Def. Es sei $(V, +, \cdot)$ ein nichttrivialer Vektorraum. Die Menge $A \subseteq V$ heißt eine Basis-Menge, falls sie

(a) linear unabhängig ist und

(b) $\mathrm{span}(A) = V$.

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein trivialer Vektorraum, also $V = \{\vec{0}\}$. Dann heißt $\varnothing$ eine Basis von V.

Satz 8 - Wiederholung *Sei* $(V, +, \cdot)$ *ein endlich erzeugter Vektorraum, d.h.* $\operatorname{span}(A) = V$ *für eine endliche Menge A. Dann gibt es eine endliche Basis* $A' \subseteq A$ *von* V*.*

Folgerung. Sei $(V, +, \cdot)$ NICHT endlich erzeugt. Dann $\forall n \in \mathbb{N}$ gibts es eine $n-$elementige linearunabhängige Teilmenge von V.
Induktionsbeweis. I.A.: Z.z.: Es gibt eine 1-elementige linear unabhängige Menge.

Der Vektorraum V ist nichttivial, da der trivialer Vektorraum endlich erzeugt ist. Dann $\exists v \in V$ mit $v \neq \vec{0}$. Wie wir vorher bewiesen haben, ist die Menge $A_1 := \{v_1\}$ linearunabhängig.

I.V.: Es existiert eine linearunabhängige $A_n = \{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$.
I.S.: Z.z.: Es existiert eine linearunabhängige $A_{n+1} \subseteq V$, die aus $n + 1$ Elementen besteht.

I.S.

Wir nehmen eine linearunabhängige $A_n = \{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$, die nach I.V. existiert.
Offensichtlich, $span(A_n) \neq V$. In der Tat, sonst ist A_n eine (endliche) erzeugende Menge, was Voraussetzungen widerspricht.

Dann gibt es einen Vektor $v_{n+1} \in V$ mit $v_{n+1} \notin span(A_n)$. Wir zeigen, dass $A_{n+1} := A_n \cup \{v_{n+1}\} = \{v_1, ...v_{n+1}\}$ linearunabhängig ist.

Angenommen,

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_{n+1} v_{n+1} = \vec{0}. \qquad (*)$$

Wir müssen zeigen, dass $\lambda_1 = ... = \lambda_{n+1} = 0$.

Fallunterscheidung. Ist $\lambda_{n+1} = 0$, so ist $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = \vec{0}$. Dann ist $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$, weil A_n lienarunabhängig ist. Also sind alle λ's gleich 0. **Fall 2.** Ist $\lambda_{n+1} \neq 0$, so können wir, ähnlich wie wir im Beweis von Satz 7 und Satz 8 gemacht haben, $(*)$ mit $-\frac{1}{\lambda_{n+1}}$ zu multiplizieren und v_{n+1} zu beiden Seiten der Gleichung zu addieren. Wir bekommen $v_{n+1} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}} v_1 - ... - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} v_n$. Dann ist v_{n+1} eine Linearkombination von Vektoren aus A_n, was unsere Wahl von v_{n+1} widerspricht. Also, $(*)$ impliziert dass alle λ's gleich 0 ist. Schließlich ist A_{n+1} linearunabhängig, was unseres Ziel war. $\square$

Lemma 9 (Austauschsatz von Steinitz) *Sei* $B = \{v_1, ..., v_n\}$ *eine Basis im Vektorraum* $(V, +, \cdot)$. *Sei* $A = \{w_1, ..., w_k\}$ *eine linear unabhängige Menge. Dann gilt*

(a) $k \leq n$ *und*

(b) *es gibt (paarweise verschiedene)* $i_1, ..., i_k \in \{1, ..., n\}$ *so dass der Austausch von allen* v_{i_j} *gegen* w_j *wieder eine Basis von* V *liefert*

Bsp. Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ und $B := \left\{ v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sei die Standardbasis. Wir betrachten die Menge $A := \left\{ w_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$. Die Menge ist linear unabhängig. (Wir haben vorher gezeigt, dass $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$ linear unabhängig ist.) Nach Lemma 9 kann man zwei ~~beliebige~~ IRGENDWELCHE Vektoren aus B gegen Vektoren aus A austauschen, sodass die Menge trotzdem eine Basis-Menge bleibt.

In unserem Bsp. kann man $i_1 = 2, i_2 = 3$ wählen. Nach dem Austausch haben wir die Menge $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$, die auch eine Basis ist.

Bemerkung. Die „Nummern“ $i_1, i_2, \dots$ sind nicht beliebig. Selbstverständlich kann man sie beliebig unstellen. Im Bsp. oben kann man z.B. $i_2 = 2$ und $i_1 = 3$ wählen. Im Bsp oben können wir aber nicht z.B. $i_1 = 1$, $i_2 = 2$ nehmen: Nach dem Austausch haben wir $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ und dies ist keine Basis: Den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ kann man nicht als Linearkombination von Vektoren aus B' erzeugen.

Wenn die Menge A einelementig ist, folgt der Austauschsatz aus dem Austauschlemma

$B = \{v_1, ..., v_n\}$ sei eine Basis, $A := \{w\}$ sei eine einelementige linear unabhängige Menge. Wie wir vorher in Vorlesung 5 bewiesen haben (im Bsp. nach der Definition der linearen Unabhängigkeit), ist $w \neq \vec{0}$.
Da B eine Basis ist, gibt es $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i. \qquad (*)$$

Da $w \neq \vec{0}$ und B linear unabhängig ist, ist die Linearkombination $(*)$ nichttrivial, also $\exists k \in \{1, ..., n\}$ mit $\lambda_k \neq 0$.
Wir sehen, dass alle Voraussetzungen des Austauschlemmas erfüllt sind.
Also kann man v_k gegen w austauschen (also $i_1 := k$), sodass die Menge $B' := \{v_1, ..., v_{k-1}, w, v_{k+1}, ..., v_n\}$ eine Basis ist.

Lemma 9 (Austauschsatz von Steinitz) *Sei* $B = \{v_1, ..., v_n\}$ *eine Basis im Vektorraum* $(V, +, \cdot)$. *Sei* $A = \{w_1, ..., w_k\}$ *eine linear unabhängige Menge. Dann gilt*

(a) $k \leq n$ *und*

(b) *es gibt (paarweise verschiedene)* $i_1, ..., i_k \in \{1, ..., n\}$ *so dass der Austausch von allen* v_{i_j} *gegen* w_j *wieder eine Basis von* V *liefert*

Induktionsbeweis über k.

I.A. Für $k = 0$ ist nichts zu zeigen.

I.V. Die Aussage ist für jede Teilmenge $A \subseteq V$ aus $k - 1$ Elementen gültig.

Induktionsschrit für (a)

I.S. Z.z.: Die Aussage ist auch für jede Teilmenge A aus k Elementen gültig.
Sei $\{w_1, ..., w_k\}$ linear unabhängig.
Wir zeigen zuerst (a): $k \leq n$. Nach I.V. ist $k - 1 \leq n$.
Widerspruchsbeweis. Angenommen, es wäre $k > n$. Dann ist $k - 1 \geq n$.
Da nach I.V. $k - 1 \leq n$, ist $k - 1 = n$. Da die Teilmenge $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$ linear unabhänging ist, gibt es nach I.V. (paarweise verschiedene) $i_1, ..., i_{k-1} \in \{1, ..., k-1\}$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis von V liefert. Also ist $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$ eine Basis. Dann ist nach Satz 7(c) $A = \{w_1, ..., w_{k-1}, w_k\}$ linear abhängig. Nach Voraussetzungen ist aber A linear unabhängig. Widerspruch zeigt, dass $k \leq n$.

Induktionsschrit für (b)

Also $k \leq n$. Wir zeigen jetzt **(b)**: es gibt $i_1, i_2, ..., i_k$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. Betrachten wir die Menge $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$. Da sie linear unabhängig ist, gibt es nach I.V. (paarweise verschiedene) $i_1, i_2, ..., i_{k-1} \in \{1, ..., n\}$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $i_1 = 1, i_2 = 2, ..., i_{k-1} = k-1$, sonst umnumerieren. Also ist $A_{neu} := \{w_1, ..., w_{k-1}, v_k, ..., v_n\}$ eine Basis. Deswegen kann man w_k als Linearkombination darstellen:

$$w_k = \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i w_i + \sum_{i=k}^{n} \lambda_i v_i.$$

Einer der Koeffizienten λ_j ist nicht 0, da sonst $\vec{0} = -w_k + \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i w_i$ ist, was der linearen Unabhängigkeit von $\{w_1, ..., w_k\}$ widerspricht.
Also $\lambda_j \neq 0$. Nach dem Austauschlemma (Lemma 8) bekommen wir eine Basis, wenn wir den entsprechenden Vektor v_j gegen w_k austauchen. □

Beweis von Satz 9

Satz 9 *Die Dimension eines (endlich erzeugten) Vektorraums hängt nicht von der Wahl der Basis ab.*

Beweis. Seien $\{v_1, ..., v_n\}$ und $\{w_1, ..., w_k\}$ Basen von $(V, +, \cdot)$. Z.z.: $k = n$.

$$\left\{\begin{array}{l} \{v_1, ..., v_n\} \text{ ist eine Basis} \\ \{w_1, ..., w_k\} \text{ ist linear unabhängig} \end{array}\right. \overset{Austauschsatz(a)}{\Rightarrow} n \geq k.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \{w_1, ..., w_k\} \text{ ist eine Basis} \\ \{v_1, ..., v_n\} \text{ ist linear unabhängig} \end{array}\right. \overset{Austauschsatz(a)}{\Rightarrow} k \geq n.$$

$\square$

Folgerung (a)

Es sei $\{v_1, ..., v_n\}$ eine linear unabhängige Teilmenge des Vektorraums $(V, +, \cdot)$ der Dimension n. Dann ist $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis.

Widerspruchsbeweis. Angenommen es gibt ein $w \in V$, $w \notin \mathrm{span}(\{v_1, ..., v_n\})$. Dann ist $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$ linear unabhängig. Tatsächlich, gilt für eine Linearkombination von (paarweise verschiedenen) Elementen aus $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$

$$\mu w + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \vec{0}, \qquad (*)$$

dann ist $\mu = 0$, da sonst $w = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu} v_i$.
Dann ist $(*)$ eine Linearkombination der Elemente aus $\{v_1, ..., v_n\}$ und deswegen trivial. Also ist $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$ linear unabhängig. Aber nach dem Austauschsatz muss die Anzahl der Elemente in $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\} \le n$ sein. Widerspruch! $\square$

Anwendung: Wie antwortet man auf die Frage „Ist eine explizit gegebene Teilmenge im $\mathbb{R}^n$ eine Basis?“

$\mathbb{R}^n$ ist n-dimensional, weil $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis ist. (Sie heißt Standardbasis von $\mathbb{R}^n$, wurde bereits erwähnt.)

Gegeben eine Teilmenge $A = \{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$, wie kann mann verstehen ob diese Teilmenge eine Basis ist?

Falls $k \neq n$ ist, ist A keine Basis (Satz 9).

Angenommen $k = n$. Dann benutzt man Folgerung (a):

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = \vec{0}$$

ist ein System von n linearen Gleichungen für n Unbekannte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, welches man löst. Gibt es eine Lösung $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$, so ist A linear abhängig, also keine Basis. Gibt es genau eine Lösung $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (0, \ldots, 0)$, so ist A linear unabhängig und nach Folgerung (a) eine Basis.

Um also zu prüfen, ob eine explizit gegebene Teilmenge eine Basis ist, genügent es, nur EIN lineares Gleichungssystem zu lösen, statt $n + 1$ wie in der letzten Vorlesung.

Bemerkung.

Das selbe gilt auch für alle Vektorräume mit bekannter Dimension – eine Basis ist eine linear unabhängige Teilmenge von V, so dass die Anzahl der Elemente gleich der Dimension von V ist (wobei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum ist).

Bsp. einer Anwendung

Frage *Ist die folgende Menge A eine Basis in* $\mathbb{R}^2$*?*

$A := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Antwort: Nein! Tatsächlich, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis im $\mathbb{R}^2$ (Standardbasis), also ist $\mathbb{R}^2$ zweidimensional, also (Satz 9) besteht jede Basis aus 2 Vektoren, was hier nicht der Fall ist.

Frage *Ist die folgende Menge A eine Basis im* $\mathbb{R}^2$*?*

$A := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

Antwort: Nein! Eine Basis im $\mathbb{R}^2$ besteht aus 2 Vektoren und A enthält 3.

Bsp. einer Anwendung

Frage *Ist die Teilmenge* $A := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ *eine Basis im* $\mathbb{R}^2$*?*

Ja! Tatsächlich, $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional. Wegen Folgerung (a) müssen wir nur zeigen, dass A linear unabhängig ist. D.h., dass nur die triviale Linearkombination gleich $\vec{0}$ ist. Die Linearkombination mit Koeffizienten λ, μ ist

$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda - \mu \end{pmatrix}$

Falls diese Linearkombination gleich $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist, muss

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases} \qquad +$$

Nach Addition der Gleichungen bekommen wir $2\lambda = 0$, also $\lambda = 0$. Nach einsetzen von $\lambda = 0$ in die erste Gleichung bekommen wir $\mu = 0$. Also ist diese Linearkombinaiton die triviale Linearkombination, d.h. A ist linear unabhängig.
Nach Folgerung (a) ist dann A eine Basis.

Folgerung (b) *Sei $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis im Vektorraum $(V, +, \cdot)$. Für $\{w_1, ..., w_n\}$ gelte: Jedes v_i ist eine Linearkombination von Elementen aus $\{w_1, ..., w_n\}$. Dann ist $\{w_1, ..., w_n\}$ eine Basis.*

Beweis. Wir zeigen: $\mathrm{span}(\{w_1, ..., w_n\}) = V$. D.h., jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination von Elementen w_i.
Da $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis ist, ist jedes v eine Linearkombination der Form
$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n$. $\quad (*)$

Nach Voraussetzung ist jedes v_i eine Linearkombination der Elemente $w_1, ..., w_n$, d.h. $v_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} w_j$. Nach Einsetzen in $(*)$ bekommen wir

$$v = \lambda_1 \sum_{j=1}^{n} \mu_{1j} w_j + \lambda_2 \sum_{j=1}^{n} \mu_{2j} w_j + ... + \lambda_n \sum_{j=1}^{n} \mu_{nj} w_j = \sum_{i,\ j=1}^{n} \lambda_i \mu_{ij} w_j.$$

Also ist v eine Linearkombination der Elemente $w_1, ..., w_n$.
Z.z.: Die Menge $\{w_1, ..., w_n\}$ ist linear unabhängig. Angenommen sie ist nicht linear unabhängig. Wie wir eben bewiesen haben, ist $\mathrm{span}(\{w_1, ..., w_n\}) = V$. Dann kann man nach Satz 8 aus $\{w_1, ..., w_n\}$ eine Basis A' auswählen. Nach Satz 9 muss diese Teilmenge aus n Elementen bestehen, weil alle Basen die gleiche Anzahl von Elementen haben. Also ist $A' = \{w_1, ..., w_n\}$ und deswegen ist $\{w_1, ..., w_n\}$ eine Basis. $\square$

Folgerung (c) (Basisergänzungssatz) Sei $(V, +, \cdot)$ ein endlich erzeugter Vektorraum, sei $r = dim(V)$ und seien $\{w_1, \cdots, w_n\}$ linear unabhängig. Dann ist $n \leq r$ und existieren Vektoren $w_{n+1}, \cdots w_r$, so dass $B = \{w_1, \cdots, w_n, w_{n+1}, \cdots, w_r\}$ eine Basis von V ist.

Folgerung (c') (Basisergänzungssatz) Jede linear unabhängige Teilmenge eines endlich-dimensionalen Vektorraums $(V, +, \cdot)$ läßt sich zu einer Basis von V ergänzen.

Beweis: Sei $B = (v_1, \cdots, v_r)$ eine Basis von V. Dann gibt es nach dem Austauschsatz Vektoren $v_{i_1}, ..., v_{i_n}$, die gegen $w_1, ..., w_n$ ausgetauscht werden können, so dass nach etwaigem Umnummerieren von Vektoren $B = (w_1, ..., w_n, v_{n+1}, ..., v_r)$ eine Basis von V ist. $\square$

Folgerung (d) Untervektorraum U eines endlich erzeugten Vektorraums $(V, +, \cdot)$ ist auch endlich erzeugt. Ferner gilt: $dim(U) \leq dim(V)$.

Wiederschpuchsbeweis. Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum von $(V, +, \cdot)$. V sei $n-$dimensional mit der Basis $\{v_1, ...v_n\}$. Ist U nicht endlich erzeugt, dann existiert nach der Folgerung aus Satz 8 eine linearunabhängige Teilmenge $A = \{u_1, ..., u_{n+1}\} \subseteq U$ aus $n + 1$ Vektoren. Ist U endlich erzeugt und $dim(U) \geq n + 1$, dann existiert ebenfalls eine linearunabhängige Menge $A := \{u_1, ..., u_{n+1}\} \subseteq U$ aus $n + 1$ Vektoren – wir nehmen einfach die ersten $n + 1$ Vektoren einer Basis.

Nach Austauschsatz ist $n + 1 \leq n$, was falsch ist. Widerspruch! $\square$

Summe von Untervektorräumen

Def. *Seien $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum und $E, F \subseteq V$ Untervektorräume. Die Summe $E + F$ ist die Teilmenge von V, die aus allen möglichen Summen $e + f$ mit $e \in E$ und $f \in F$ besteht:*
$E + F := \{e + f \mid e \in E \text{ und } f \in F\} \subseteq V$.

Bsp. Sei $V = \mathbb{R}^2$, $E = \left\{ \binom{x}{0} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ und $F = \left\{ \binom{0}{y} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$. Dann ist $E + F = V$, weil man ein beliebiges Element $\binom{x}{y}$ bekommt als
$\binom{x}{y} = \underbrace{\binom{x}{0}}_{e \in E} + \underbrace{\binom{0}{y}}_{f \in F}$.

Satz 10 (Dimensionssatz) *Seien E, F Untervektorräume eines endlich erzeugten Vektorraums $(V, +, \cdot)$. Dann gilt:*
$E + F$ ist ein Untervektorraum der Dimension
$dim(E + F) = dim(E) + dim(F) - dim(E \cap F)$.

Beweis. Z.z.: (a) $E + F$ ist ein Untervektorraum.
(b) $E + F$ hat einer Basis aus $dim(E) + dim(F) - dim(E \cap F)$ Elementen.

Beweis (a) $E + F$ ist ein Untervektorraum

Z.z.: $\forall u_1, u_2 \in E + F$ ist $u_1 + u_2 \in E + F$.

Seien $u_1, u_2 \in E + F$, d.h. $u_1 = e_1 + f_1$ und $u_2 = e_2 + f_2$ für irgendwelche $e_i \in E, f_i \in F$. Dann gilt:

$$u_1 + u_2 = e_1 + f_1 + e_2 + f_2 = \underbrace{e_1 + e_2}_{\in E} + \underbrace{f_1 + f_2}_{\in F} \in E + F.$$

Abgeschlossenheit bzgl. „·“ zeigt man analog.

Beweis (b): Konstruktion der Basis in $E+F$

Zunächst ist nach dem Satz 4 $E \cap F$ ein Untervektorraum. Nach dem Basisergänzugssatz (Folg. (c)) ist $E \cap F$ endlichdimensional. Es sei $\{a_1, ..., a_m\}$ eine Basis von $E \cap F$.
Diese lässt sich nach dem Basisergänzugssatz zu einer Basis $\{a_1, ..., a_m, e_1, ..., e_n\}$ von E und zu einer Basis $\{a_1, ..., a_m, f_1, ..., f_r\}$ von F erweitern. (Ist $dim(E \cap F) = 0$, dann lässt man die a's weg und setzt $m := 0$.)

Wir wollen jetzt zeigen, dass $B := \{a_1, ..., a_m, e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_r\}$ eine Basis von $E+F$ ist. (Offensichtlich besteht B aus $m+n+r = (m+n)+(m+r)-m = dim(E)+dim(F)-dim(E \cap F)$ Elementen.)
Nach Definition lässt sich jeder Vektor $v \in E+F$ in der Form $v = e+f$ mit $e \in E$ und $f \in F$ darstellen. Diese Darstellung wird im Allgemeinen nicht eindeutig sein, aber jedenfalls lässt sich e als Linearkombination der $\{a_1, ..., a_m, e_1, ..., e_n\}$ und f als Linearkombination der $\{a_1, ..., a_m, f_1, ..., f_r\}$ darstellen. Damit ist v Linearkombination der Vektoren aus B, also $span(B) \supseteq E+F$. Da $B \subseteq E+F$, und $E+F$ ein Untervektorraum ist, ist $span(B) \subseteq E+F$, also $span(B) = E+F$.

Lineare Unabhängigkeit von B

Wir müssen noch nachweisen, dass B linear unabhängig ist. Es sei dazu
$\vec{0} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i + \sum_{i=1}^{r} \nu_i f_i$. $\qquad (*)$
Dann gilt (wir addieren $-\sum_{i=1}^{r} \nu_i f_i$ zu beiden Seiten):

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i}_{\in E, \text{weil } a_i, e_i \in E} = \underbrace{\sum_{i=1}^{r} -\nu_i f_i}_{\in F, \text{weil } f_i \in F} := v.$$

Also liegt der Vektor v in E und in F und deswegen in $E \cap F$. Dann kann man v als Linearkombination der a_i darstellen: $v = \sum_{i=1}^{m} \eta_i a_i$.
Wir wissen aber nach Satz 7(b), dass die Darstellung eines Elements als Linearkombination von paarweise verschiedenen Basisvektoren eindeutig ist. Für den Vektor v haben wir die folgenden Darstellungen:
$v = \sum_{i=1}^{m} \eta_i a_i$ und $v = \sum_{i=1}^{r} -\nu_i f_i$. Also alle $\nu_i = 0$.
Analog, für den Vektor v haben wir die folgende Darstellungen:
$v = \sum_{i=1}^{m} \eta_i a_i$ und $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$. Also alle $\mu_i = 0$.
Da $\mu_i = \nu_i = 0$, ist $(*)$ äquivalent zu $\vec{0} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$. Da $\{a_1, ..., a_m\}$ eine Basis in $E \cap F$ ist, sind alle λ_i ebenfalls gleich 0.
Wir haben also bewiesen, dass eine Linearkombination von Elementen aus B genau dann $\vec{0}$ ergibt, wenn sie trivial ist. D.h. wir haben bewiesen, dass die Menge B linear unabhängig ist. $\square$

Koordinaten in einer Basis

Def. *$B := (v_1, ..., v_n)$ sei ein Basis-Tupel im Vektorraum $(V, +, \cdot)$, $w \in V$. Der Koordinatenvektor des Vektors w in dieser Basis ist das n-Tupel von Skalaren* $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ *so dass $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = w$.*

(Die Skalare heißen dann die Koordinaten.)

Bemerkung Nach der Definition von Basis gibt es solche Skalare λ_i (weil $span(v_1, ..., v_n) = V$ ist, also jedes Element von V eine Linearkombination der $v_1, ..., v_n$ ist). Nach Satz 6(b) sind die Zahlen λ_i eindeutig.

Def— Fortsetzung Die Abbildung $C_B : V \to \mathbb{R}^n$,

$$C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$ heißt die Koordinatenabbildung.

Bsp. Betrachte $\mathbb{R}^2$ mit der Standardbasis. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Dann ist der Koordinatenvektor eines Vektors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ das Paar $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, weil

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Bemerkung

In der Definition einer Basis haben wir Basis-Menge und Basis-Tupel (also, „geordnete“ Menge) definiert und das Wort Basis für beide Objekte verwendet. Hier ist die erste Stelle, wo wir tatsächlich Basen als Tupel verstehen sollen: Falls wir die Vektoren in einem Basis-Tupel umordnen, werden die entsprechende Koordinaten entsprechend umgeordnet.

Bsp. Betrachte $\mathbb{R}^2$ mit der umgeordneten Standardbasis:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Dann sind die Koordinaten eines Vektors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ das Paar $\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$, weil

$$y \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1} + x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Bsp. Man betrachte die Basis

$$A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Welche Koordinaten hat der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in dieser Basis?

Antwort: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, weil $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Wie findet man die Koordinaten eines Vektors in einer Basis (z.B. im $\mathbb{R}^n$)?

Z.B. nach Definition:
Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis im $\mathbb{R}^n$, u sei ein Vektor. Alle Vektoren $v_1, ..., v_n$, u seien explizit gegeben:

$$v_1 := \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix}, ..., v_n := \begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \\ \vdots \\ v_n^n \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix},$$

wobei alle v_i^j explizit gegebene Zahlen sind.
Nach Definition sind die Koordinaten des Vektors u die Zahlen $\lambda_1, ..., \lambda_n$ so dass $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = u$:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix} + ... + \lambda_n \begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \\ \vdots \\ v_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \\ \vdots \\ v_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}$$

Und das ist das System

$$\begin{cases} \lambda_1 v_1^1 + \dots + \lambda_n v_n^1 & = & u^1 \\ \lambda_1 v_1^2 + \dots + \lambda_n v_n^2 & = & u^2 \\ & \vdots & \\ \lambda_1 v_1^n + \dots + \lambda_n v_n^n & = & u^n \end{cases}$$

von n Gleichungen für die Unbekannten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. (Die v_i^j und u^j sind gegeben.) Die Lösung existiert, ist eindeutig (Satz 7(b)) und ergibt die Koordinten des Vektors u in der Basis $(v_1, \dots, v_n)$.

Aufgabe: Finde die Koordinaten des Vektors $u := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ in der Basis

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Koordinaten sind die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ so dass

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nach der Vektoraddition bekommen wir

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3 \\ \lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3 \\ 2\lambda_1+3\lambda_2+3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das ist ein System von drei Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3 & = & 2 & & Eq_1 \\ \lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3 & = & -2 & & Eq_2 \\ 2\lambda_1+3\lambda_2+3\lambda_3 & = & 2 & & Eq_3 \end{array} \right.$$

Wir lösen das System.

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3 & = & 2 & & Eq_1 \\ \lambda_2-3\lambda_3 & = & -4 & & Eq_2-Eq_1 \\ \lambda_2-\lambda_3 & = & -2 & & Eq_3-2Eq_1 \end{array} \right.$$

Die letzte Gleichungen minus die vorletzte gibt $2\lambda_3=2$, also $\lambda_3=1$. Nach Einsetzen von $\lambda_3=1$ in die letzte Gleichung bekommen wir $\lambda_2-1=-2$, also $\lambda_2=-1$. Nach Einsetzen von $\lambda_3=1$ und $\lambda_2=-1$ in die erste Gleichung bekommen wir $\lambda_1-1+2=2$, also $\lambda_1=1$.

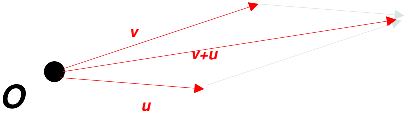
Antwort: Vektor $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat Koordinaten $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in der Basis

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

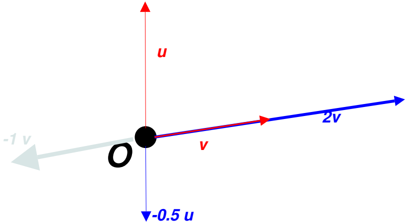
Basis in der (geometrischen) Ebene

Wiederholung: Sei E eine Ebene, $O \in E$ und V die Menge $V := \{\text{gerichtete Strecken mit Anfangspunkt } O \text{ und Endpunkt auf } E\}$.

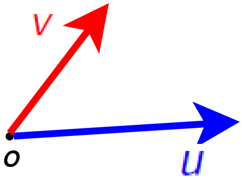
Addition von Vektoren: Parallelogrammregel.



Multiplikation $\cdot$ von Skalaren $\in \mathbb{R}$ und Vektoren: Streckungen/Stauchungen.

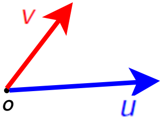


Behauptung: V **ist zweidimensional. Zwei beliebige Vektoren** $u, v \in V$ **mit** $u \neq \vec{0} \neq v$ **und** $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \lambda u \neq v$ **bilden eine Basis**



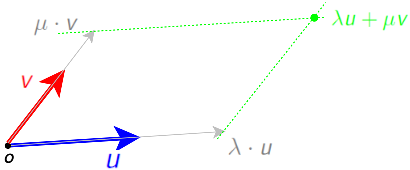
Beweis der Behauptung.

Wir betrachten zwei Vektoren u, v mit $u \neq \vec{0} \neq v$ und $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \lambda u \neq v$. Wir müssen zeigen:



(a) $\{u, v\}$ ist linear unabhängig, d.h. $\lambda u + \mu v = \vec{0} \iff \lambda = 0 = \mu$
(b) $\{u, v\}$ ist erzeugend, d.h. jeden Vektor $w \in V$ kann man als Linearkombination $\lambda u + \mu v$ von u und v bekommen.
(mit Quantoren ausgedrückt: $\forall w \in V\ \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sodass $\lambda u + \mu v = w$).

Beweis (a) Wenn $\lambda \neq 0 \neq \mu$ ist, ist der Endpunkt des Vektors $\lambda u + \mu v$ nach Definition der den Punkt O gegenüberliegenden Punkt des Parallelograms auf dem Bild – die Seiten sind $\lambda \cdot u$ und $\mu \cdot v$.
Offensichtlich ist der Punkt nicht O, also wenn $\lambda \neq 0 \neq \mu$, ist $\lambda u + \mu v \neq \vec{0}$, wie behauptet.

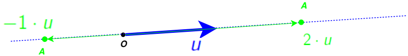


Wenn $\lambda \neq 0$ und $\mu = 0$ ist, ist der Vektor $\lambda u + \mu v = \lambda u$, und ist auch nicht $\vec{0}$ (nach Lemma 5). Der Fall $\lambda = 0$ und $\mu \neq 0$ ist ähnlich.

Beweis (b)

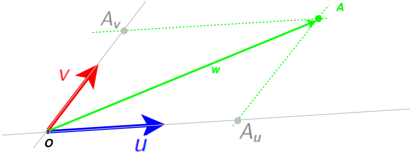
Z.z.: Ein beliebiger Vektor $w = \overrightarrow{OA}$ (mit Endpunkt A) ist Linearkombination von u, v.

Fall 1. Wenn A auf der Gerade liegt, die durch O und Endpunkt von u geht, ist $w = \lambda u$ mit $\lambda = \pm \frac{\text{Länge von } w}{\text{Länge von } u}$.



Fall 2 — wenn A auf der Gerade liegt, die durch O und Endpunkt von v geht – analog.

Fall 3. A (=Endpunkt von w) liege jetzt weder auf der Gerade durch O und den Endpunkt von u, noch auf der der Gerade durch O und den Endpunkt von v.
Wir betrachten die Geraden durch A, die zu u und v parallel sind. Sie schneiden die Gerade durch O und den Endpunkt von u und die Gerade durch O und den Endpunkt von v. Die Schnittpunkte bezeichnen wir mit A_u und A_v .

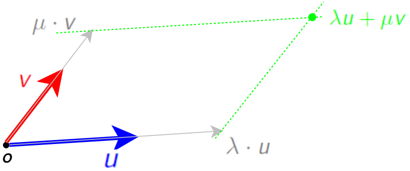


Die Vektoren $\overrightarrow{OA_u}$ und $\overrightarrow{OA_v}$ sind proportional zu u bzw. v. Also ist $\overrightarrow{OA_u} = \lambda u$ und $\overrightarrow{OA_v} = \mu v$ für irgendwelche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann ist $w = \lambda u + \mu v$, also auch in Fall 3 haben wir einen beliebigen Vektor w als Linearkombination von u und v erzeugt.

Bemerkung. Man kann λ und μ berechnen wie im Beweis (a).
In der Tat, $|\lambda| := \frac{\text{Länge von } OA_u}{\text{Länge von } u}$ und das Vorzeichen von λ ist „+“, wenn A_u und der Endpunkt von u auf der gleichen Seite von O liegen, und sonst „−“. Analog, $|\mu| := \frac{\text{Länge von } OA_v}{\text{Länge von } v}$ und das Vorzeichen von μ ist „+“, wenn A_v und der Endpunkt von v auf der gleichen Seite von O liegen und sonst „−“.

Koordinaten eines Vektors w auf der Ebene (geometrisches Beispiel)

Wir betrachten die Basis (u, v) auf der geometrischen Ebene.
Nach Definition sind die Koordinaten die Zahlen λ, μ sodass $w = \lambda u + \mu v$:

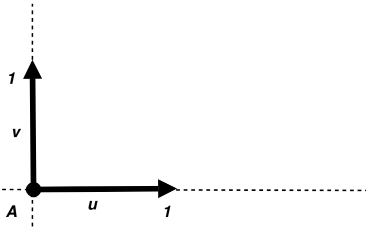


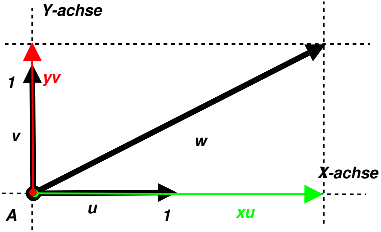
Wir betrachten die Punkte A_u, A_v wie vorher. Dann gilt $\lambda := \pm \frac{\text{Länge von } OA_u}{\text{Länge von } u}$ und $\mu := \pm \frac{\text{Länge von } OA_v}{\text{Länge von } v}$, wobei das Vorzeichen davon abhängt, auf welcher Seite von O die Punkte A_u und Endpunkt von u bzw. die Punkte A_v und der Endpunkt von v liegen.

Kartesische Koordinaten auf der Ebene

Wir zeigen: Falls die Vektoren u, v orthogonal sind und deren Länge gleich 1 ist, dann sind die Koordinaten jedes Vektors in der Basis (u, v) gleich den kartesischen Koordinaten, die Sie aus der Schule kennen.

Als Anfangspunkt von Vektoren aus V nehmen wir einen Punkt $A \in E$. Betrachen wir die Geraden, die die geordneten Strecken u und v enthalten (=X-Achse und Y-Achse). Der Vektor w habe die Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ in der Basis (u, v), also $w = x \cdot u + y \cdot v$. Da die Länge des Vektors $x\vec{u}$ gleich $|x|$ ist, ist der Abstand zwischen dem Lot auf die X-Achse und A gleich x, sowie der Abstand zwischen dem Lot auf die Y-Achse und A gleich y. Also sind die kartesische Koordinaten auch $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.




Y-achse
1
yv
v
w
X-achse
A
u
1
xu

Lineare Abbildungen

Def. *Es seien* $(V_1, +, \cdot)$ *und* $(V_2, +, \cdot)$ *zwei Vektorräume. Eine Abbildung* $f : V_1 \to V_2$ *heißt linear, falls für alle Vektoren* $u, v \in V_1$ *und für jedes* $\lambda \in \mathbb{R}$ *gilt:*

- $f(u + v) = f(u) + f(v)$ *,*
- $f(\lambda u) = \lambda f(u)$*.*

Bsp. Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist linear, weil $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}\right) =$
$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right),$

$$f\left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

Bsp. Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist die Streckung $f : V \to V$, $f(x) := \alpha \cdot v$ linear.
Tatsächlich,

$$f(v_1 + v_2) = \alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_1 = f(v_1) + f(v_2),$$

$$f(\lambda v_1) = \alpha(\lambda v_1) = (\alpha\lambda)v_1 = (\lambda\alpha)v_1 = \lambda(\alpha v_1) = \lambda f(v_1).$$

Bsp. Ist die Abbildung $f : V_1 \to V_2$, $f(v) := \vec{0}$ eine lineare Abbildung?
Ja! Weil $f(v_1) + f(v_2) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ und $f(\lambda v_1) = \vec{0} = \lambda\vec{0} = \lambda f(v_1)$.
(Außerdem ist f auch die Abbildung aus dem „Streckungs“-Bsp. vorher, mit $\alpha = 0$.)

Lemma 10 $(v_1, ..., v_n)$ *sei eine Basis in* $(V, +, \cdot)$. *Wir betrachten die Koordinatenabbildung* $C : V \to \mathbb{R}^n$, *die den Vektor* v *auf seinen Koordinatenvektor* $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *abbildet. Dann gilt: die Abbildung* C *ist linear.*

Beweis. Z.z.: Für beliebigen Vektoren u, $v \in V$ mit Koordianten $C(u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $C(v) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ gilt:

(a) Der Koordinatenvektor des Vektors $u + w$ ist $\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$,

(b) für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ist der Koordinatenvektor des Vektors λu der Vektor $\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$

Der Vektor u hat die Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} u = \sum_{i=1}^n x_i v_i$.

Der Vektor v hat die Koordinaten $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} u = \sum_{i=1}^n y_i v_i$.

Dann sind $u + w$ und λu

$$u + w = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i + \sum_{i=1}^{n} y_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) v_i. \Longleftrightarrow C(u + v) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda u = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i v_i \Longleftrightarrow C(\lambda u) = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

$\square$

Exkurs in die Mengenlehre: Surjektion, Injektion und Bijektion

Es seien A, B zwei Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung:
Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt Injektion (oder eine injektive Abbildung), falls für jedes $x \neq y \in A$ gilt: $f(x) \neq f(y)$.
(Oder: $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$).
Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt Surjektion (oder eine surjektive Abbildung), falls für jedes $x \in B$ mind. ein $y \in A$ existiert, so dass $f(y) = x$.
(Oder: $Bild_f := \{b \in B \text{ s.d. } \exists a \in A \text{ mit } f(a) = b\} = B$).
Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt Bijektion (oder eine bijektive Abbildung), falls sie eine Injektion und eine Surjektion ist.

Die Bilder

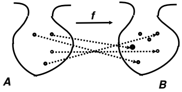


Abbildung: Injektion (Abbildung in)

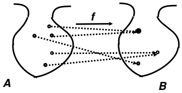


Abbildung: Surjektion (Abbildung auf)

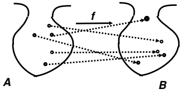


Abbildung: Bijektion = Surjektion und Injektion

Wichtige Bezeichnung von der vorletzten Folie:

$$Bild_f := \{b \in B \text{ s.d. } \exists a \in A \text{ mit } f(a) = b\}$$

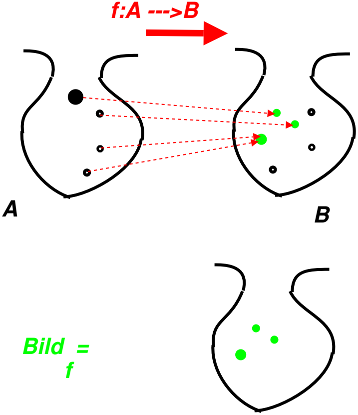


Abbildung: **Bsp:** $Bild_f$

Def. Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung, wobei $(V, +, \cdot)$ und $(U, +, \cdot)$ Vektorräume sind. Der Kern von f ist die Menge
$Kern_f := Urbild_f(\{\vec{0}\}) := \{v \in V \mid f(v) = \vec{0}\}$

Lemma 11 *$f : V \to U$ sei eine lineare Abbildung. Dann gilt:*

(a) $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

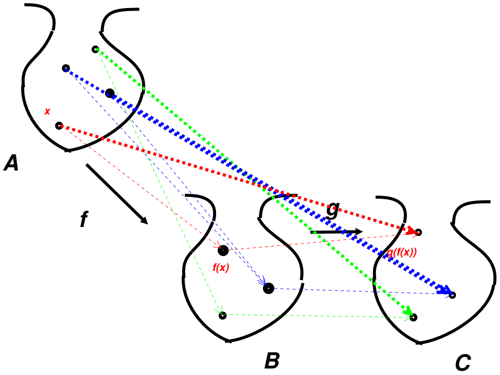
(b) $\forall v \in V$ *gilt* $f(-v) = -f(v)$

(c) $Kern_f = \{\vec{0}\} \iff f$ *injektiv.*

Beweis.
(a) $f(\vec{0}) = f(0v) \overset{\text{Def.}}{=} 0 \cdot f(v) = \vec{0}$.
(b) $f(-v) = f((-1) \cdot v) = (-1) \cdot f(v) = -f(v)$
(c) $\Longrightarrow$ Sei $Kern_f = \{\vec{0}\}$. Z.z.: f ist injektiv, d.h.
$f(v_1) = f(v_2) \Longrightarrow v_1 = v_2$.
$f(v_1) = f(v_2) \iff f(v_1) - f(v_2) = \vec{0} \iff f(v_1 - v_2) = \vec{0}$.
Da $Kern_f = \{\vec{0}\}$, gibt es nur einen Vektor, der auf $\vec{0}$ abgebildet wird, nämlich $\vec{0}$. Dann ist $v_1 - v_2 = \vec{0}$, also $v_1 = v_2$.
(c) $\Longleftarrow$ Sei f injektiv. Dann folgt aus $f(u) = f(v)$, dass $u = v$. Wir setzen $u := \vec{0}$.Wir erhalten, dass aus $\underbrace{f(\vec{0})}_{=\vec{0} \text{ nach (a)}} = f(v)$ folgt, dass $v = \vec{0}$.
Also $Kern_f := \{v \in V \mid f(v) = \vec{0}\} = \{\vec{0}\}$. □

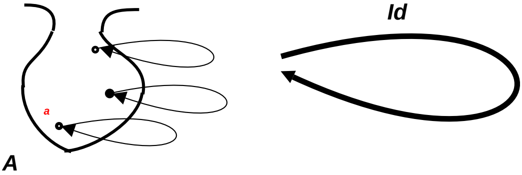
Verkettung von Abbildungen

A, B, C seien die Mengen, $f : A \to B$, $g : B \to C$ seien Abbildungen.
Die Verkettung (Komposition, Superposition, Hintereinanderausführung) von Abildungen g und f ist die Abbildung $g \circ f : A \to C$,
$g \circ f(x) := g(f(x))$.
Bsp: $A = B = C = \mathbb{R}$, $f(x) := x^3$, $g(x) := \cos(x)$. Dann ist die Verkettung $g \circ f(x) = \cos(x^3)$.



Inverse Abbildung

Bezeichnung: Für jede Menge A definieren wir $Id_A : A \to A$, $Id(a) = a$ $(\forall a \in A)$.



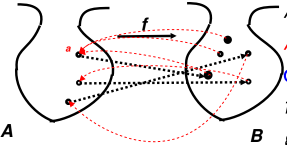
Wicht. Bsp: $\forall\ f : A \to B$ gilt:
$f \circ Id_A = f$ (weil $\forall a \in A$ $f \circ Id_A(a) = f(Id_A(a)) = f(a)$)
$Id_B \circ f = f$ (weil $\forall a \in A$ $Id_B \circ f(a) = Id_B(f((a))) = f(a)$)

Def. *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \to A$ heißt eine links- (bzw. rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Lemma 12 *$f : A \to B$ sei eine Abbildung und $A \neq \varnothing$. Dann gilt:*

1. *f ist injektiv $\Longleftrightarrow$ f hat eine Linksinverse.*
2. *f ist surjektiv $\Longleftrightarrow$ f hat eine Rechtsinverse.*

Beweis:



(1) $\Rightarrow$: f sei als injektiv vorausgesetzt. Sei $a \in A$. Die gesuchte linksinverse Abbildung $g : B \to A$ wird nun definiert durch $g(y) := x$, falls y in der Bildmenge von f liegt, und $f(x) = y$ ist (da Es f injektiv ist, ergibt sich x eindeutig aus y) und $g(y) := a$, falls y nicht in der Bildmenge von f liegt.

gilt: $g \circ f(x) \overset{Def.}{=} g(f(x)) \overset{y:=f(x)}{=} g(y) \overset{g(y)=x}{=} x = Id_A(x)$.

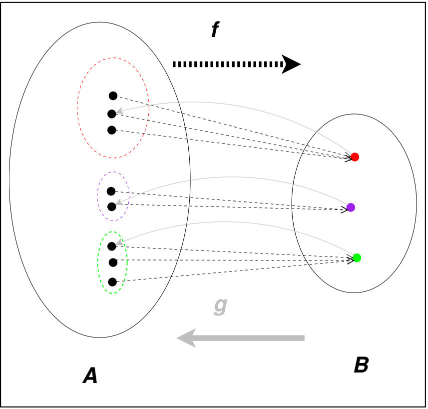
Bemerkung Die Linksinverse ist nicht immer eindeutig – das Element a können wir beliebig auswählen.

Beweis (1) $\Leftarrow$:

Es gelte $g \circ f = \mathrm{Id}_A$. Nun seien $x, y \in A$ mit $f(x) = f(y)$ gegeben. Wir müssen $x = y$ zeigen. Dazu wird g auf die Gleichung $f(x) = f(y)$ angewendet, was $g(f(x)) = g(f(y))$ ergibt. Mit der Eigenschaft der Linksinversen haben wir $\mathrm{Id}_A(x) = \mathrm{Id}_A(y)$, also $x = y$.

Beweis (2): f ist surjektiv $\Longleftrightarrow$ f hat eine Rechtsinverse.

$\Longrightarrow$: $f : A \to B$ werde als surjektiv vorausgesetzt. Für jedes Element $y \in B$ gibt es also mindestens ein $x \in A$ mit $f(x) = y$.



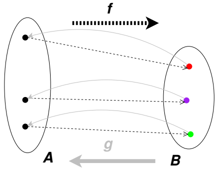
$g\colon B \to A$ sei eine Funktion, die jedem $y \in B$ ein Urbild zuweist. Dann gilt für jedes $y \in B$:
$f \circ g(y) = f(g(y)) = f(x) = y = \mathrm{Id}_B(y)$.

$\Longleftarrow$: Es gelte $f \circ g = \mathrm{Id}_B$. Nun sei $y \in B$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass $y \in Bild_f$ ist, also ein $x \in A$ mit $f(x) = y$ angeben.
Die Festlegung $x := g(y)$ leistet das Verlangte, denn
$f(x) = f(g(y)) = f \circ g(y) = \mathrm{Id}_B(y) = y$. $\square$

Lemma 13 *Sei $f : A \to B$. Dann gilt:*

$$f \text{ ist Bijektion} \iff \begin{array}{l} \exists g : B \to A \\ \text{s.d. } g \circ f = Id_A \text{ und } f \circ g = Id_B. \end{array}$$

Ferner gilt: Solches g ist eindeutig



Beweis: „$\Longleftarrow$“: Nach Lemma 12 ist f injektiv und surjektiv, also bijektiv.

„$\Longrightarrow$“: Zuerst **Existenz**. f sei surjektiv und injektiv. Nach Lemma 12 $\exists g_1$ und g_2 mit $g_1 \circ f = Id_A$, $f \circ g_2 = Id_B$. Z.z.: $g_1 = g_2$.

Für beliebiges $b \in B$ gilt:

$$g_1(b) = g_1(Id_B(b)) = g_1(f(g_2(b))) = g_1(f(g_2(b))) = Id_A(g_2(b)) = g_2(b). \quad (*)$$

Also $\forall b \in B$ gilt $g_1(b) = g_2(b)$, also $g_1 = g_2$.
Dann hat $g := g_1 = g_2$ die Eigenschaft $g \circ f = Id_A$ und $f \circ g = Id_B$.

Eindeutigkeit: Angenommen, zwei Abbildungen g_1 und g_2 haben die gewünschte Eigenschaft: $g_i \circ f = Id_A$, $f \circ g_i = Id_B$ $(i = 1, 2)$. Dann ist g_1 eine Linksinverse (also $g_1 \circ f = Id_A$) und g_2 eine Rechtsinverse ($f \circ g_2 = Id_B$), weil beide sowohl Links- als auch Rechtsinverse sind. Wie wir in $(*)$ gezeigt haben, ist dann $g_1 = g_2$. $\square$

Bezeichnung. *Ein solches g werden wir mit f^{-1} bezeichnen und die Inverse nennen.*

Definition eines Isomorphismus

Seien $(V, +, \cdot)$ und $(U, +, \cdot)$ Vektorräume. Eine bijektive lineare Abbildung $f : V \to U$ heißt ein Isomorphismus. Wenn ein Isomorphismus $f : V \to U$ existiert, dann heißen die Räume V und U isomorph.

Die Inverse Abbildung zu einem Isomorphismus ist ebenfalls ein Isomorphismus

Lemma 14. Sei $f : V \to U$ ein Isomorphismus. Dann ist $f^{-1} : U \to V$ auch ein Isomorphismus.

Bemerkung. Die Existenz von f^{-1} folgt aus Lemma 13, weil ein Isomorphismus nach Definition bijektiv ist.

Beweis. Z.z.: f^{-1} ist (a) linear, (b) bijektiv.
(a) Abg. bzgl. Addition

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(u+v) &= f^{-1}\left(f \circ f^{-1}(u) + f \circ f^{-1}(v)\right) && \text{weil } f \circ f^{-1} = Id_U \\
&= f^{-1}\left(f\left(f^{-1}(u) + f^{-1}(v)\right)\right) && \text{weil } f \text{ linear ist} \\
&= f^{-1} \circ f\left(f^{-1}(u) + f^{-1}(v)\right) && \text{Definition von „}\circ\text{“} \\
&= f^{-1}(u) + f^{-1}(v) && \text{weil } f^{-1} \circ f = Id_V
\end{aligned}
$$

Abg. bzgl. Multiplikation zeigt man analog.
(b) Bijektivität. Da $f \circ f^{-1} = Id_U$, hat f^{-1} eine Linksinverse. Da $f^{-1} \circ f = Id_V$, hat f^{-1} auch eine Rechtsinverse. Dann ist f^{-1} eine Bijektion nach Lemma 13. □