \lambda_1 v$. OBdA ist $|v| = 1$, sonst $v \overset{\text{Ersetze}}{\to} \frac{v}{|v|}$. Wir betrachten eine orthogonale Matrix O, sodass $Oe_1 = v$.
(Existenz — Satz 35: Man kann eine orthonormierte Basis $o_1, ..., o_n$ finden sodass $o_1 = v$. Die Matrix O sodass $Oe_i = o_i$ (also s.d. die $i-$te Spalte o_i ist) für jedes i, ist orthogonal.)
Dann ist $O^{-1}AOe_1 = O^{-1}Av = \lambda_1 O^{-1}v = \lambda_1 e_1$, also
$O^{-1}AO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ & A_{n-1} \end{pmatrix} \overset{\text{HA 1}}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix}$, wobei A_{n-1} eine symmetrische Matrix ist.
Wir wiederholen die Prozedur: Es gibt ein reellen Eigenvektor v von A_{n-1} und deswegen eine orthogonale $(n-1) \times (n-1)$-Matrix O_{n-1}, sodass $O_{n-1}^{-1} A_{n-1} O_{n-1} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & \\ & A_{n-2} \end{pmatrix}$, wobei A_{n-2} symmetrisch ist. Dann gilt $\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & A_{n-2} \end{pmatrix}$, also
$\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1}^{-1} \end{pmatrix} O^{-1}AO \begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & A_{n-2} \end{pmatrix}$, u.s.w. (Da O_{n-1} orthogonal ist, sind $\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1}^{-1} \end{pmatrix}$ auch orthogonal, und deswegen auch $\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix} O$, $\left(\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix} O \right)^{-1}$. Nach $n-1$ Schritten bekommen wir die Aussage. $\square$

Wiederholung – Satz 39 *Ist A symmetrisch, so gibt es eine orthogonale Matrix O, sodass $O^{-1}AO$ diagonal ist.*

Folgerung *Ist A symmetrisch, so gibt es eine Matrix $B \in Mat(n,n)$ mit* $\det(B) \neq 0$, *sodass B^tAB die Form*

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

hat, wobei auf der Diagonale r mal „+1“ und s mal „-1“ steht.

Beweis der Folgerung. Nach Satz 39 gibt es eine orthogonale Matrix O sodass $O^{-1}AO \overset{\text{Weil } O^{-1}=O^t}{=} O^tAO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ist. OBdA können wir annehmen, dass $\lambda_1, ..., \lambda_r$ positiv und $\lambda_r, ..., \lambda_{r+s}$ negativ sind, und dass $\lambda_{r+s+1} = ... = \lambda_n = 0$: Wir zeigen, dass wir λ_i und λ_j vertauschen, wenn wir O durch ein geeignetes (orthogonales) O' ersetzen.

Tatsächlich, die Matrix $O' := OE_{ij}$ ist auch eine Orthogonalmatrix, weil

$$(OE_{ij})^tOE_{ij} = E_{ij}\underbrace{O^tO}_{Id}E_{ij} \overset{\text{Weil } (E_{ij})^2 = Id}{=} Id.$$

Dann ist $(O')^{-1}AO' \overset{\text{Weil } (O')^{-1}=(O')^t}{=} (O')^tAO' = (E_{ij})^tO^tAOE_{ij} =$

$$E_{ij}\begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \lambda_i & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_j & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}E_{ij} \overset{\text{Ausrechnen}}{=} \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \lambda_j & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_i & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Beispiel für „Ausrechnen“: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & \\ & \lambda_1 \end{pmatrix}$

Also ist $O^tAO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & & \\ & & & \lambda_{r+1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_{r+s} & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} := \Lambda,$

wobei $\lambda_1, ..., \lambda_r$ positiv und $\lambda_{r+1}, ..., \lambda_{r+s}$ negativ sind.
Wir „normieren“ alle λ_i: für die Matrix

$N := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} & & & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{r+1}}} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{r+s}}} & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \in$

$Mat(n, n)$ mit $\det \neq 0$
gilt $\underbrace{N^tO^t}_{T^t} A \underbrace{ON}_{T} = N^t\Lambda N = (*)$ □

Bemerkung $T = ON$ ist nichtausgeartet, da O und N nichtausgeartet sind.

Zusammenfassung

Ziel war (Volesung 15): Symmetrische Bilinearformen untersuchen.
Methode: Suchen einer Basis sodass die Matrix „einfach“ ist.
Methode umformuliert: In welche „einfachste“ Form kann man eine symmetrische Matrix A mit Hilfe der Transformation $A \mapsto T^t A T$, wobei T nichtausgeartet ist, bringen?

Satz 39 / Folgerung geben die Antwort: Man kann die Matrix A in die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

bringen, wobei auf der Diagonale r mal „+1“ und s mal „-1“ steht.
Frage: Kann man das noch besser machen?
Antwort – Nein – Trägheitssatz von Silvester

Trägheitssatz von Silvester

Satz 40 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einer symmetrischen Bilinearform σ und sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis von V, sodass in dieser Basis die Matrix von σ wie folgt ist:*
$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & \ddots &&&&&& \\ && 1 &&&&& \\ &&& -1 &&&& \\ &&&& \ddots &&& \\ &&&&& -1 && \\ &&&&&& 0 & \\ &&&&&&& \ddots \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix},$$
wobei auf der Diagonale r mal „+1“ und s mal „-1“ steht. Dann sind die Zahlen r und s eindeutig durch die Bilinearform σ festgelegt. Insbesondere gilt:

$$r = max\{dim(W) \text{ s.d. } W \subset V \text{ Untervektorraum mit } \sigma(w,w) > 0 \text{ für alle } w \in W,\ w \neq 0 \text{ ist}\}, \quad (*)$$
$$s = max\{dim(W) \text{ s.d. } W \subset V \text{ Untervektorraum mit } \sigma(w,w) < 0 \text{ für alle } w \in W,\ w \neq 0 \text{ ist}\}. \quad (**)$$

Beweis. Wir betrachten $V_+ = span(\{b_1, ..., b_r\})$. Für jedes $v \in V_+$, $v \neq \vec{0}$, mit den Koordinaten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ ist

$\sigma(v, v) = x^t Id x = x_1^2 + ... + x_r^2 > 0$. Also,

$max\{dim(W)$ s.d. $W \subset V$ Untervektorraum mit $\sigma(w, w) > 0$ für alle $w \in W$, $w \neq \vec{0}$ ist$\} \geq r$.

Angenommen es gibt ein W, s.d. $dim(W) = r' > r$ und s.d. für alle $v \in W$, $v \neq \vec{0}$, $\sigma(v, v) > 0$ ist (Widerspruchbeweis). Wir betrachten die Basis $(b'_1, ..., b'_{r'})$ in W und die Vereinigung $\{b'_1, ..., b'_{r'}, b_{r+1}, ..., b_n\}$. Diese Menge hat mehr als $n = dim(V)$ Elemente und ist deswegen linear abhängig. Dann gibt es $(\lambda'_1, ..., \lambda'_{r'}, \lambda_{r+1}, ..., \lambda_n) \neq (0, ..., 0)$ sodass $\lambda'_1 b'_1 + ... + \lambda'_{r'} b'_{r'} + \lambda_{r+1} b_{r+1} + ... + \lambda_n b_n = \vec{0}$. Dann ist

$$\underbrace{-\lambda'_1 b'_1 - ... - \lambda'_{r'} b'_{r'}}_{w \in W} = \underbrace{\lambda_{r+1} b_{r+1} + ... + \lambda_n b_n}_{v}.$$

Ist $w \neq \vec{0}$, so ist $\sigma(w, w) > 0$. Für v gilt:

$$\sigma(v, v) = (\lambda_{r+1} \cdots \lambda_n) \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{r+1} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = -\lambda_{r+1}^2 - ... - \lambda_{r+s}^2 \leq 0.$$

Also $\sigma(w, w) > \sigma(v, v)$. Da $w = v$, bekommen wir einen Widerspruch. Also ist die Zahl r eindeutig durch $(*)$ bestimmt. Analog ist s eindeutig durch $(**)$ bestimmt. $\square$

Erklärung von Satz 40 anhand eines Beispiels

Im $\mathbb{R}^2$ mit dem Standard-Skalarprodukt betrachten wir die Bilinearform σ_A für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Da die Matrix A symmetrisch ist, ist σ_A nach Lemma 29 auch symmetrisch.

Dann gibt es nach Satz 40 eine Basis, sodass in dieser Basis die Bilinearform σ_A eine der folgenden Formen hat:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Probieren wir alle Möglichkeiten aus.

Könnte σ_A z. B. die Matrix $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ in einer Basis haben? Nein, weil die Form mit der Matrix $\mathbf{0}$ die Eigenschaft $\sigma(x, x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ hat. Die Bilinearform σ_A hat diese Eigenschaft nicht, weil

$$\sigma_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0.$$

Kann die Bilinearform die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in einer anderen Basis haben?
Nein, denn sonst wäre die Bilinearform positiv definit. Aber die Bilinearform σ_A ist nicht positiv definit:
$\sigma_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = (1\ \ 0)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \not> 0.$
(Die Dimension des Raumes V_+ ist $\neq 2$, sie ist also ≤ 1).
Analog zeigt man, dass die Bilinearform die Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ in keiner Basis haben kann.
Die Dimension von V_+ bzw. V_- ist aber ≥ 1. In der Tat gibt es Vektoren x, sodass $\sigma_A(x,x) > 0$ und $\sigma_A(x,x) < 0$:
$\sigma_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = (1\ \ 1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 > 0$ (also $\dim(V_+) \geq 1$) und
$\sigma_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = (1\ \ \text{-}1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 < 0$ (also $\dim(V_+) \leq 1$).
Also ist in irgendeiner Basis die Gramsche Matrix von σ_A gleich
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Bemerkung. Wir haben gesehen, dass in der Matrix einmal $+1$ stehen muß (weil sonst $\sigma_A(x,x) \leq 0$ wäre, was nicht der Fall ist) und einmal -1 (weil sonst $\sigma_A(x,x) \geq 0$ wäre, was nicht der Fall ist). Also bleibt keine weitere Möglichkeit für die „beste“ Form der Gramschen Matrix.

Rechnen Sie bitte selbst:

Bestimmen Sie die „beste“ Form der Matrix von σ_A mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Antwort: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **.**

Mögliche Lösung: Wir haben $\sigma_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = (\mathrm{x} \ \ \mathrm{y})\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\mathrm{x+y} \ \ \mathrm{x+y})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 \geq 0.$

Also $\sigma_A(x, x) \geq 0$. Folglich kann die „beste“ Form keine -1 enthalten.

Die „beste“ Form von σ_A muss mind. einmal $\vec{0}$ enthalten, weil es Vektoren $v \neq 0$ gibt, sodass $\sigma_A(v, v) = 0$, z.B. $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Also gibt es nur die Möglichkeit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ für die „beste“ form der Gramschen Matrix.

Signatur der symmetrischen Bilinearform

Nach Satz 39 kann man die Matrix einer Bilinearform mittels Basiswahl auf die Form $\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$ bringen, wobei auf der Diagonale r mal „$+1$“ und s mal „-1“ steht.

Nach Satz 40 sind die Zahlen r, s eindeutig bestimmt. Das Tripel $(r, s, n-r-s)$ heißt die Signatur der Bilinearform σ.

Seien $A \in Mat(n, n)$ eine symmetrische Matrix und $\lambda_1, ..., \lambda_m$ paarweise verschiedene Eigenwerte. OBdA seien $\lambda_1, ..., \lambda_{r'}$ positiv und $\lambda_{r'+1}, ..., \lambda_{r'+s'}$ negativ.

Abschied

- Voraussichtlich habe ich im SS 23 ein Forschungsfreisemester; voraussichtlich Herr Dr habil Florin Belgun wird mich vertreten. Ich gebe ihm meine Vorlesungsfolien (und die entsprechenden Hausaufgaben). Für die Übungen wird wieder Herr Quaschner zuständig.
- Ich bin für die Vorlesung Geometrie für Lehramt, Pflicht in i.d.R. 7. Semester, zuständig; also sehen wir uns in ein paar Jahren.
- Geometrie-Gruppe bietet die folgenden für die Lehramtstudierenden interessanten Pflicht- und Wahlpflicht-Lehrveranstaltungen an:
  - Elementare Differentialgeometrie
  - Metrische Geometrie
  - Konvexe Geometrie (Prof. Dr. Wannerer)
  - Mathematische Methoden der klassischen Mechanik.
  - Seminar (Seminar 1, Seminar 2) Geometrie.
- Wir freuen uns immer, wenn Studierende bei mir eine Abschlussarbeit schreiben

Viel Erfolg!