Definition der Basis

Def. Es sei $(V, +, \cdot)$ ein nichttrivialer Vektorraum. Die Menge $A \subseteq V$ heißt eine Basis-Menge, falls sie

(a) linear unabhängig ist und

(b) $\mathrm{span}(A) = V$.

Später werden wir auch über Basis-Tupel sprechen: ein Tupel $(v_1, ..., v_n)$ von Vektoren aus V heißt ein Basis-Tupel, wenn die Menge $A = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis-Menge ist, und $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$.
Wir werden oft das Wort „Menge“ bzw. „Tupel“ vergessen, also nur von Basen sprechen. Aus dem Kontext wird immer klar, ob wir von einem Tupel sprechen, also die Vektoren „nummeriert“ sind, oder für uns nur die Menge von Vektoren wichtig ist.

Bemerkung. Die Extra-Bedienung dass die Vektoren im Tupel verscheiden sind ist wichtig, sonst könnte das Tupel $(\underbrace{v}_{u_1}, \underbrace{v}_{u_2}, *, *, *)$ eine linear unabhängige Menge bilden, weil die entsprechende Menge A nur einmal v enthält. Die Linearkombination $1 \cdot u_1 - 1 \cdot u_2 + 0 \cdot (*) + 0 \cdot (*) + 0 \cdot (*)$ ist aber Null.

Def.

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein nichttrivialer Vektorraum. Die Menge $A \subseteq V$ heißt eine Basis-Menge, falls sie

(a) linear unabhängig ist und

(b) $\mathrm{span}(A) = V$.

Warum haben wir den trivialen Vektorraum $V := \{\vec{0}\}$ ausgeschlossen? Weil nach unserer Definition V keine Basis hat. Tatsächlich, V hat zwei Teilmengen: $\{\vec{0}\}$ und $\varnothing$.
$\{\vec{0}\}$ ist keine Basis, da sie linear abhänging ist: $1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$.
$\varnothing$ ist auch keine Basis, da span($\varnothing$) nicht definiert ist (in der Definition von span(A) haben wir verlangt, dass $A \neq \varnothing$). (Bemerke auch dass die Menge von linearen Kombinationen von $\varnothing$ auch $\varnothing$ ist).

Nach Definition (aus kosmetischen Grunden, die später klar werden) setzten wir die Basis des trivialen Vektorraums gleich $\varnothing$.

Bsp.

Ist die folgende Menge A eine Basis in $V = \mathbb{R}^3$?

A=$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen.

Eigenschaft (a) ist erfüllt: Jede Linearkombination der Elemente aus A ist gleich

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und ist ungleich $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, falls die Linearkombination nichttrivial ist, d.h. falls nicht alle λ_i gleich 0 sind.

Eigenschaft (b) ist nicht erfüllt: nicht alle Vektoren von $\mathbb{R}^3$ kann man als lineare Hülle darstellen.

Tatsächlich ist der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ keine Linearkombination der Vektoren aus A.

Antwort: Nein, A ist keine Basis.

Bsp. Ist die folgende Menge A eine Basis in $V = \mathbb{R}^3$?
$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen.
Eigenschaft (a) ist erfüllt: Jede Linearkombination der Elemente aus A ist gleich

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

und ist ungleich $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, falls die Linearkombination nichttrivial ist, d.h. falls nicht nicht alle λ_i gleich 0 sind.
Eigenschaft (b) ist auch erfüllt: Jedes Element von V hat die Form $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, wobei $x, y, z \in \mathbb{R}$, und ist deswegen eine Linearkombination von Elementen aus A:

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Antwort: Ja, A ist eine Basis.

Standard-Basis im $\mathbb{R}^n$

Bsp. vorher kann man auf beliebige $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern: Die Vektoren
$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \ e_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis (die sogenannte Standard-Basis) im $\mathbb{R}^n$.

Bsp. Ist die folgende Menge A eine Basis in $V = \mathbb{R}^3$?
$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen.
Eigenschaft (b) ist erfüllt: jedes Element von V hat die Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

wobei $x, y, z \in \mathbb{R}$, und ist deswegen eine Linearkombination von (sogar den ersten 3) Elementen aus A.

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Eigenschaft (a) ist nicht erfüllt (Bsp. vorher)

$$4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Wie kann man entscheiden, ob eine explizit gegebene Teilmenge $\{v_1, ..., v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Basis ist?

Man kann die Definition benutzen und die Aufgabe auf ein entsprechendes lineares Gleichungssystem zurückführen: Um die Eigenschaft (a) (= lineare Unabhängigkeit) zu prüfen, muss man das folgende homogene Gleichungssystem lösen:
$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k = \vec{0}$ (Die $\lambda_1, ..., \lambda_k$ sind die Unbekannten, die Einträge von v_i sind die Koeffizienten in der $i-$ten Spalte des Systems, die rechte Seite ist 0.)
Heute haben wir bereits das System für das Beispiel $k = n = 2$,
$A := \left\{ \binom{1}{2}, \binom{3}{4} \right\}$ konstruiert.
Falls es nur die triviale Lösung gibt, ist das System linear unabhängig.
Falls es noch andere Lösungen gibt, ist das System linear abhängig.

Die Eigenschaft (b) kann man auch auf lineare Gleichungssysteme zurückführen. Es genügt zu zeigen, dass man die

Standard-Basis-Vektoren $e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ..., $e_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ als

Linearkombinationen von $\{v_1, ..., v_k\}$ bekommen kann. In der Tat, wenn wir die Standard-Basis-Vektoren als Linearkombinationen von $v_1, ..., v_k$ erzeugen können, also wenn $e_1 = \lambda_1^1 v_1 + ... + \lambda_k^1 v_k$, ... , $e_n = \lambda_1^n v_1 + ... + \lambda_k^n v_k$ ist, dann ist ein beliebiger Vektor

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot e_1 + ... + x_n \cdot e_n = x_1(\lambda_1^1 v_1 + ... + \lambda_k^1 v_k) + ... + x_n(\lambda_1^n v_1 + ... + \lambda_k^n v_k)$$

$=$ [u.A. Distributiveigenschaft VII mehrmals angewendet] $=$

$\underbrace{(x_1\lambda_1^1 + ... + x_n\lambda_1^n)}_{\mu_1} v_1 + ... + \underbrace{(x_1\lambda_k^1 + ... + x_n\lambda_k^n)}_{\mu_k} v_k$, wie gewünscht.

Bsp. Angenommen, $k = n = 2$ und die Menge $A := \left\{ \binom{1}{2}, \binom{3}{4} \right\}$.
(a) haben wir heute gezeigt. Wir zeeigen jetzt (b).
Wir erzeugen $e_1 = \binom{1}{0}$ als $e_1 = \binom{1}{0} = -2 \cdot \binom{1}{2} + 1 \cdot \binom{3}{4}$ und $e_2 = \binom{0}{1} = \frac{3}{2} \cdot \binom{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \binom{3}{4}$ (ich habe die entsprechende Gleichungssysteme zu Hause gelöst). Also ist die Menge A eine Basis in $\mathbb{R}^2$. Ausserdem ist die Standard-Basis eine Basis in $\mathbb{R}^2$.

Bemerkung. Das Verfahren funktioniert, ist aber langweilig – man muss $n+1$ Gleichungssysteme lösen: ein homogenes $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k = 0$ um zu prüfen, ob die Menge linear unabhängig ist, und n inhomogene $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k = e_i$, $i = 1, ..., n$ um zu prüfen, ob wir alle Vektoren e_i erzeugen können. Man bemerke auch, dass die linken Seiten in den Gleichungssystemen gleich sind, also das Gauss-Verfahren für alle Systeme sehr ähnlich verlauft – Unterschiede gibt es nur auf der rechte Seite des Systems.

MAN ERWARTET DESWEGEN, DASS MAN DAS VERFAHREN VIEL EINFACHER MACHEN KANN. DIES IST TATSÄCHLICH DER FALL: ES GENÜGT, NUR EIN SYSTEM ZU LÖSEN. WIR WERDEN ES IN DEN NÄCHSTEN VORLESUNGEN ERKLÄREN UND BEWEISEN