Wiederholung: Def. von Vektorraum

Hauptdefinition der Vorlesung: Eine Menge V
mit einer Abbildung $+ : V \times V \to V$
(genannt: Addition, statt $+(v_1, v_2)$ werden wir $v_1 + v_2$ schreiben)
und einer Abbildung $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$
(genannt: Multiplikation, statt $\cdot(\lambda, v)$ werden wir λv oder $\lambda \cdot v$ schreiben)
heißt ein Vektorraum, falls die folgende Eigenschaften erfüllt sind.

- I Für alle $u, v, w \in V$ gilt $(u + v) + w = u + (v + w)$
- II Für alle $u, v \in V$ gilt $u + v = v + u$
- III Es existiert ein $\vec{0} \in V$, so dass für alle $v \in V$ gilt $\vec{0} + v = v$
- IV Für jedes $v \in V$ es existiert ein $-v \in V$, so dass gilt $-v + v = \vec{0}$
- V Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $v \in V$ gilt $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
- VI Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $v \in V$ gilt $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
- VII Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $u, v \in V$ gilt $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
- VIII Für alle v gilt $1 \cdot v = v$

Einfachste Folgerungen aus der Definition

Sei V ein Vektorraum.

Kann V leer sein? Nein! Weil das der Eigenschaft III widerspricht:

III Es existiert ein $\vec{0} \in V$, so dass für alle $v \in V$ gilt $\vec{0} + v = v$

Kann V aus einem Element bestehen? Ja!

Beispiele von Vektorräumen: trivialer Vektorraum

Ein Vektorraum besteht aus einer Menge und zwei Operationen (Abbildungen $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$).

Um einen Vektorraum anzugeben, muss man

- eine Menge und die Operationen $+$ und $\cdot$ auf der Menge beschreiben (Wohldefinitheit nicht vergessen)
- und dann beweisen, dass die Eigenschaften I—VIII erfüllt sind.

Trivialer Vektorraum (besteht aus einem Punkt).

Ein trivialer Vektorraum bestehet aus einem Element $\vec{0}$ (also $V = \{\vec{0}\}$).
Die Operationen sind wie folgt:
Die Operation $+ : \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$. (Wohldefiniert!)
Die Operation $\cdot$: Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. (Wohldefiniert!)
Wir haben die Menge und die Operationen beschrieben.
Um zu beweisen, dass V ein Vektorraum ist, müssen wir zeigen, dass alle 8 Eigenschaften I— VIII erfüllt sind.

Eigenschaft I: Z.z.: $(u + v) + w = u + (v + w)$. Es gibt aber nur eine Möglichkeit für u, v, w, nähmlich $u = \vec{0}$, $v = \vec{0}$, $w = \vec{0}$. Also wir müssen zeigen, dass $\underbrace{(\vec{0} + \vec{0})}_{\vec{0}} + \vec{0} = \vec{0} = \vec{0} + (\vec{0} + \vec{0})$, was offensichtlich richtig ist.

II. $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{0}$ erfüllt usw.

Eine freiwillige Übung: Kann V aus 2 Elementen bestehen?

Lemma 1. *Es gibt genau einen Vektor $\vec{0}$ mit der Eigenschaft III.*

Beweis: Angenommen v hat die Eigenschaft III. Dann gilt
(a) $\vec{0} + v = \vec{0}$, weil für alle Vektoren u gilt $\vec{0} + u = u$, und
(b) $\vec{0} + v = v$, weil für alle Vektoren u gilt $u + v = v + u = u$.
Also $v = \vec{0}$. $\square$

Lemma 2. *Ist $u + v = v$, so ist $u = \vec{0}$*

Beweis: Betrachten wir die Gleichung $u + v = v$
und addieren den Vektor $-v$, der nach IV existiert, zu beiden Seiten.
Wir bekommen $-v + (u + v) = -v + v$.
Unter Benutzung von I und II bekommen wir $(-v + v) + u = \vec{0}$.
Dann ist $\vec{0} + u = \vec{0}$, also $u = \vec{0}$. $\square$

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In den Lemmas $3, 4, 5$ und später sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 3 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{R}^2$ ist das Lemma trivial: $0 \cdot \binom{x}{y} = \binom{0 \cdot x}{0 \cdot y} = \binom{0}{0} = \vec{0}$.

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$. Nach VI gilt $(0 + 0)v = 0v + 0v$. Also gilt $0v = 0v + 0v$. Addieren von $-0v$ ergibt $\vec{0} = 0v$. □

Lemma 4 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. **(In $\mathbb{R}^2$ ist das Lemma trivial)**

Beweis. $\lambda\vec{0} \overset{III}{=} \lambda(\vec{0} + \vec{0}) \overset{VII}{=} \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0}$. Addieren von $-\lambda\vec{0}$ ergibt $\vec{0} = \lambda\vec{0}$. □

Umkehrung der Lemmas 3,4.

Lemma 5 Ist $\lambda v = \vec{0}$, so ist $\lambda = 0$ oder $v = \vec{0}$.

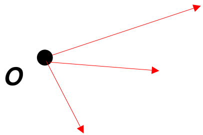
Beweis. Angenommen $\lambda \neq 0$. Z.z.: $v = \vec{0}$. Wir betrachten den Skalar $\frac{1}{\lambda}$.
Dann gilt: $\vec{0} \overset{\text{Lem. } 4}{=} \frac{1}{\lambda}\vec{0} = \frac{1}{\lambda}(\lambda v) \overset{V}{=} 1 \cdot v \overset{VIII}{=} v$. □

Lemma 6. Für jedes v gilt: $-1 \cdot v = -v$. (wobei $-v$ das inverse Element zu v in $(V, +, \cdot)$ ist)
In $\mathbb{R}^2$ ist das Lemma trivial: $-1 \cdot \binom{x_1}{x_2} = \binom{-1 \cdot x_1}{-1 \cdot x_2} = \binom{-x_1}{-x_2} = -\binom{x_1}{x_2}$.
Beweis. $-1 \cdot v + v \overset{VIII}{=} -1 \cdot v + 1 \cdot v \overset{VI}{=} (-1+1) \cdot v = 0 \cdot v \overset{\text{Lem. } 3}{=} \vec{0}$. $\square$

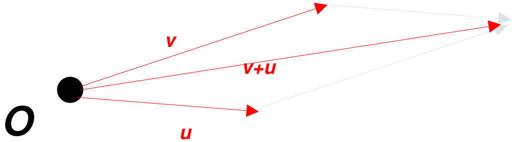
Lemma 7 Für jedes $v \in V$ s.d. $v \neq \vec{0}$ gilt:
ist $\lambda v = \mu v$, so ist $\lambda = \mu$.
Beweis. Wir addieren $(-\mu) \cdot v$ zu der beiden Seiten der Gleichung $\lambda v = \mu v$. Links bekommen wir $\lambda \cdot v + (-\mu) \cdot v = (\lambda - \mu)v$. Rechts bekommen wir $(-\mu + \mu)v = 0 \cdot v \overset{\text{Lem. } 3}{=} \vec{0}$. Also, $(\lambda - \mu)v = \vec{0}$. Nach Lemma 5 ist $\lambda - \mu = 0$, also $\lambda = \mu$, $\square$.

Geometrische Vektoren bilden einen Vektorraum

Sei O ein Punkt in der Ebene. (Geometrische) Vektoren (mit Anfangspunkt O) sind gerichtete Strecken mit Anfangspunkt O.

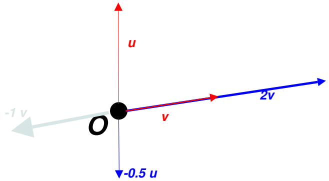


Begegnet sind Ihnen Vektoren in der Geometrie und in der Physik, wo z.B. Kraft, elektrische Feldstärke, Geschwindigkeit und Beschleunigung durch Vektoren beschrieben werden.



Addition von Vektoren:Parallelogrammregel.

Multiplikation $\cdot$ von Skalaren $\in \mathbb{R}$ und Vektoren: Streckungen/Stauchungen.



Axiome I – VIII : geometrische Überlegungen (die nicht offensichtlich sind und deswegen erst viel später gemacht werden).

Def. Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein Untervektorraum, falls $\forall u, v \in U$ und $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ die Elemente $v + u$ und λv auch in U liegen.

Umgangsprachlich: Falls $\forall u, v \in U$ und $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $v + u \in U$ und $\lambda v \in U$ sind, heißt die Teilmenge U abgeschlossen bezüglich „$+$" und „$\cdot$".

Triviale Beispiele: $\{\vec{0}\}$ und V sind Untervektorräume.

Bsp. Die Teilmenge $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ ist ein Untervektorraum (des $\mathbb{R}^2$).

Tatsächlich, für beliebige Elementen $u = \begin{pmatrix} x_u \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} x_v \\ 0 \end{pmatrix}$ (aus der Teilmenge) und für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$u + v = \begin{pmatrix} x_u \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u + x_v \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt auch in der Teilmenge,

$\lambda u = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_u \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt auch in der Teilmenge.