

Lemma 6 – verbesserte Version. Für jedes v gilt: Es gibt genau einen Vektor $-v$ (mit der Eigenschaft $-v + v = \vec{0}$), und zwar $-1 \cdot v = -v$.

Letztes Mal: wir haben bewiesen, dass $-1 \cdot v + v = \vec{0}$. Heute beweisen wir die Eindeutigkeit: Angenommen die Vektoren u, w

haben die Eigenschaft IV bzgl. des Vektors v ,

d.h. $u + v = \vec{0}$ und $w + v = \vec{0}$. Wir müssen zeigen, dass $u = w$. Nach Eigenschaft I gilt

$$w + (u + v) \stackrel{I}{=} (w + u) + v \tag{**}$$

Auf der linken Seite von (**) steht

$$w + (u + v) \stackrel{\text{Annahme}}{=} w + \vec{0} \stackrel{II}{=} \vec{0} + w \stackrel{III}{=} w.$$

Auf der rechten Seite, haben wir:

$$(w + u) + v \stackrel{II}{=} (u + w) + v \stackrel{I}{=} u + (w + v) = u + \vec{0} \stackrel{II}{=} \vec{0} + u = u.$$

Also, die linke Seite ist w und die rechte Seite ist u ; deswegen $u = w$.

Ein **Vektorraum** ist eine Menge V
mit einer Abbildung $+$: $V \times V \rightarrow V$
und einer Abbildung \cdot : $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$
s.d. bestimmte Eigenschaften (I – VIII) (siehe Vorl. 2) erfüllt sind.

Rechenregeln: (Lemma 3 – Lemma 7)

- ▶ $0v = \vec{0}$
- ▶ $\lambda\vec{0} = \vec{0}$
- ▶ Ist $\lambda v = \vec{0}$, so ist $\lambda = 0$ oder $v = \vec{0}$
- ▶ $-1 \cdot v = -v$ (wobei $-v$ das inverse Element zu v ist)
- ▶ Ist $\lambda v = \mu v$ für ein $v \neq \vec{0}$, so ist $\lambda = \mu$.

\mathbb{R}^n als Hauptbeispiel (letztes Mal: \mathbb{R}^2)

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ Stück}} := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$

Addition im \mathbb{R}^n (wie im \mathbb{R}^2): $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$

Bsp in \mathbb{R}^3 : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 \\ 2+5 \\ 3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}.$

Multiplikation \cdot von Elementen von \mathbb{R} und von \mathbb{R}^n (wie im \mathbb{R}^2):

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

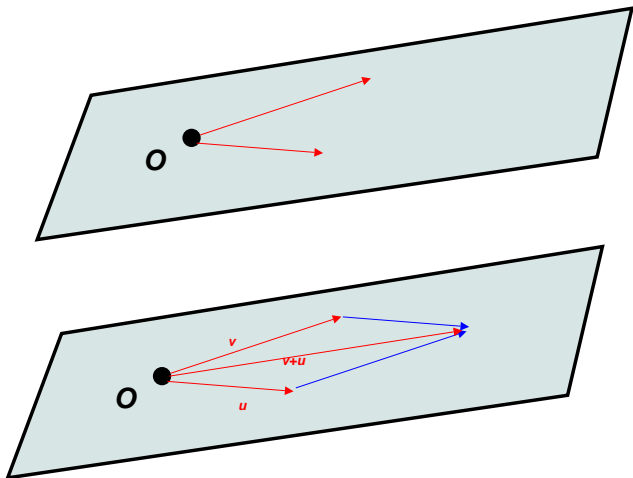
Bsp: $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix},$

Wie wir letztes Mal für $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ bewiesen haben, kann man beweisen, dass $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ein Vektorraum ist.

Def – Wiederholung. Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein **Untervektorraum**, falls $\forall u, v \in U$ und $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ die Elemente $v + u$ und λv auch in U liegen.

Geometrisches Beispiel eines Untervektorraums

O liege auf einer Ebene im 3-d-Raum. U bestehe aus Vektoren, deren Anfangspunkt O ist, und Endpunkt auch auf der Ebene liegt.



Die Menge U ist abgeschlossen bzgl. Addition und Multiplikation mit Skalaren $\in \mathbb{R}$.

Satz 3 Für die Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$, wobei $a_i \in \mathbb{R}$, ist die Lösungsmenge $L := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0 \right\}$ ein Untervektorraum des \mathbb{R}^n .

Beweis: Die Teilmenge $L \neq \emptyset$, weil $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in L$. In der Tat,

$$a_1 \cdot 0 + \dots + a_n \cdot 0 = 0.$$

Z.z.: Die Lösungsmenge ist abgeschlossen bzgl.

(i) Addition und (ii) Multiplikation.

(i) Seien $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in L$, d.h. $\begin{matrix} a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0 \\ a_1y_1 + \dots + a_ny_n = 0 \end{matrix}$. Dann ist

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_1y_1 + \dots + a_ny_n = 0 + 0 = 0, \text{ also}$$

$$a_1(x_1 + y_1) + \dots + a_n(x_n + y_n) = 0, \text{ also } \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \in L.$$

(ii) Analog.



Bemerkung. Es ist wichtig, dass auf der rechten Seite der Gleichung 0 steht: wenn dort etwas anderes steht (z.B., 1), ist die Lösungsmenge kein Untervektorraum. In der Tat, wenn $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in L$ sind, also wenn

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n &= 1 \\ a_1 y_1 + \cdots + a_n y_n &= 1 \end{aligned}$$

dann ist $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + a_1 y_1 + \cdots + a_n y_n = 1 + 1 = 2$, also

$$a_1(x_1 + y_1) + \cdots + a_n(x_n + y_n) = 2 \neq 1, \text{ also } \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \notin L.$$

Bemerkung: Den Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aus dem vorangegangenen Bsp.,

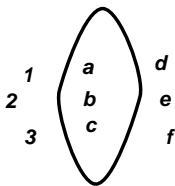
$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \right\},$$

kann man mit Hilfe von Satz 3 bekommen:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{0}_{a_1} \cdot x + \underbrace{1}_{a_2} \cdot y = 0 \right\}.$$

Exkurs in die Mengenlehre: Schnittmenge

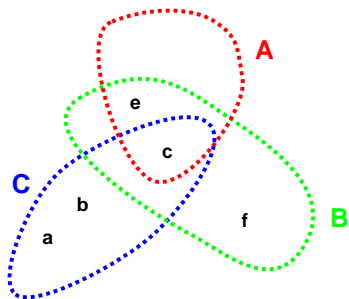
A, B seien Mengen. Der **Durchschnitt** von A und B (Bezeichnung: $A \cap B$) ist die Menge aller Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind: $A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$.



Schnittmenge

Schnittmenge von mehreren Mengen

Gegeben sei eine Menge \mathbb{M} von Mengen. Die **Schnittmenge** von \mathbb{M} ist die Menge $\bigcap_{M \in \mathbb{M}} M$ der Elemente, die in jedem Element von \mathbb{M} enthalten sind: $\bigcap_{M \in \mathbb{M}} M := \{x \mid \forall M \in \mathbb{M} \text{ gilt } x \in M.\}$



$A = \{e, c\}$ $B = \{e, c, f\}$ $C = \{a, b, c\}$ Falls $\mathbb{M} := \{A, B, C\}$
 $= \{\{e, c\}, \{e, c, f\}, \{a, b, c\}\}$, ist $\bigcap_{M \in \mathbb{M}} M = \{c\}$

Bsp. Wir betrachten $M_i \subseteq \mathbb{Z}$, $M_i := \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq i\}$. (Z.B. $M_1 = \mathbb{N}$),
und $\mathbb{M} := \{M_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt: $\bigcap_{M \in \mathbb{M}} M = \emptyset$.

Bemerkung. Man kann die Schnittmenge **oben** wie folgt schreiben:

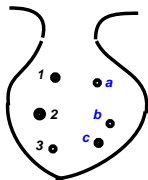
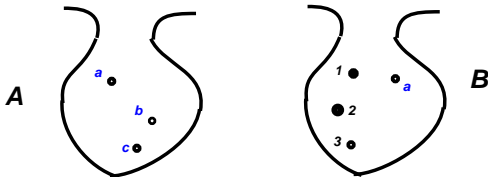
$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} M_i = \emptyset$$

Vereinigung von Mengen

A, B seien Mengen. Die **Vereinigung** von A und B (Bezeichnung: $A \cup B$) ist die Menge aller Elemente, die in A oder in B enthalten sind.

Bemerkung. „Oder“ ist mathematisch gemeint.

$$A \cup B := \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

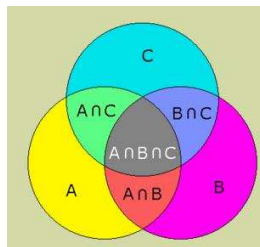
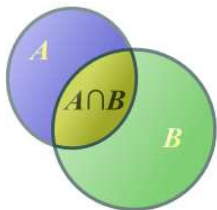
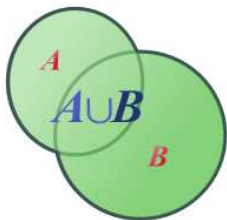


$A \cup B$

Analog kann man die Vereinigung von mehreren Mengen definieren:
Falls \mathbb{M} eine Menge von Mengen ist, dann ist

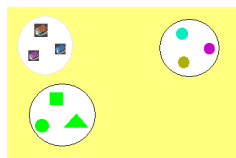
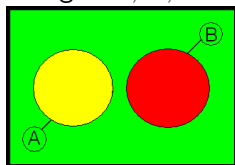
$$\bigcup_{M \in \mathbb{M}} M := \{x \mid \exists M \in \mathbb{M} \text{ sodass } x \in M\}.$$

Mengendiagramm: ein Hilfsmittel (es lohnt sich, eines zu zeichnen)



Disjunkte Mengen

Zwei Mengen A und B heißt **disjunkt**, wenn $A \cap B = \emptyset$. Die Definition kann man für mehrere Mengen verallgemeinern: Die Mengen A, B, C sind disjunkt, wenn $A \cap B = B \cap C = C \cap A = \emptyset$.



Satz 4 \mathbb{U} sei eine Menge von Untervektorräumen des Vektorraums $(V, +, \cdot)$. Dann ist die Schnittmenge

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch ein Untervektorraum.

Beweis. Z.z.: (für alle Vektoren u, v und Skalare λ gilt)

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \emptyset$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \Rightarrow u + v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \Rightarrow \lambda u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$ ist nicht leer, weil $\vec{0}$ in jedem Untervektorraum U liegt.

Tatsächlich, U enthält mind. ein Element (z.B. w), und deswegen auch das Element $0w \stackrel{\text{Lemma 3}}{=} \vec{0}$.

(b): Angenommen $u, v \in U \in \mathbb{U} \Rightarrow u + v \in U$ (Abgeschlossenheit von U bzg. „+“). Also liegt $u + v$ in jedem Element von \mathbb{U} , also $u + v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

(c): Angenommen $u \in U \in \mathbb{U}, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda u \in U$ (Abgeschlossenheit von U bzg. „ \cdot “). Also liegt λu in jedem Element von \mathbb{U} , also $\lambda u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$, □

Wir betrachten ein **homogenes lineares Gleichungssystem** mit m Gleichungen und n Unbekannten:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \quad (\text{Das Wort „homogen“}$$

bedeutet in diesem Kontext, dass die rechte Seite gleich **Null** ist). Sei L die Lösungsmenge davon, also

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \dots, m\} \ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0 \right\}.$$

Folgerung Die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems ist ein Untervektorraum.

Beweis. Für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ betrachten wir

$$L_i := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0 \right\}.$$

Dann ist $L = \bigcap_{i \in \{1, \dots, m\}} L_i$, weil ein $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ genau dann in L liegt, wenn es alle Gleichungen $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0$ erfüllt, also wenn es in allen L_i liegt.

Nach Satz 3 sind L_i Untervektorräume. Dann ist L auch Untervektorraum nach Satz 4. □

Einschränkung einer Abbildung

Sei $f : A \rightarrow B$, $A_1 \subseteq A$. f **eingeschränkt** auf A_1 (bez: $f|_{A_1}$) ist die Abbildung

$f : A_1 \rightarrow B$, $f|_{A_1}(x) := f(x) \quad (\forall x \in A_1)$.

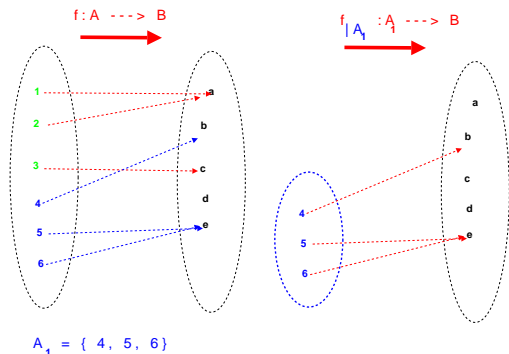


Abbildung: **Bsp:** $A_1 \subseteq A$ und $f|_{A_1} : A_1 \rightarrow B$

Einschränkung der Operationen $+$ und \cdot

Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum. Addition von Vektoren und Multiplikation von Skalaren und Vektoren sind auch Abbildungen (nach Def. des Vektorraums):

$$+ : V \times V \rightarrow V \quad \cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$$

Dann kann man für eine Teilmenge $U \subseteq V$ die Operationen auf U **einschränken** (weil die Operationen Abbildungen sind)

$+_U : U \times U \rightarrow V$ ist wie folgt definiert: $\forall u_1, u_2 \in U$ ist

$$u_1 +_U u_2 := u_1 + u_2 \in V.$$

$\cdot_U : \mathbb{R} \times U \rightarrow V$ ist wie folgt definiert: $\forall u \in U \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$\lambda \cdot_U u := \lambda u \in V.$$

Vorsicht: wenn U eine beliebige Teilmenge ist, könnte es sein, dass $u_1 + u_2 \notin U$, oder $\lambda \cdot u \notin U$.

Wir sagen, dass die Einschränkung von $+$ und \cdot auf $U \subseteq V$ **wohldefiniert** ist, falls $\forall u_1, u_2 \in U$ $u_1 +_U u_2 \in U$ ist und

$\forall u \in U \forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda \cdot_U u \in U$ ist.

Wenn die Einschränkung von $+$ und \cdot auf $U \subseteq V$ wohldefiniert ist, sind

$+_U$ und \cdot_U Operationen auf U :

$$+_U : U \times U \rightarrow U \quad \text{und} \quad \cdot_U : \mathbb{R} \times U \rightarrow U.$$

Ein Untervektorraum eines Vektorraums ist ein Vektorraum bzgl. induzierter Operationen

Satz 5. Sei U ein Untervektorraum eines Vektorraums $(V, +, \cdot)$. Dann ist $(U, +_U, \cdot_U)$ ein Vektorraum.

Beweis. Die Operationen $+_U$ und \cdot_U sind wohldefiniert nach Definition eines Untervektorraums, weil $(\forall u_1, u_2, u \in U \text{ und } \forall \lambda \in \mathbb{R})$ gilt $u_1 + u_1 \in U$; $\lambda u \in U$; also $+_U : U \times U \rightarrow U$ und $\cdot_U : \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ wie wir in der Definition eines Vektorraum verlangen.

Um zu zeigen, dass $(U, +_U, \cdot_U)$ ein Vektorraum ist, müssen wir die Eigenschaften I – VIII nachweisen.

Eigenschaft I: $\forall u_1, u_2, u_3 \in U$ gilt $(u_1 +_U u_2) +_U u_3 = u_1 +_U (u_2 +_U u_3)$

Beweis von I: Nach Definition von $+_U$ ist

$$(u_1 +_U u_2) +_U u_3 = (u_1 + u_2) + u_3 \text{ und}$$

$$u_1 +_U (u_2 +_U u_3) = u_1 + (u_2 + u_3); \text{ da } V \text{ ein Vektorraum ist, ist}$$

$$(u_1 + u_2) + u_3 = u_1 + (u_2 + u_3), \text{ deswegen}$$

$$(u_1 +_U u_2) +_U u_3 = u_1 +_U (u_2 +_U u_3).$$

Analog: **Beweis von II:** Für alle $u_1, u_2 \in V$ gilt $u_1 +_U u_2 = u_2 +_U u_1$ (die Operation $+$ auf V hat diese Eigenschaft, und die Operation $+_U$ fällt auf der Menge, auf der sie definiert ist, mit $+$ zusammen.)

Beweis von III: Es existiert ein $\vec{0} \in U$, so dass für alle $u \in U$ $\vec{0} + u = u$ gilt.

Der Vektor $\vec{0}$ hat die Eigenschaft $\vec{0} + u = u$, wir müssen deswegen nur beweisen, dass $\vec{0} \in U$ ist.

Nach Definition eines Untervektorraums ist $U \neq \emptyset$, also $\exists u \in U$. Wir betrachten $0 \cdot u$. Nach Definition eines Untervektorraums ist $0 \cdot u \in U$. Nach Lemma 3 ist $0 \cdot u = \vec{0}$. Also $\vec{0} \in U$.

Beweis von IV: Für jedes $u \in U$ existiert ein $-u \in U$, so dass gilt $-u + u = \vec{0}$.

Analog zum Beweis von III. Der Vektor $-1 \cdot u$ liegt in U , nach Definition eines Untervektorraums, und hat die Eigenschaft $-1 \cdot u + u = \vec{0}$ nach Lemma 6.

Beweis von V — VIII: ist Analog zum Beweis I, II: die Operationen $+$ und \cdot auf V haben die Eigenschaften V — VIII und die Operationen $+_U$, \cdot_U fallen auf der Menge, auf der sie definiert sind, mit $+$ und \cdot zusammen. Satz 5 ist bewiesen.

Die \sum -Bezeichnung für die Summe

In einem Vektorraum ist die Addition assoziativ und kommutativ (Eigenschaften I und II). Deswegen hängt das Ergebnis

$$((v_{13} + ((v_2 + v_{31}))) + \dots + ((v_{m-1} + v_{m-1}))) \quad (*)$$

weder von der Reihenfolge der Addition (also, von Klammern) noch von der Reihenfolge der Elemente (also von den Plätzen, wo sie stehen) ab.

Ab Jetzt werden wir die Klammern womöglich weglassen.

Bezeichnung: Statt der Summe von mehreren Elementen werden wir das Zeichen \sum verwenden:

z.B. $(*) = \sum_{i=1}^m v_i$

z.B. $\sum_{i=2}^4 A_i := A_2 + A_3 + A_4$

Linearkombinationen

Def. Es sei $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ und $v_1, \dots, v_k \in V$.

Die **Linearkombination** von v_1, \dots, v_k mit Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ist der Vektor

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i$$

Bsp: Die Linearkombination von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit Koeffizienten

$$-2, 1 \text{ ist } -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Def. Man sagt, dass ein Vektor v **eine Linearkombination** der Vektoren v_1, \dots, v_m ist, falls es $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ gibt so dass

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i = v$$

Bsp. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist **eine Linearkombination** von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Def. *A sei eine nichtleere Teilmenge des Vektorraums $(V, +, \cdot)$. Die **lineare Hülle** von A (Bezeichnung: $\text{span}(A)$) ist die Menge aller Linearkombinationen der Elemente aus A .*

$$\text{span}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i \quad : \quad \text{so dass } k \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ und } v_i \in A \right\}.$$

Bemerkung: Auch wenn die Menge A unendlich ist, besteht die lineare Hülle nur aus **endlichen Linearkombinationen**.

Wenn die Menge A endlich ist, z.B. $A = \{v_1, \dots, v_k\}$, kann man sich immer denken, dass alle Elemente in der Linearkombination anwesend sind, also:

$\text{span}(\{v_1, \dots, v_k\}) := \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i \quad : \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ und } v_i \in A \right\}$. In der Tat, die „fehlenden“ v_i kann man mit 0-Koeffizient $\lambda_i = 0$ addieren.

Einfaches Bsp in \mathbb{R}^3

$$\text{span} \left(\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix} : \text{wobei } x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Wie zeigt man dass zwei Mengen A und B , in unserem Fall

$$\mathbf{A} = \text{span} \left(\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right) \text{ und } \mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix} : \text{wobei } x, y \in \mathbb{R} \right\},$$

gleich sind?

Nach Definition (Vorl. 2) $A = B \iff (A \subseteq B \text{ und } B \subseteq A)$.

Wir zeigen $A \subseteq B$: Wir zeigen, dass jede Linearkombination von

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in B liegt, d.h., die Form $\begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ hat:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \in B.$$

Wir zeigen jetzt $B \subseteq A$: Jedes Element der Form $\begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ ist eine

Linearkombination der Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Def – Wiederholung. *A sei eine nichtleere Teilmenge des Vektorraums $(V, +, \cdot)$. Die **lineare Hülle** von A (Bezeichnung: $\text{span}(A)$) ist die Menge aller Linearkombinationen der Elemente aus A .*

$$\text{span}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i \quad : \quad \text{so dass } k \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ und } v_i \in A \right\}.$$

Satz 6 *A sei eine nichtleere Teilmenge des Vektorraums $(V, +, \cdot)$. Dann gilt*

- (a) *$\text{span}(A)$ ist ein Untervektorraum.*
- (b) *Enthält ein Untervektorraum U alle Elemente von A , so ist $\text{span}(A) \subseteq U$*

Folgerung A sei eine nichtleere Teilmenge des Vektorraums $(V, +, \cdot)$. Sei \mathbb{A} die Menge aller Untervektorräume, die A enthalten. Dann gilt: Die lineare Hülle von A ist die Schnittmenge aller Elementen von \mathbb{A} :

$$\text{span}(A) := \bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$$

Beweis der Folgerung (Wir nehmen an, dass Satz 6 richtig ist). Z.z.: (i) $\text{span}(A) \subseteq \bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$ und (ii) $\text{span}(A) \supseteq \bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$.

(i) folgt aus Satz 6(b): Da für jedes $U \in \mathbb{A}$ gilt $\text{span}(A) \subseteq U$, ist $\text{span}(A) \subseteq \bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$ (Die Schnittmenge $\bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$ besteht aus Elementen, die in allen Mengen U vorhanden sind, und alle Elemente von $\text{span}(A)$ liegen nach Satz 6(b) in allen $U \in \mathbb{A}$).

(ii) folgt aus Satz 6(a): $\text{span}(A)$ ist ein Untervektorraum, der offensichtlich alle Elementen aus A enthält (weil man den Vektor $a \in A$ als Linearkombination $1 \cdot a$ bekommen kann). Also $\text{span}(A) \in \mathbb{A}$. Dann ist $\text{span}(A) \supseteq \bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$ (weil $\bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$ aus Elementen besteht, die in allen Mengen $U \in \mathbb{A}$ vorhanden sind, und deswegen auch in $\text{span}(A)$). \square

Beweis für Satz 6(b)

Z.z.: Jede Linearkombination der Elemente aus A liegt in jedem Vektorraum $U \in \mathbb{A}$.

Betrachte eine Linearkombination, z.B. (wobei $\lambda_i \in \mathbb{R}$ und $v_i \in A$.)

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \dots + \lambda_m v_m.$$

$\lambda_1 v_1 \in U$ (Abgeschlossenheit des Vektorunterraums bzgl. „ \cdot “). Deswegen $\lambda_2 v_2 \in U$ (Abgeschlossenheit bzgl. „ \cdot “).

Deswegen $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in U$ (Abgeschlossenheit bzgl. „+“)

Analog gilt: $\lambda_3 v_3 \in U$, $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in U$ und deswegen $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \in U$.

Nach endlich viele solchen Überlegungen **liegt** $\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i$ **in** U

Beweis für Satz 6(a)

Z.z.:

$$\left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i \mid k \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ und } v_i \in A \right\} \supseteq \bigcap_{U \in \mathbb{A}} U.$$

Wir zeigen, dass die erste Menge selbst ein Untervektorraum von V ist.

Wir müssen zeigen, dass die Menge abgeschlossen bzgl.

(i) „+“ und (ii) „ \cdot “ ist.

(i): Seien u, v Linearkombinationen der Elemente aus A .

Also, für irgendwelche $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $v_i \in A$ ($i = 1, \dots, k$) gilt

$$v = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k$$

sowie für irgendwelche $m \in \mathbb{N}$ und $\mu_i \in \mathbb{R}$, $u_i \in A$ ($i = 1, \dots, m$) gilt

$$u = \sum_{i=1}^m \mu_i u_i = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_m u_m \quad \text{Dann ist die Summe}$$

$$v + u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k + \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_m u_m$$

eine Linearkombination der Elementen aus A . Also, liegt $u + v$ in der ersten Menge oben.

(ii): Analog. Ist $v = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$ und $\lambda \in \mathbb{R}^n$, so ist

$$\lambda \cdot v = \lambda(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k) = \underbrace{(\lambda \cdot \lambda_1)}_{\mu_1} \cdot v_1 + \dots + \underbrace{(\lambda \cdot \lambda_k)}_{\mu_k} v_k, \quad \square$$