Linear unabhängige Vektoren

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$ heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. *Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum, $A \subseteq V$ sei eine nichtleere Teilmenge. Man sagt, dass A linear unabhängig ist, falls das Null-Element $\vec{0}$ des Vektorraums nur als triviale Linearkombination der verschiedenen Elemente von A dargestellt werden kann.*
Man sagt dass A linear abhängig ist, wenn A nicht linear unabhängig ist, es also eine nichttriviale Linearkombination der verschiedenen Elemente von A gibt, die gleich $\vec{0}$ ist.
Bsp. $A = \{\vec{0}\}$ ist linear abhängig, da $1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

Bemerkung Das Wort „verschiedene" in der Definition ist wichtig, weil man sonst $\vec{0}$ als $\underbrace{-1}_{\lambda_1} \cdot v + \underbrace{1}_{\lambda_2} \cdot v$ bekommen kann.

Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig, da
$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nur für $\lambda = 0$.

Bsp: *Die einelementige Menge* $\{v\} \subseteq V$ *ist genau dann linaer unabhängig, wenn* $v \neq \vec{0}$.

Beweis. „$\Rightarrow$“: Ist $\{v\}$ linear unabhängig, so ist jede nichttriviale Linearkombination, z.B. $1v$, nicht $\vec{0}$. Aber $1v = v$. Also $v \neq \vec{0}$.
„$\Leftarrow$“: Ist $v \neq \vec{0}$, so ist nach Lemma 5 jede nichttriviale Linearkombination λv nicht $\vec{0}$. $\square$

Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ist linear unabhängig, weil jede Linearkombination

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

genau dann $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist, wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Bsp.

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$ ist linear abhängig, weil die Linearkombination

$$4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Wie entscheidet man, ob eine explizit gegebene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ linear unabhängig ist?

Zum Beispiel knallhart ausrechnen:
Angenommen, $n = 2$ und die Menge $A := \left\{ \binom{1}{2}, \binom{3}{4} \right\}$.
Nach Definition ist A linear abhängig, falls es λ_1 und λ_2 gibt, so dass $\lambda_1 \neq 0$ oder $\lambda_2 \neq 0$, und so, dass die Linearkombination
$\lambda_1 \cdot \binom{1}{2} + \lambda_2 \cdot \binom{3}{4} = \binom{0}{0}$ ist, also
$\binom{1 \cdot \lambda_1 + 3 \cdot \lambda_2}{2 \cdot \lambda_1 + 4 \cdot \lambda_2} = \binom{0}{0}$ ist.
Das ist ein lineares Gleichungssystem für λ_1 und λ_2:
$\begin{cases} 1 \cdot \lambda_1 + 3 \cdot \lambda_2 = 0 \\ 2 \cdot \lambda_1 + 4 \cdot \lambda_2 = 0 \end{cases}$. Man löst es z.B. mit dem Gauss-Verfahren.
Wenn es nur die triviale Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ gibt (was in unserem Bsp der Fall ist), ist die Menge A linear unabhängig. Wenn es nichttriviale Lösungen $\binom{\lambda_1}{\lambda_2} \neq \binom{0}{0}$ gibt, ist die Menge linear abhängig und jede Lösung $\binom{\lambda_1}{\lambda_2}$ liefert uns Koeffizienten der Linerakombination, die Null ergibt.

Bemerkung. Wir werden später sehen, dass eine Menge aus m Vektoren im $\mathbb{R}^n$ mit $n < m$ immer linear abhängig ist.