Definition der Basis

Def. Es sei $(V, +, \cdot)$ ein nichttrivialer Vektorraum. Die Menge $A \subseteq V$ heißt eine Basis-Menge, falls sie

(a) linear unabhängig ist und

(b) $\mathrm{span}(A) = V$.

Satz 7. *A sei eine nichtleere Teilmenge des nichttrivialen Vektorraums* $(V, +, \cdot)$. *Dann sind die folgende Aussagen äquivalent.*

(a) *A ist eine Basis.*

(b) *Jedes $v \in V$ lass sich in eindeutiger Weise als eine Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A darstellen.*

(c) *A ist linear unabhängig und für jedes $v \in V$, $v \notin A$ ist die Vereinigungsmenge $A \cup \{v\}$ linear abhängig.*

Schema des Beweises: (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a)

(a) $\Rightarrow$ (b)

Sei A eine Basis. Z.z.:

(1) Jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination der Elemente aus A,

(2) die Darstellung von v als Linearkombination (von paarweise verschiedenen Elementen) ist eindeutig.

Die Aussage (1) folgt direkt aus der Definition einer Basis: $\mathrm{span(A)} \overset{\mathrm{Def.}}{=} V$, und deswegen ist jedes $v \in V$ eine Linearkombination der Vektoren aus A.

(a) $\Rightarrow$ (b)

Wir beweisen Aussage (2): Die Darstellung von v als Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A ist eindeutig.
Angenommen
$\sum_{i=1}^{k_1} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k_2} \mu_i u_i$, wobei v_i paarweise verschieden sind und u_i paarweise verschieden sind. OBdA (wird auf der nächsten Folie besprochen) können wir annehmen, dass $k_1 = k_2 (= k)$ und $v_i = u_i$, weil wir die fehlende Vektoren mit $0-$Koeffizient addieren können. Also

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i, \qquad (*)$$

wobei $v_i \in A$ paarweise verschieden sind.
Z.z.: Für jedes $i \in \{1, ..., k\}$ gilt $\lambda_i = \mu_i$.

Wir addieren $(-1)\sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i$ zu beiden Seiten der Gleichung $(*)$:

$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + (-1)\sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i = \vec{0}$.

Nach dem Distributivsgesetz (Eigenschaft VII) ist dann
$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \mu_i) v_i = \vec{0}$.

Da A eine Basis und deswegen eine linear unabhängige Menge ist, ist die Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \mu_i) v_i$ trivial, also $\lambda_i - \mu_i = 0$, also $\lambda_i = \mu_i$.
Also (a) $\Rightarrow$ (b).

Warum/wann können wir OBdA etwas annehmen?

"OBdA können wir annehmen, dass $k_1 = k_2$ und $v_i = u_i$" bedeutet: wenn wir die Aussage bewiesen haben unter der Annahme $k_1 = k_2$ und $v_i = u_i$, dann wird auch die ursprüngliche Aussage, ohne der Annahme $k_1 = k_2$ und $v_i = u_i$, bewiesen. Wir zeigen es.

Nehmen wir an, dass die Aussage "Aus $\sum_{i=1}^{k} \tilde{\lambda}_i \tilde{v}_i = \sum_{i=1}^{k} \tilde{\mu}_i \tilde{v}_i$ (für paarweise verschiedenen $\tilde{v}_i \in A$) folgt, dass alle $\tilde{\lambda}_i = \tilde{\mu}_i$" bereits bewiesen ist.

Wir betrachten die Mengen $\{v_1, ..., v_{k_1}\} \cap \{u_1, ..., u_{k_2}\}$ und $\{v_1, ..., v_{k_1}\} \cup \{u_1, ..., u_{k_2}\}$; die Menge $\{v_1, ..., v_{k_1}\} \cap \{u_1, ..., u_{k_2}\}$ habe m Elementen (offensichtlich, $k_1 \geq m$ und $k_2 \geq m$). Die Menge $\{v_1, ..., v_{k_1}\} \cup \{u_1, ..., u_{k_2}\}$ hat dann $k_1 + k_2 - m$ Elementen.

Wir nummerieren die Elementen v_i um sodass die Elemente $v_1, ..., v_m$ in $\{v_1, ..., v_{k_1}\} \cap \{u_1, ..., u_{k_2}\}$ liegen. Wie nummerieren die Elementen u_i um sodass die Elemente $u_1, ..., u_m$ mit Elementen $v_1, ..., v_m$ übereinstimmen; es ist möglich weil die Elemente $v_1, ..., v_m$ in $\{v_1, ..., v_{k_1}\} \cap \{u_1, ..., u_{k_2}\}$ und deswegen auch in $\{u_1, ..., u_{k_2}\}$ liegen. Ferner, betrachten wir die folgende Gleichung:

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m v_m + \lambda_{m+1} v_{m+1} + ... + \lambda_{k_1} v_{k_1} + \underbrace{0 \cdot u_{m+1} + ... + 0 \cdot u_{k_2}}_{\vec{0}}$$

$$= \mu_1 v_1 + ... + \mu_m v_m + \underbrace{0 \cdot v_{m+1} + ... + 0 \cdot v_{k_1}}_{\vec{0}} + \mu_{m+1} u_{m+1} + ... + \mu_{k_2} u_{k_2}.$$

Wir betrachten die folgende Gleichung:

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + \lambda_{m+1} v_{m+1} + \ldots + \lambda_{k_1} v_{k_1} + \underbrace{0 \cdot u_{m+1} + \ldots + 0 \cdot u_{k_2}}_{\vec{0}}$$

$$= \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_m v_m + \underbrace{0 \cdot v_{m+1} + \ldots + 0 \cdot v_{k_1}}_{\vec{0}} + \mu_{m+1} u_{m+1} + \ldots + \mu_{k_2} u_{k_2}.$$

Die Gleichung erfüllt die Bedingungen der grünen Aussage $\left(\sum_{i=1}^{k} \tilde{\lambda}_i \tilde{v}_i = \sum_{i=1}^{k} \tilde{\mu}_i \tilde{v}_i\right)$ oben; mit $k = k_1 + k_2 - m$, $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1, \ldots, \tilde{\lambda}_{k_1} = \lambda_{k_1}$, $\tilde{\lambda}_{k_1+1} = 0, \ldots, \tilde{\lambda}_{k_1+k_2-m} = 0$,
$\tilde{v}_1 = v_1, \ldots, \tilde{v}_{k_1} = v_{k_1}, \tilde{v}_{k+1} = u_{m+1}, \ldots, \tilde{v}_{k_1+k_2-m} = u_{k_2}$. Insbes., sind alle Vektoren $\tilde{v}_i$ verschiedene Elemente aus A.
Dann gilt: alle $\tilde{\lambda}_i = \tilde{\mu}_i$. Daraus folgt, dass $\lambda_1 = \mu_1, \ldots, \lambda_m = \mu_m$, $\lambda_{m+1} = \lambda_{m+2} = \ldots = \lambda_{k_1} = 0$, $\mu_{m+1} = \mu_{m+2} = \ldots = \mu_{k_2} = 0$. Also, in der Darstellungen $\sum_{i=1}^{k_1} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k_2} \mu_i u_i$ sind von $\vec{0}$ verschiedenen Summanden gleich (bis zum Umstellung).

(b) $\Rightarrow$ (c)

Angenommen jedes $v \in V$ lässt sich in eindeutiger Weise als eine Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A darstellen. Z.z.:

(1) A ist linear unabhängig und

(2) für jedes $v \notin A$ ist die Vereinigungsmenge $A \cup \{v\}$ linear abhängig.

Beweis für (1): Ist die Darstellung jedes Elements eindeutig, so ist die Darstellung von $\vec{0}$ auch eindeutig, also kann man $\vec{0}$ nur als die triviale Linearkombination (von paarweise verschiedenen Elementen) darstellen, d.h. A ist linear unabhängig.

(b) $\Rightarrow$ (c)

Widerspruchsbeweis für (2): Angenommen, es gibt $v \in V$, $v \notin A$, s.d. $A \cup \{v\}$ linear unabhängig ist.
Nach Voraussetzungen ist $\mathrm{span}(A) = V$, also

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k,$$

wobei $v_i \in A$ (paarweise verschieden) und $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\vec{0} = (-1)v + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k \qquad (**)$$

und deswegen kann man $\vec{0}$ als zwei verschiedene Linearkombinationen der Elemente $v, v_1, ..., v_k$ darstellen:
wie in $(**)$
und als die triviale Linearkombination
$\vec{0} = 0v + 0v_1 + 0v_2 + ... + 0v_k$.
Der Widerspruch zeigt, dass (b)   (c) impliziert.

(c) $\Rightarrow$ (a)

$$(\mathrm{c}) = \begin{cases} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{für } v \notin A \text{ ist } A \cup \{v\} \text{ nicht linear unabhängig} \end{cases}$$

$$(\mathrm{a}) = \begin{cases} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{jedes } v \in V \text{ ist eine Linearkombination der (p.v.) Elemente aus } A \end{cases}$$

Angenommen (c). Wir müssen zeigen, dass $v \in V$ eine Linearkombination der Elemente aus A ist.
Fall 1. $v \in A$. Dann ist v schon eine Linearkombination von Elementen aus A, weil $v = 1v$.

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichttriviale Linearkombination von Elementen aus $A \cup \{v\}$, die Null ist:

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination kommt v mit von Null verschiedenem Koeffizient vor. (Sonst ist $(***)$ eine Linearkombination von Elementen nur aus A und muß trivial sein.) Also, für irgendein j ist $v_j = v$ und $\lambda_j \neq 0$. Wir multiplizieren $(***)$ mit $-\frac{1}{\lambda_j}$

$$\vec{0} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_j} v_2 - ... - 1 v_j - ... - \frac{\lambda_k}{\lambda_j} v_k$$

und addieren v zu beiden Seiten. Wir bekommen

$$v = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i \ .$$

Also ist v eine Linearkombination der (paar. versch.) Elemente aus A. $\square$

Noch einmal zum Schema des Beweises: Wir mussten zeigen, dass die Aussagen (a), (b), (c) äquivalent sind.
Wir haben gezeigt, dass

- falls (a) erfüllt ist, (b) auch erfüllt ist. (Schritt (a) $\Rightarrow$ (b))
- falls (b) erfüllt ist, (c) auch erfüllt ist. (Schritt (b) $\Rightarrow$ (c))
- falls (c) erfüllt ist, (a) auch erfüllt ist. (Schritt (c) $\Rightarrow$ (a))

Also falls eine der Aussagen (a), (b), (c) erfüllt ist, dann sind die zwei anderen Aussagen auch erfüllt.
Und falls eine der Aussagen (a), (b), (c) nicht erfüllt ist, dann sind die zwei anderen Aussagen auch nicht erfüllt.

Def. *Ein Vektorraum* $(V,+,\cdot)$ *heißt* *endlich erzeugt, falls es eine endliche Teilmenge* $A \subseteq V$ *gibt so dass* $\mathrm{span}(A) = V$.

Bsp. $\mathbb{R}^3$ ist endlich erzeugt: Wie wir letztes Mal gezeigt haben, ist jeder Vektor

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

eine Linearkombination der Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Bsp. Der Vektorraum der Funktionen auf $\mathbb{R}$ (Aufgabe 3 Blatt 2) ist nicht endlich erzeugt.

Satz 8 *Sei* $(V, +, \cdot)$ *ein endlich erzeugter Vektorraum, d.h.* $\mathrm{span}(A) = V$ *für eine endliche Menge* A*. Dann gibt es eine endliche Basis* $A' \subseteq A$ *von* V*.*

Bemerkung Die Basis A' ist automatisch endlich.

Frage. Ist die Basis eindeutig? Nein! Wir haben in Vorl. 5 bewiesen, dass die Menge $A' := \left\{ \binom{1}{2}, \binom{3}{4} \right\}$ eine Basis-Menge in $\mathbb{R}^2$ ist. Die Standard-Basis $A'' := \left\{ \binom{1}{0}, \binom{0}{1} \right\}$ ist ebenfalls eine Basis-Menge.
Also die Menge
$A := A' \cup A'' = \left\{ \binom{1}{2}, \binom{3}{4}, \binom{1}{0}, \binom{0}{1} \right\}$
hat (mind.) zwei Teilmengen, die Basen sind.

Beweis des Satzes: Angenommenen $\mathrm{span}(A) = V$, wobei $A \subseteq V$ endlich ist. Falls V ein trivialer Vektroraum ist, stimmt die Aussage offensichtlich: in diesem Fall die Basis ist $\varnothing$, und ist eine Teilmenge von A. Ferner werden wir annehmen, das unser Vektorraum nichttrivial ist.

Induktion nach der Anzahl der Elemente in der Menge A. Schema:

1. InduktionsAnfang

   Wir zeigen, dass für eine Teilmenge aus $m = 1$ Elementen die Aussage erfüllt ist.

2. InduktionsVoraussetzung

   Wir nehmen an, dass die Aussage für jede Teilmenge aus $m - 1$ Elementen erfüllt ist.

3. InduktionsSchritt

   Wir beweisen, dass falls die I.V. erfüllt ist, die Aussage auch für jede Teilmenge aus m Elementen erfüllt ist.

I.A.

Angenommen $V = span(A)$, wobei $A = \{v\}$. Ist $v = \vec{0}$, dann ist $V = \{\vec{0}\}$, also V ist ein trivialer Vektorraum ist. Diesen Fall haben wir am Anfang des Beweises behandelt.
Ist $v \neq \vec{0}$, so ist, wie wir in Vorlesung 5 bewiesen haben (im Bsp. nach der Definition der linearen Unabhängigkeit), v linear unabhängig und deswegen eine Basis (man bemerke dass die Menge $A = \{v\}$ ist erzeugend nach Definition). In diesem Fall ist $A' = A$.

I.V. und I.S.

I.V.: Wir nehmen an, dass wenn es in $(V, +, \cdot)$ eine Teilmenge A gibt,

- die aus $m - 1$ Elementen besteht und
- $\mathrm{span}(A) = V$ erfüllt,

es dann auch eine Basis $A' \subseteq A$ gibt.

I.S.: Wir müssen zeigen, dass falls es in $(V, +, \cdot)$ eine Teilmenge A gibt

- die aus $m \geq 2$ Elementen besteht und
- $\mathrm{span}(A) = V$ erfüllt,

es dann auch eine Basis $A' \subseteq A$ gibt.

Fall 1.A ist linear unabhängig. Dann ist A eine Basis.

I.S., Fall 2

Fall 2. A ist linear abhängig. Dann gibt es eine nichttriviale Linearkombination der Elemente aus A, die gleich $\vec{0}$ ist:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_m v_m = \vec{0},$$

wobei $v_i \in A$ und nicht alle λ_i gleich 0.
Sei $\lambda_j \neq 0$. Dann multiplizieren wir wie im Beweis des Satzes 7 beide Seiten mit $-\frac{1}{\lambda_j}$ und addieren v_j: Nach Umbenennung $v_j \mapsto v$

$$v = - \sum_{\substack{i = 1 \\ i \neq j}}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i \ . \qquad (*)$$

Betrachten wir dei Menge $A' \subseteq A$, die aus allen Elementen von A besteht mit Ausnahme von v. (Also A' ist A ohne v).
Für A' alle Induktionsvoraussetzungen erfüllt sind: A' enthält genau $m - 1$ Elemente.

Z.z.: $\mathrm{span}(A') = V$,
d.h. jedes $u \in V$ ist eine Linearkombination der Elemente aus A'.
Nach Voraussetzung ist $\mathrm{span}(A) = V$, also gibt es für jedes $u \in V$ Elemente $u_1, \ldots, u_k \in A$ so, dass

$$u = \sum_{i=1}^{k} \mu_i u_i \; . \qquad (**)$$

Liegt v nicht in der Menge $\{u_1, \ldots, u_k\}$, so ist jedes u_i ein Element von A' und deswegen ist u eine Linearkombination von Elementen aus A'.
Wir nehmen an, dass v in der Menge $\{u_1, \ldots, u_k\}$ liegt, d.h. $v = u_j$ für irgendein j. Wir haben

$$u = \Big(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \mu_i u_i \Big) + \mu_j u_j \overset{(*)}{=} \Big(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \mu_i u_i \Big) - \mu_j \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i$$

was eine Linearkombination von Elementen aus A' ist. $\square$

Mehr zur Induktion

Man kann die Induktion als unendliche Folge von Beweischritten verstehen.
Aussage 1. Die Aussage gilt unter der zusätzlichen Annahme, dass $m = 1$
Aussage 2. Falls die Aussage unter der zusätzlichen Annahme, dass $m = 1$, gilt, dann gilt sie unter der zusätzlichen Annahme $m = 2$
Aussage 3. Falls die Aussage unter der zusätzlichen Annahme, dass $m = 2$, gilt, dann gilt sie unter der zusätzlichen Annahme $m = 3$
Aussage 4. Falls die Aussage unter der zusätzlichen Annahme, dass $m = 3$, gilt, dann gilt sie unter der zusätzlichen Annahme $m = 4$

$$\ldots$$

Wenn alle diese Aussagen (es geben unendlich viel davon) bewiesen sind, dann ist die ursprüngliche Aussage bewiesen.
Wir ersetzen die orangen Aussagen für die folgend Aussage:
Falls die Aussage für $m - 1$ (für jede fest gewählte natürliche Zahl $m - 1$ gilt), dann gilt sie für die zahl m

Dimension

Def. *Sei* $(V, +, \cdot)$ *ein endlich erzeugter Vektorraum. Dann heißt die Anzahl der Elemente in einer Basis die Dimension des Vektorraums* V.

Satz 9 *Die Dimension eines (endlich erzeugten) Vektorraums hängt nicht von der Wahl der Basis ab.*

D.h. besteht eine Basis aus n Vektoren, so besteht jede Basis aus n Vektoren.

Der Beweis von Satz 9 ist kompliziert. Wir werden zuerst zwei Hilfsaussagen beweisen: Das Austauschlemma von Steinitz (Lemma 8) und den Austauschsatz von Steinitz (Lemma 9).

Lemma 8 (Austauschlemma von Steinitz (Ernst Steinitz, 1871–1928)) *$B = \{v_1, ..., v_n\}$ sei eine Basis, $w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. Ist $\lambda_k \neq 0$, so ist $B' := \{v_1, ..., v_{k-1}, w, v_{k+1}, ..., v_n\}$ auch eine Basis.*

D.h. wir können (unter den Voraussetztungen in Lem. 8) das Element v_k gegen w austauschen und die Menge bleibt trotzdem eine Basis.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $k = 1$, sonst umnummerieren. Also $\lambda_1 \neq 0$.
Z.z.: $B' := \{w, v_2, ..., v_n\}$ ist eine Basis.
v_1 ist eine Linearkombination von $\{w, v_2, ..., v_n\}$. Tatsächlich,

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n, \qquad (*)$$

wobei $\lambda_1 \neq 0$. Nach Multiplizieren mit $-\frac{1}{\lambda_1}$ und Addieren von $v_1 + \frac{1}{\lambda_1} w$ zu beiden Seiten der Gleichung bekommen wir

$$v_1 = \frac{1}{\lambda_1} w - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} v_3 - ... - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} v_n = \frac{1}{\lambda_1} w - \sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} v_i \qquad (**)$$

Wir zeigen: $\operatorname{span}(B') = V$. Sei $v \in V$. Dann gibt es $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{R}$ so dass

$$v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \mu_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i \stackrel{(**)}{=} \frac{\mu_1}{\lambda_1} w_1 - \frac{\mu_1}{\lambda_1} \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i.$$

Also ist jedes v eine Linearkombination der Elemente aus B', d.h. $\operatorname{span}(B') = V$.

Wir zeigen: B' ist linear unabhängig. Z.z.: Aus der Gleichung

$$\vec{0} = \alpha w + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i$$

folgt, dass $\alpha = 0$ und alle $\alpha_i = 0$.
Wir setzen $(*)$ in diese Gleichung ein:

$$\vec{0} = \alpha w + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i \stackrel{(*)}{=} \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i = \alpha \lambda_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} (\alpha \lambda_i + \alpha_i) v_i$$

Da $\{v_1, ... v_n\}$ linear unabhängig ist und $\lambda_1 \neq 0$, müssen alle Koeffizienten in dieser Linearkombination gleich 0 sein. Dann ist $\alpha = 0$ und alle $(\alpha \lambda_i + \alpha_i) = 0$. Dann sind auch alle $\alpha_i = 0$. $\square$

Wir haben Definition von Basis-Menge und Basis-Tupel:
Ein $n-$Tupel $(v_1, ..., v_n)$ is ein Basis-Tupel, wenn die Menge $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis-Menge ist, und zusätzlich die Anzahl der Elementen der Menge von Elementen des Tupels gleich n ist.
Die zweite Bedingung bedeutet, dass die Vektoren $v_1, ..., v_n$ paarweise verschieden sind.

Bsp. Wir betrachten das 3-Tupel von Vektoren in $\mathbb{R}^2$:

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right).$$

Die Menge von Elementen ist 2-Elementig:

$$A = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\},$$

weil das Element $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ doppelt vorkommt.
Obwohl die Menge A erzeugend und linear unabhängig ist, ist das 3-Tupel oben kein Basis-Tupel.

Bemerkung zum Beweis von Lemma 8: Wenn wir in der Aussage des Lemmas "Basismenge" mit "Basistupel" ersetzten, muss man noch nachprüfen, dass das Tupel $B' := (v_1, ..., v_{k-1}, w, v_{k+1}, ..., v_n)$ aus paarweise verschiedenen Elementen besteht. Die Elemente $v_1, ...v_n$ sind nach Voraussetzung paarweise verschieden; also mussten wir noch zeigen dass $w \neq v_i$ für beliebiges $i \neq k$.
Dazu Widerspruchsbeweis: sei $w = v_i$ für ein $i \neq k$. Dann gibt es zwei Möglichkeiten, w als Linearkombination von Basisvektoren darstellen:

$$\begin{aligned} w &= \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_i v_i + ... + \lambda_n v_n \\ w &= 0 \cdot v_1 + ... + 1 \cdot v_i + ... + 0 \cdot v_n. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten von Linearkombinationen sind verschieden; weil in der ersten Kombination ist $\lambda_k \neq 0$, und in der zweiten ist $\lambda_k = 0$. Das widerspricht Satz 7(b).