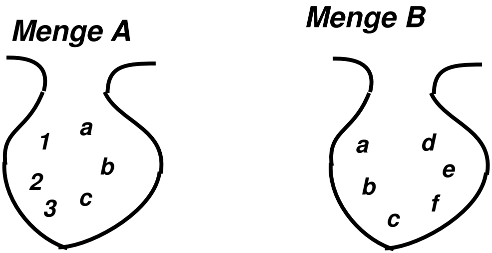
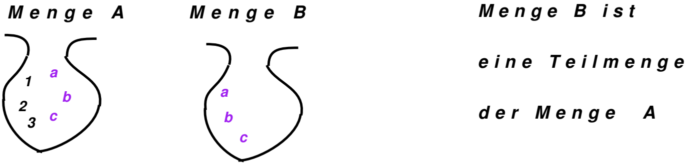
Exkurs in die Mengenlehre: Grundbegriffe

Der Begriff „Menge“ wird nicht formal definiert. Die intuitive Vorstellung: ein Sack, der gewisse Dinge enthält. Diese Dinge heißen Elemente. Deren Eigenschaft: die Elemente sind verschieden.



Bsp: Die Menge der Wochentage, an denen diese Vorlesung stattfindet ist $\{Mittwoch, Freitag\}$.
Bsp: Die Menge der natürlichen Zahlen ist $\{1, 2, 3, 4, ...\}$ und wird $\mathbb{N}$ bezeichnet. Die Menge der ganzen Zahlen wird $\mathbb{Z}$ bezeichnet.
Reihenfolge spielt keine Rolle:
$\{Montag, Dienstag\} = \{Dienstag, Montag\}$.

Bsp: Die Menge von reellen Zahlen wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.
Bsp: Die Menge, die keine Elemente enthält, heißt leere Menge und wird mit $\varnothing$ bezeichnet.
Sei A eine Menge. Liegt ein Element a in A, so schreiben wir $a \in A$ bzw. $A \ni a$.
Bsp: $1 \in \mathbb{N}$, $1/2 \notin \mathbb{N}$, $1/2 \in \mathbb{R}$.
Seien A, B Mengen. Falls jedes Element von B in A liegt, sagen wir, dass B eine Teilmenge (oder Untermenge) von A ist, und schreiben $A \supseteq B$ oder $B \subseteq A$.



Ist gleichzeitig $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$, so sind die Mengen gleich: $A = B$.
Bsp: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, $\{1\} \subseteq \mathbb{N}$, für jede Menge A gilt $A \supseteq \varnothing$.
Bemerkung. Wenn $A \subseteq B$ ist, aber $A \neq B$ ist, schreibt man oft $A \subset B$. Ich werde diese Bezeichnung zuerst meiden.

Zur Sprache der Mathematik: Abkürzende logische Symbole

Übliche Sprache + Fachausdrücke + mathematische Symbole
$A \Longrightarrow B$ bedeutet „aus Aussage A folgt Aussage B“.
Bsp: $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow x^2 \geq 0$.
Andere sprachliche Formen: „A impliziert B“ oder „A ist hinreichend für B“ oder „B ist notwendig für A“
$A \Longleftrightarrow B$ bedeutet $A \Longrightarrow B$ und $B \Longrightarrow A$.
Andere sprachliche Formen: „A und B sind äquivalent“ oder “A gilt genau dann, wenn B gilt“.
$\exists$ steht für „Es existiert (mindestens) ein ...“
Bsp: „$\exists x \in \mathbb{R}$: $x^2 = 2$ steht für „Es existiert ein $x \in \mathbb{R}$, so daß $x^2 = 2$ gilt“ (nämlich $x = \sqrt{2}$ oder $x = -\sqrt{2}$).
$\forall$ steht für „Für alle ...“
Bsp: $\forall x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geq 0$ steht für “Für alle reellen Zahlen x gilt: $x^2 \geq 0$“.

„oder“ ist nicht ausschließend (im Gegensatz zu „entweder ... oder“).
Bsp: Die Aussage „Es gilt $1 + 1 = 2$ oder es gilt $1 - 1 = 0$ oder es gilt $1 + 1 = 0$ “ ist wahr.
Statt „oder“ werden wir auch das Zeichen $\vee$ benutzen:
Die Aussage $1 + 1 = 2 \ \vee \ 1 - 1 = 0 \ \vee \ 1 + 1 = 0$ ist wahr.

Satz 1/Folgerung 1 in der neuen Sprache

Def. 1 Lösungsmenge eines System (S) ist die Menge aller Lösungen.
Vergleichen Sie:
Satz 1 *Ist* $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ *eine Lösung des Systems* (S)*, so ist* $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ *eine Lösung der Systeme* $(S1)$, $(S2)$ *und* $(S3)$.
Folgerung 1 *Ist* $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ *eine Lösung eines der Systeme* $(S1)$, $(S2)$ *oder* $(S3)$*, so ist* $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ *auch eine Lösung des Systems* (S) *(und deswegen nach Satz 1 auch der Systeme (S1), (S2), und (S3)).*

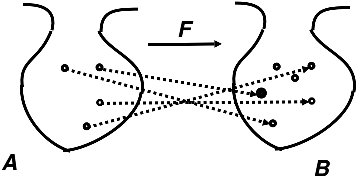
UND

Satz 1' *Die Lösungemengen der Systeme (S), (S1), (S2), (S3) sind gleich.*

Bsp –Def: Seien A, B zwei Mengen. Das Produkt von Mengen A, B (bezeichnet $A \times B$) ist die Mengen aller geordneten Paare (a, b), wobei $a \in A$, $b \in B$ ist. z.B. Ist $A = \{1, 2\}$, $B = \{+, -\}$ so ist $A \times B = \big\{(1, +), (1, -), (2, +), (2, -)\big\}$.
Bemerkung: Man kann Produkt iterieren: $A \times B \times C$ ist die Menge aller geordneten Tripel (a, b, c), wobei $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ ist, usw.
Frage: Was ist $\varnothing \times A$?
Antwort: $\varnothing \times A = \varnothing$.
Bsp: Sei A eine Menge. Die Menge aller Teilmengen von A wird 2^A bezeichnet.
Bsp: Sei $A = \{1, 2\}$. Dann ist $2^A = \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\big\}$.
Sei $A = \{1, 2, 3\}$. Dann ist
$2^A = \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{1, 2, 3\}\big\}$.

Abbildungen

Seien A, B zwei Mengen.
Intuitive Vorstellung: Eine Abbildung von A nach B ist eine Regel, die jedem Element der Menge A genau ein Element der Menge B zuweist.



Bezeichnung:
$F : A \to B$.

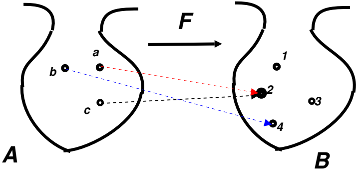
Bsp: Ein Polynom (z.B. $P(x) = x^2 + 3x + 13$) ist eine Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$: $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $C(x) = C$ ist eine (konstante) Abbildung,

$F : [-1, 1] \to [-1, 1]$, $F(x) := x + 1$ ist KEINE Abbildung, weil $F(1)$ nicht auf $[1, -1]$ liegt.

$F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $F(x) := x + 1$ ist doch eine Abbildung.

Mathematisch sauberere Definition: Eine Abbildung ist einer Teilmenge $R \subseteq A \times B$,
so dass es zu jedem Element a von A genau ein Element b von B gibt (geschrieben $F(a)$), so dass das Paar (a, b) Element von R ist.
Für die Abbildung



ist $R = \{(a, 2), (b, 4), (c, 2)\}$.

Bsp: Ein Polynom (z.B. $P(x) = x^2 + 3x + 13$), betrachtet als eine Abbildung, ist dann $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, gegeben durch $R = \{(x, x^2 + 3x + 13) \mid \text{wobei } x \in \mathbb{R}\}$. Z.B. ist $(1, \underbrace{1^2 + 3 + 13}_{17}) \in R$,

$(0, 13) \in R$; aber $(2, 0) \notin R$, weil $2^2 + 3 \cdot 2 + 13 \neq 0$.

Die konstante Abbildung $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $C(x) = C$ ist gegeben durch $R = \{(x, C) \mid \text{wobei } x \in \mathbb{R}\}$.

Arithmetische Operationen als Abbildungen

Man kann sie als Abbildungen darstellen, z.B. Addition
$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $+(a, b) := a + b$

In der Sprache von Teilmengen sieht das entsprechende R so aus:

$$R = \{(\underbrace{(a, b)}_{\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}}, a + b) \mid \text{wobei } a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq (\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}_{A}) \times \underbrace{\mathbb{R}}_{B}.$$

(z.B. $((1, -2), -1) \in R$), weil $1 + (-2) = -1$.

Neues (nichtriviales) Thema: Vektorräume

Logic des Abschnitts: „synthetische Aufbau“

- Definition
- Einige Eigenschaften und eine grosse Familie von Beispiele ($\mathbb{R}^n$)
- Eine Aussage, dass alle Vektorräumen die Vektorräumen aus der Familie von Beispiele „sind“

Hauptdefinition der Vorlesung: Eine Menge V
mit einer Abbildung $+ : V \times V \to V$
(genannt: Addition, statt $+(v_1, v_2)$ werden wir $v_1 + v_2$ schreiben)
und einer Abbildung $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$
(genannt: Multiplikation, statt $\cdot(\lambda, v)$ werden wir λv oder $\lambda \cdot v$ schreiben)
heißt ein Vektorraum, falls die folgende Eigenschaften erfüllt sind.

- I Für alle $u, v, w \in V$ gilt $(u + v) + w = u + (v + w)$
- II Für alle $u, v \in V$ gilt $u + v = v + u$
- III Es existiert ein $\vec{0} \in V$, so dass für alle $v \in V$ gilt $\vec{0} + v = v$
- IV Für jedes $v \in V$ es existiert ein $-v \in V$, so dass gilt $-v + v = \vec{0}$
- V Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $v \in V$ gilt $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
- VI Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $v \in V$ gilt $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
- VII Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $u, v \in V$ gilt $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
- VIII Für alle v gilt $1 \cdot v = v$

Vektorraum $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

Wir haben die Definition eines Vektorraums gegeben.
Vielleicht existiert kein Vektorraum? Vielleicht widersprechen die Eigenschaften I — VIII einander? Das nächste Ziel ist, einen Vektorraum zu konstruieren.
Um ein Vektorraum zu konstruieren, sollen wir:
• Die Menge V angeben: In unserem Bsp. ist $V := \mathbb{R} \times \mathbb{R} =: \mathbb{R}^2$. Aus kosmetischen Gründen werden die Elemente von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ senkrecht geschrieben:
$\mathbb{R} \times \mathbb{R} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$.
• Die Operationen „$+$" und "$\cdot$" angeben
und sicherheitshalber prüfen, dass die Operationen „$+$" und „$\cdot$" tatsächlich Abbildungen sind (Jargon: „wohldefiniert sind")
In unserem Fall bedeutet das, dass wir prüfen sollen, ob
$\forall v, u \in V$ und $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $v + u \in V$, $\lambda v \in V$.

Wir definieren Addition:

Angenommen $u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Dann setze
$u + v = \begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.
Das ist eine Abbildung von $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$.
Bsp. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Eigenschaften der Addition

I. Addition von Vektoren ist assoziativ

Z.z.: Für alle u, v, w gilt $(u + v) + w = u + (v + w)$.

Tatsächlich,

$$\left(\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_u + x_v) + x_w \\ (y_u + y_v) + y_w \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x_u + x_v) + x_w \\ (y_u + y_v) + y_w \end{pmatrix} =$$

$$\left[\begin{array}{c} \text{Die } x_u,\ x_v,\ \ldots \text{ sind übliche reelle Zahlen} \\ \text{und die Addition ist die übliche Addition in } \mathbb{R} \end{array}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} x_u + x_v + x_w \\ y_u + y_v + y_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u + (x_v + x_w) \\ y_u + (y_v + y_w) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \end{pmatrix}\right)$$

Eigenschaften von Addition

II. Addition von Vektoren ist kommutativ: $u + v = v + u$.

Tatsächlich, $\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \end{pmatrix} =$

$$\left[\begin{array}{c} \text{Die } x_u,\ x_v,\ \ldots \text{ sind übliche reelle Zahlen} \\ \text{und die Addition von } x_u \text{ und } x_v \text{ ist die übliche Addition in } \mathbb{R} \end{array} \right]$$

$= \begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_v + x_u \\ y_v + y_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$

III. Existenz eines neutralen Vektors:

Für den Vektor $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und für jeden Vektor v gilt:

$\vec{0} + v = v$, weil $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + x_v \\ 0 + y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$

IV. Existenz eines inversen Vektors:

Für den Vektor $v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$ ist die Summe dieses Vektors mit dem Vektor $-v := \begin{pmatrix} -x_v \\ -y_v \end{pmatrix}$ gleich $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Skalare und Vektoren Multiplizieren

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Skalar.
Sei $v \in \mathbb{R}^2$, $v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$.
Wir setzten $\lambda v = \lambda \cdot v := \begin{pmatrix} \lambda x_v \\ \lambda y_v \end{pmatrix}$.
Bsp. $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.
Multiplikation von Skalaren und Vektoren ist wohldefiniert (als Abbildung von $\mathbb{R} \times V$ nach V, weil $\begin{pmatrix} \lambda x_v \\ \lambda y_v \end{pmatrix} \in V = \mathbb{R}^2$ ist).

Frage an Euch

Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 25 \\ 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 21 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften der Multiplikation von Vektoren und Skalaren:

V: Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und für jeden Vektor $v \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gilt
$\lambda(\mu\, \vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$.
Tatsächlich, $\lambda(\mu\vec{v})$

$$= \lambda \left(\mu \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} \right) = \lambda \begin{pmatrix} \mu x_v \\ \mu y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(\mu x_v) \\ \lambda(\mu y_v) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\lambda\mu) x_v \\ (\lambda\mu) y_v \end{pmatrix} = (\lambda\mu) \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = (\lambda\mu)\vec{v}$$

Weitere Eigenschaften der Multiplikation von Vektoren und Skalaren:

VI: Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und für jeden Vektor $v \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gilt
$(\lambda + \mu)\, v = \lambda v + \mu v$.
Tatsächlich, $(\lambda + \mu) v =$

$$(\lambda + \mu) \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu) x_v \\ (\lambda + \mu) y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_v + \mu x_v \\ \lambda y_v + \mu y_v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda x_v \\ \lambda y_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu x_v \\ \mu y_v \end{pmatrix} = \lambda v + \mu v$$

Weitere Eigenschaften der Multiplikation von Vektoren und Skalaren:

VII: Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ und für alle Vektoren $u, v \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gilt
$\lambda\,(u+v) = \lambda u + \mu v.$
Tatsächlich, $\lambda(u+v)$=

$$\lambda\left(\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}\right) = \lambda\begin{pmatrix} x_u + x_v \\ x_u + y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_u + \lambda x_v \\ \lambda y_u + \lambda y_v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda x_u \\ \lambda y_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda x_v \\ \lambda y_v \end{pmatrix} = \lambda u + \lambda v$$

VIII: Für jeden Vektor v gilt $\quad 1\,v = v$

Tatsächlich, $1\,v = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,x_v \\ 1\,y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = v$

Alles zusammen

1. Wir haben die Operationen $+ : V \times V \to V$, wobei $V = \mathbb{R}^2$, und $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ definiert.
2. Wir haben geprüft, dass die Operationen wohldefiniert sind.
3. Wir haben die Eigenschaften I—VIII gezeigt.

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ist deswegen ein Vektorraum.

Buchempfelungen

- Fast jedes Lineare-Algebra Buch für Uni-Studenten der Mathe ist gut
- Aus der Lehrbibliothek
  - Definition des Vektorraums z.B. Serge Lang, „Lineare Algebra“
  - Lineare Abbildungen z.B. Kowalsky et al “Lineare Algebra„
  - Für vorgeschrittene Studenten Briscorn „Lineare Algebra“
- Einfachere Versionen:
  - Repetitorium der Linearen Algebra I, II (Detlef Wille , Michael Holz)
  - Lineare Algebra von A. Beutelspacher
  - Neues Buch: M. Scherfner, T. Volland, Lineare Algebra für das erste Semester
- Preiswerte Alternative: Vorlesungsskripten im Internet

MatheCafe und andere Angebote

- MatheCafe (und CS-Cafe für Informatik-Fragen)
  - Die beiden Lerncafés für Mathematik- und Informatikfragen haben schon ab der ersten Vorlesungswoche geöffnet (genauer ab Mittwoch).
  - Der Link mit allen Informationen, den Sie Ihren Studierenden dazu mitgeben können, ist dieser: `https://www.fmi.uni-jena.de/lerncafe`
- Klausurvorbereitungswochenende für Mathematik-Studierende (B.Sc. + LAG + LAR; nicht für Informatik)
  - Das Angebot wird in diesem Semester am Wochenende 6.-8. Januar stattfinden.
  - Eine Vor-Anmeldung ist nötig, alle weiteren Informationen wird man rechtzeitig vom FSR Mathematik erhalten.
- Leitfaden zum Bearbeiten von Übungsserien: Geschrieben von langjährigen studentischen Übungsleiterinnen und Übungsleitern, immer eine Lektüre wert `https://fsrmathe.fmi.uni-jena.de/dokumente/uebhi/uebhi_v1.pdf`
- Digitale Lotsen Es wird in diesem Semester auch Sprechstunden bzgl. sämtlicher technischer Fragen und Probleme geben. Allgemeine Informationen hier:`https://www.fmi.uni-jena.de/lotsen` Die Lotsen werden auch Sprechstunden anbieten, die im Lerncafe-Kalender