Wiederholung: lineare Abbildungen

Def. *Es seien* $(V, +, \cdot)$ *und* $(U, +, \cdot)$ *zwei Vektorräume. Eine Abbildung* $f : V \to U$ *heißt linear, falls für alle Vektoren* $v_1, v_2 \in V$ *und für jedes* $\lambda \in \mathbb{R}$ *gilt:*

(a) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$,

(b) $f(\lambda v_1) = \lambda f(v_1)$.

Übung. *Sei* $f : V \to U$ *linear. Dann gilt:*
$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)$.

In der Tat,

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \overset{(a)}{=} f(\lambda_1 v_1) + f(\lambda_2 v_2) \overset{(b)}{=} \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2).$$

Übung. *Sei* $f : V \to U$ *linear. Dann gilt:*
$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \lambda_3 f(v_3)$.

In der Tat, $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3) \overset{(a)}{=} f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) + f(\lambda_3 v_3) \overset{(a)}{=}$
$f(\lambda_1 v_1) + f(\lambda_2 v_2) + f(\lambda_3 v_3) \overset{(b)}{=} \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \lambda_3 f(v_3)$.

Analog. Es gilt: $f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_n f(v_n)$
(mehrmals das Trick anwenden)

Definition von Isomorphismus noch einmal

Def $(V, +, \cdot)$, $(U, +, \cdot)$ *seien Vektorräume. Eine lineare Abbildung* $f : V \to U$ *heißt*

Monomorphismus	*falls injektiv*	
Epimorphismus	*falls surjektiv*	
Isomorphismus	*falls bijektiv*	$\longleftarrow$ *heute benutzen*
Endomorphismus	*falls* $V = U$	$\longleftarrow$ *heute besprochen*

Die Vektorräume V *und* U *heißen* *Isomorph*, *falls ein Isomorphismus* $f : V \to U$ *existiert.*

Logic des Abschnitts „Vektorraum“: synthetische Aufbau

- Definition — in Vorl. 2 gegeben — durch Eingenschaften (= „Axiomen“)
- Einige Eigenschaften, die man aus Axiomen durch logischen Schlussfolgerungen bekommt — alle Vorlesungen bis jetzt — und eine grosse Familie von Beispiele $\mathbb{R}^n$ – in Vorl. 3, 4 eingeführt
- Eine Aussage, dass alle Vektorräumen den Vektorräumen aus der Familie von Beispiele „gleich sind“

Frage: Was soll man hier unter „gleich sind“ verstehen?

Antwort: Isomorph.

Haupsatz der linearen Algebra

Satz 11(Hauptsatz der linearen Algebra) *Zwei endlichdimensionalen Vektorräume sind genau dann isomorph, wenn sie gleiche Dimension haben.*

Satz 11'(Hauptsatz der linearen Algebra) – einfachere Version *Jeder Vektorraum der Dimension n ist zu $\mathbb{R}^n$ isomorph.*
Bemerkung. Die Satze 11, 11' sind äquivalent. Die Richtung Satz 11 $\Longrightarrow$ Satz 11' ist einfach: weil $dim(\mathbb{R}^n) = n$, ist nach Satz 11 ein Vektorraum der Dimension n zu $\mathbb{R}^n$ isomorph. Die (andere) Richtung „$\Longleftarrow$“ ist ein bisschen aufwendige; wir werden sie später beweisen.

Beweis $\Longrightarrow$ (für Satz 11 und Satz 11')

Z.z.: Sind V und U Isomorph, so ist $dim(U) = dim(V)$. Sei $f : V \to U$ ein Isomorphismus. Sei $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis in V. Wir zeigen, dass die $n-$elementige Menge $\{f(v_1), ..., f(v_n)\} \subseteq U$ eine Basis in $Bild_f \subseteq U$ ist, d.h., es ist linearunabhängig und erzeugend.

Bemerkung. Da ein Isomorphismus nach der Definition injektiv ist, sind die Vektoren $f(v_1), ..., f(v_n)$ verschieden; die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ ist deswegen tatsächlich $n-$elementig.

Linearunabhängigkeit: Sei $\lambda_1 \cdot f(v_1) + ... + \lambda_n \cdot f(v_n) = \vec{0}$. Um Linearunabhängigkeit von $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ zu zeigen, müssen wir zeigen, dass alle λ's gleich 0 sind.
Da f linear ist, ist $\lambda_1 \cdot f(v_1) + ... + \lambda_n \cdot f(v_n) = f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n)$; also $f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) = \vec{0}$.
Da f ein Isomorphismus ist, ist f injektiv, deswegen ist $\mathrm{Kern}_f \overset{\text{Lemma 11}}{=} \{\vec{0}\}$, deswegen aus $f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) = \vec{0}$ folgt $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = \vec{0}$ (weil $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n \in \mathrm{Kern}_f$ und $\mathrm{Kern}_f = \{\vec{0}\}$ ist).
Da $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis ist, ist sie linearunabhängig. Dann aus $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = \vec{0}$ folgt $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$, was unseres Ziel war.

$\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ ist erzeugend:

Z.z.: jedes $u \in U$ kann man als Linearkombination von $f(v_1), ..., f(v_n)$ bekommen.

Da die Abbildung f surjektiv ist, ist jeder Vektor von U das Bild eines Vektors aus V, also $\exists v \in V$ mit $f(v) = u$. Da $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis ist, kann man ein beliebiges Element von V als Linearkombination von $\{v_1, ..., v_n\}$ bekommen, also $\exists \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = v$.

Dann gilt:

$u = f(v) = f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) \overset{\text{Linearität}}{=} \lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_n f(v_n)$.
Also, u ist tatsächlich Linearkombination von Elementen aus $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$, $\square$

Da der Satz 11 (oder 11') sehr wichtig ist, werde ich separat die Satze 11, 11' in der Richtung „$\Longleftarrow$“ beweisen. Ich werde zuerst Satz 11' beweisen, d.h., ich werde zeigen, dass jeder $(V, +, \cdot)$ von Dimension n zu $\mathbb{R}^n$ isomorph ist.

Beweis von Satz 11' in der Richtung „$\Longleftarrow$". Wir mussen beweisen dass, jeder Vektorraum $(V,+,\cdot)$ der Dimension n zu $\mathbb{R}^n$ isomorph ist. $(V,+,\cdot)$ sei $n-$Dimensional, sei $B=(v_1,...,v_n)$ ein Basis-Tupel in $(V,+,\cdot)$. Wir betrachten die Koordinatenabbildung $C_B : V \to \mathbb{R}^n$. Nach Definition von Koordinatenabbildung gilt:
$C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$. Wir zeigen, dass C_B ein Isomorphismus ist, d.h., C_B linear, injektiv und surjektiv ist.

- Linearität: Lemma 10. (Sagt, dass die Koordinatenabbildung linear ist)
- Injektivität: Nach Lemma 11c genugend es zu zeigen, dass $Kern_{C_B} = \{\vec{0}\}$.
  D.h., wir mussen zeigen, dass $C_B(v) = \vec{0} \implies v = \vec{0}$.
  D.h., wir mussen zeigen, dass $0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_n = \vec{0}$, was offensichtlich ist.
- Surjektivität: Wir mussen zeigen, dass jedes
  $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ Bild eines $v \in V$ ist. Aber $C_{B(\lambda_1 \cdot v_1 + ... + \lambda_n \cdot v_n)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

Warum war Beweis so einfach? Weil wir Vorarbeit vorher gemacht haben.

Vor Beweis des Satzes 11 in „$\Longleftarrow$“ Richtung brauchen wir Vorarbeit. Vor dem Beweis: **Frage** $f : V \to \mathbb{R}^2$ sei eine lineare Abbildung. Für die Vektoren v_1, $v_2 \in V$ gelte: $f(v_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Was ist $f(v_1 + v_2)$?

Antwort.

$$f(v_1 + v_2) \overset{\text{Linearität}}{=} f(v_1) + f(v_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Frage Was ist $f(2v_1 - 3v_2)$?

Antwort. $f(2v_1 - 3v_2) \overset{\text{Linearität}}{=} f(2v_1) + f((-3)v_2) \overset{\text{Linearität}}{=}$

$$2f(v_1) - 3f(v_2) = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Wir haben gesehen, dass (in den Beispiele oben) Bilde von Vektoren bestimmen die Bilde deren Linearkombinationen eindeutig. Wir werden jetzt eine Veralgemeinerung dieser Aussage als Lemma formulieren und beweisen.

Lemma 15 $(V,+,\cdot)$ *und* $(U,+,\cdot)$ *seien* $n-$*dimensionale Vektorräume,* $(v_1,...,v_n)$ sei ein Basis-Tupel in V und $(u_1,...,u_n)$ sei ein $n-$Tupel der Vektoren aus U. Dann gilt: Es existiert genau eine lineare Abbildung $f:V\to U$ so dass $f(v_i)=u_i$ für alle $i=1,...,n$.

Bsp. Sei $V=U=\mathbb{R}^3$, als (v_1,v_2,v_3) nehmen wir die Standardbasis $\left(v_1:=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, v_2:=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, v_3:=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, und als (u_1,u_2,u_3) nehmen wir $\left(u_1:=\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}, u_2:=\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}, u_3:=\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}\right)$.

Lass uns die Formel für die lineare Abbildung f, die $v_1\longmapsto u_1$, $v_2\longmapsto u_2$, $v_3\longmapsto u_3$, finden (ähnlich wie in Fragen–Antworten oben).

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=f\left(x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=$$

$$f\left(x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)+f\left(y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)+f\left(z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=x\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y+3z\\4x+5y+6z\\7x+8y+9z\end{pmatrix}$$

Die Abbildung ist linear (Hausaufgabe 2d Blatt 4) und hat die Eigenschaft $f(v_i)=u_i$ (i=1,2,3).

Beweis von Lemma 15. Zuerst Existenz.

Wir werden diese Abbildung kostruieren, die Methode ist analog zu Fragen-Antworten oben und Bsp. nach Lemma 15. Sei $w \in V$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ seien Koordinaten von w in der Basis $(v_1, ..., v_n)$, d.h.
$w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n = \sum_{i=1}^n x_i v_i$
Wir setzen

$$f(w) := x_1 u_1 + x_2 u_2 + ... + x_n u_n = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i. \qquad (\star)$$

Zu zeigen: (i) $f(v_i) = u_i$ und (ii) f ist linear.
Wir zeigen (i): Der Koordinatenvektor von v_i in der Basis $(v_1, ..., v_n)$ ist

$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{−te Zeile}$, weil $v_i = 0 \cdot v_1 + ... + \underbrace{1 v_i}_{i\text{−te Stelle}} + ... + 0 \cdot v_n$, also

$f(v_i) \overset{(\star)}{=} 0 \cdot u_1 + ... + 1 \cdot u_i + ... + 0 \cdot u_n = u_i$ wie behauptet.

Wir zeigen (ii): f ist linear

$w, u \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Nach Lemma 10, die Koordinaten von $w + u$ sind $\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$. Also,

$f(w+u) \overset{Lemma\ 10}{=} f(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) v_i) \overset{(\star)}{=} \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) u_i =$
$\sum_{i=1}^n x_i u_i + \sum_{i=1}^n y_i u_i \overset{(\star)}{=} f(w) + f(v)$.

Ähnlich, nach Lemma 10, die Koordinaten von λw sind $\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$. Also,

$f(\lambda w) = \sum_{i=1}^n \lambda x_i u_i = \lambda \sum_{i=1}^n x_i u_i = \lambda f(w)$.

Eindeutigkeit

Die Abbildung $\tilde{f} : V \to U$ erfülle die Voraussetzungen von Lemma 15, d.h., $\tilde{f}$ sei linear und $\tilde{f}(v_i) = u_i$ für $i = 1, ..., n$. Wir müssen zeigen, dass $\forall w \in V \quad \tilde{f}(w) = f(w)$, wobei f die die oben in $(\star)$ konstruierte Abbildung ist.

$w \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, d.h. $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n$. Wir haben

$\tilde{f}(w) = \tilde{f}(x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n) \overset{\text{Linearität}}{=} \tilde{f}(x_1 v_1) + \tilde{f}(x_2 v_2) + ... + \tilde{f}(x_n v_n) \overset{\text{Linearität}}{=} x_1 \tilde{f}(v_1) + x_2 \tilde{f}(v_2) + ... + x_n \tilde{f}(v_n) \overset{\text{Voraussetz.}}{=} x_1 u_1 + x_2 u_2 + ... + x_n u_n \overset{\text{Def. von } f}{=} f(w)$ $\square$

Beweis von Satz 11 in „$\Longleftarrow$“ Richtung

Seien $(V, +, \cdot)$ und $(U, +, \cdot)$ $n-$dimensionale Vektorraume mit Basen jeweils $(v_1, ..., v_n)$ und $(u_1, ..., u_n)$. Das Ziel ist zu zeigen, dass es einen Isomorphismus $f : V \to U$ existiert; wir werden den Isomorphismus mit Hilfe von Lemma 15 konstruieren.

Nämlich, wir betrachten die lineare Abbildung $f : V \to U$ sodass $f(v_i) = u_i$; $i = 1, ..., n$. Solche Abbildung existiert (und ist eindeutig) nach Lemma 15. Wir zeigen jetzt, dass f ein Isomprphismus ist; d.h.; wir zeigen dass f injektiv und surjektiv ist.

Injektivität: Angenommen, $f(v) = f(\tilde{v})$. Z.z.: $v = \tilde{v}$.
Die Vektoren v und $\tilde{v}$ habe jeweils die Koordinatenvektore $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\lambda}_n \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$f(v) = f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) \stackrel{\text{Linearität}}{=} \lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_n f(v_n) \stackrel{\text{Konstr. von } f}{=} \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n,$$

also $f(v)$ hat den Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ in der Basis $(u_1, ..., u_n)$.

Analog gilt:

$$f(\tilde{v}) = f(\tilde{\lambda}_1 v_1 + ... + \tilde{\lambda}_n v_n) \stackrel{\text{Linearität}}{=} \tilde{\lambda}_1 f(v_1) + ... + \tilde{\lambda}_n f(v_n) \stackrel{\text{Konstr. von } f}{=} \tilde{\lambda}_1 u_1 + ... + \tilde{\lambda}_n u_n.$$

Also auch $f(\tilde{v})$ hat den Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\lambda}_n \end{pmatrix}$ in der Basis $(u_1, ..., u_n)$.

Da nach Voraussetzungen $f(\tilde{v}) = f(v)$ ist, sind die Koordinatenvektoren von $f(\tilde{v})$ und $f(v)$ auch gleich, also ist $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\lambda}_n \end{pmatrix}$. Dann sind

$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\lambda}_i v_i = \tilde{v}$. Die Abbildung f ist also injektiv.

Die Abbildung f ist surjektiv

Sei $u \in U$ ein beliebiger Vektor. Wir mussen zeigen, dass $\exists v \in V$ mit $f(v) = u$.

Der Vektor u habe den Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ in der Basis $(u_1, ..., u_n)$, d.h., $u = \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n$. Wir setzen $v := \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n \in V$.

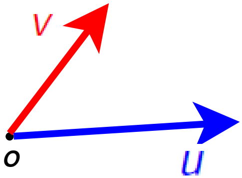
Es gilt: $f(v) = f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) \overset{\text{Linearität}}{=}$ $\lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_n f(v_n) \overset{\text{Konstr. von } f}{=} \lambda_1 u_1 + ... \lambda_n u_n = u$.
Wir haben gesehen, dass ein beliebiger Vektor u das Bild eines Vektors $v \in V$ ist; Surjektivität von f ist damit bewiesen.

Also, die Abbildung $f : V \to U$ ist linear und $\underbrace{\text{surjektiv und injektiv}}_{\text{bijektiv}}$, ist deswegen ein Isomorphismus. Die Vektorraume V und U sind deswegen isomorph, $\square$

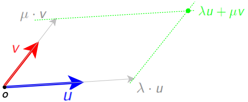
Bsp: geometrische Ebene ist isomorph zu $\mathbb{R}^2$

Wiederholung: Sei E eine Ebene, $O \in E$ und V die Menge $V := \{\text{gerichtete Strecken mit Anfangspunkt } O \text{ und Endpunkt auf } E\}$ mit „Vektoraddition“ als Addition und Streckung/Stauchung als Multiplikation.

Wir haben gezeigt, dass eine Basis von $(V, +, \cdot)$ aus zwei beliebigen Vektoren $u, v \in V$ besteht mit $u \neq \vec{0} \neq v$ und $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \lambda u \neq v$



Also ist V zu $\mathbb{R}^2$ isomorph nach Satz 11'.
Außerdem haben wir in Beweis von Satz 11 den Isomorphismus direkt konstruiert: $f : \mathbb{R}^2 \to V$ bildet $\binom{\lambda}{\mu} \in \mathbb{R}^2$ auf $\lambda \cdot u + \mu \cdot v$ ab.



Bemerkung. Die Abbildung f ist eigentlich die inverse Abbldung zur im Beweis von Satz 11' konstruierten Isomorphismus.

Ein bisschen Philosophie

Geometrie ist das Studium von mathematischen Modellen des Raumes, der uns auf Grund der Anschauung vertraut ist.

Die Geometrie gehört zu den ältesten Wissenschaften überhaupt. Bemerkenswertes geometrisches Wissen finden wir bereits in den orientalischen Hochkulturen des 5.–3. Jahrhunderts vor unserer Zeitrechnung. Praktische Probleme aus der Messkunde, der Baukunst, der Astronomie und der Navigation wurden abstrahiert und führten zu geometrischen Regeln. Mit Hilfe von Logic kann man aus diesen Regeln neue Aussagen bekommen, und anwenden.

Schematisch könnte man es wie folgt vorstellen:

Empirische Wissenschaft	**Formal-logische Theorie**
Erfahrungswissenschaft wie die Physik	Keine Begründung durch Erfahrung, keine anschaulichen Argumente
Experimente, Beobachtungen Aussagen über die Natur	Formale Ableitung von Sätzen nach Regeln der Logik aus Axiomen (nicht weiter begründetes System von Grundtatsachen) Anschauung nur als *Hinweis* auf Beweisführungen
Deutung der Theorie in der Welt	Grundlage für Theorien der Physik
Schule Alltag Technik	Hochschulmathematik Vermittlung der Idee des Beweisens auch in der Schule (so genanntes lokales Ordnen)

Was haben wir bis jetzt gemacht?

Wir haben die Eigenschaften genommen, die in Physik öfter vorkommen und empirisch nachgewiesen wurde – die Eigenschaften I–VIII des Vektorraums.

Dann haben wir alle mögliche (endlichdimensionale) Vektoräumen geschrieben — Satz 11 — alle sind zu $\mathbb{R}^n$ isomorph.

In anderen Worten, wir haben vollständig die alle mögliche „mathematischen Modellen des Raumes" verstanden, in welchen die Axiomen I – VIII erfüllt sind.

Außerdem kann man die mathematischen Methode, Ideen und Tricks aus Theorie von Vektorräumen auch in anderen Branchen der Mathematik, vor allen in Analysis benutzen – Sie werden es während des Studiums mehrmals sehen.

Def – Wiederholung *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Das Bild von f ist die folgende Teilmenge von U:*
$Bild_f = \{u \in U \ \ so\ dass\ es\ gibt\ ein\ Element\ v \in V\ \ mit\ f(v) = u\}.$
(Andere Bezeichnung: $f(V)$ – wird in Analysis-Vorlesung verwendet)

Der Kern von f ist die folgende Teilmenge von V:
$Kern_f = \{v \in V \ \ so\ dass\ f(v) = \vec{0}\}.$
(Andere Bezeichnung: $f^{-1}(\vec{0})$; wird oft in Analysis verwenden. Man bemerke aber dass f^{-1} nicht die inverse Abbildung nach unseren Definitionen ist; außerdem ist f^{-1} keine Abbildung. Also $f^{-1}(\vec{0})$ ist nur die Bezeichnung.)

Bsp. Betrachte die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt: $\mathrm{Bild}_f = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \ : \ \text{wobei } x, y \in \mathbb{R}\right\}.$

$\mathrm{Kern}_f = \left\{\vec{0}\right\}$ (wird auf der nächsten Folie besprochen)

Satz 12 (1. Dimensionsformel) *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:*

(a) *$Bild_f$ ist ein Untervektorraum von U.*

(b) *$Kern_f$ ist ein Untervektorraum von V.*

(c) *Ist V endlichdimensional, so gilt:*
$dim(V) = dim(Bild_f) + dim(Kern_f)$.

Bsp. Betrachte die Linearabbildung aus der Bsp. oben

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt: $\mathrm{Kern}_f = \{\vec{0}\}$, weil
$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; also $dim(\mathrm{Kern}_f) = 0$.
$\mathrm{B}ild_f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$ ist 2-dimensional (mit der Basis
$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$; also ist die Dimensionsformel
$\underbrace{\dim(V)}_{2} = \underbrace{\dim(\mathrm{Bild}_f)}_{2} + \underbrace{\dim(\mathrm{Kern}_f)}_{0}$ in diesem Bsp. richtig.

Beweis (a) Bild_f ist ein Untervektorraum von U

Beweis (a): Seien $u_1, u_2 \in \mathrm{Bild}_f$, d.h. $u_1 = f(v_1)$, $u_2 = f(v_2)$.
Dann gilt:

- $u_1 + u_2 = f(v_1) + f(v_2) \overset{\text{Linearität}}{=} f(v_1 + v_2) \in \mathrm{Bild}_f$
- $\lambda u_1 = \lambda f(u_1) \overset{\text{Linearität}}{=} f(\lambda u_1) \in \mathrm{Bild}_f$.

Beweis (b) Kern_f ist ein Untervektorraum von V

Beweis (b): Seien $v_1, v_2 \in \mathrm{Kern}_f$, d.h. $f(v_1) = f(v_2) = \vec{0}$. Dann gilt:

- $f(v_1 + v_2) \overset{\text{Linearität}}{=} f(v_1) + f(v_2) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d.h. $v_1 + v_2 \in \mathrm{Kern}_f$.
- $f(\lambda v_1) \overset{\text{Linearität}}{=} \lambda f(v_1) = \lambda \vec{0} = \vec{0}$, d.h. $\lambda v_1 \in \mathrm{Kern}_f$.

Konstruktion einer Basis in Bild_f

Kern_f ist ein Untervektorraum des endlichdimensionalen Vektorraums V und ist deswegen auch nach Folgerung (d) aus Satz 10 endlichdimensional. Sei $\{v_1, ..., v_k\}$ eine Basis von Kern_f. Nach Folgerung (c) können wir die Basis $\{v_1, ..., v_k\}$ bis zum einer Basis in V erganzen: es gibt $v_{k+1}, ..., v_n$ so dass $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis ist. Wir zeigen: $\{f(v_{k+1}), ..., f(v_n)\}$ ist eine Basis in $Bild_f \subseteq U$. Wir mussen zeigen, dass $\{f(v_{k+1}), ..., f(v_n)\}$ linearunabhängig und erzeugend ist.

Wir zeigen: $\{f(v_{k+1}), ..., f(v_n)\}$ ist erzeugend

Wir müssen zeigen, dass man jedes $u \in \mathrm{Bild}_f$ als eine Linearkombination von Elementen $f(v_{k+1}), ..., f(v_n)$ darstellen kann. Offensichtlich, kann man jedes $u \in \mathrm{Bild}_f$ als eine Linearkombination von Elementen $f(v_1), ..., f(v_n)$ darstellen. In der Tat, jedes $u \in \mathrm{Bild}_f$ ist Bild des irgentwelchen Vektors $v \overset{\text{Weil } \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ eine Basis ist}}{=} \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$, also

$$u = f(v) = f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_n f(v_n).$$

Aber $f(v_1) = f(v_2) = ... = f(v_k) = \vec{0}$, da $v_1, ..., v_k \in \mathrm{Kern}_f$. Dann $u = \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + \lambda_{k+2} f(v_{k+2}) + ... + \lambda_n f(v_n)$. Also ist $\mathrm{span}(\{f(v_{k+1}), ..., f(v_n)\}) = \mathrm{Bild}_f$.

Wir zeigen: $\{f(v_{k+1}), ..., f(v_n)\}$ ist linear unabhängig

Angenommen ist die Linearkombination $\lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}$.
Z.z.: $\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = ... = \lambda_n = 0$.
Wir haben:

$$\underbrace{1\vec{0} + 1\vec{0} + ... + 1\vec{0}}_{k \text{ mal}} + \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}.$$

Da $f(v_1) = f(v_2) = ... = f(v_k) = \vec{0}$,

$$1 f(v_1) + 1 f(v_2) + ... + 1 f(v_k) + \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}.$$

Weil f linear ist,

$$f(1 v_1 + 1 v_2 + ... + 1 v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + ... + \lambda_n v_n) = \vec{0}.$$

Also, $1 v_1 + 1 v_2 + ... + 1 v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + ... + \lambda_n v_n \in \mathrm{Kern}_f$. Dann ist er die Linarkombination von Elementen $v_1, ..., v_k$ und deswegen (Satz 7(b)) $\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = ... = \lambda_n = 0$.
Also gilt: $dim(\mathrm{Bild}_f) = [\text{Anzahl von Elementen in } \{f(v_{k+1}), ..., f(v_n)\}] = n - k$. Dann gilt:
$\underbrace{dim(V)}_{n} = \underbrace{dim(\mathrm{Kern}_f)}_{k} + \underbrace{dim(\mathrm{Bild}_f)}_{n-k}$, $\square$

Anwendung 1. Dimensionsformel für Endomorphismen

Def. — Wied: Endomorphismus = lineare Abbildung $f : V \to V$ von Vektorraum V auf sich selbst.

Folgerung. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus von endlichdimensionalen Vektorraum V. Dann gilt:

$$f \text{ ist surjektiv } \iff f \text{ ist injektiv.}$$

Bemerkung. In Hausaufgabe 1 Blatt 5 mussten Sie mehrere Beispiele konstruieren – Sie werden sehen, dass falls U und V verschiedene Dimensionen haben, ist die Aussage der Folgerung nicht richtig.

Idea des Beweises: wir spielen mit der 1. Dimensionsformel (Satz 12): es gilt:

$$\underbrace{\dim(V)}_{n} = \dim(\mathrm{Bild}_f) + \dim(\mathrm{Kern}_f)$$

Beweis (surjektiv) $\Longrightarrow$ (injektiv).

Ist f surjektiv, so ist $Bild_f = V$. Wir haben

$$\begin{array}{ccccc} \dim(V) & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & \dim(\mathrm{Kern}_f) \\ n & = & n & + & ? \end{array} .$$

Dann ist $dim(Kern_f) = 0$, folglich $Kern_f = \{\vec{0}\}$. Nach Lemma 11c ist f injektiv.

Beweis (surjektiv) $\Longleftarrow$ (injektiv).

Ist f injektiv, so ist $Kern_f = \{\vec{0}\}$. Dann ist $dim(Kern_f) = 0$.
Wir haben

$$\begin{array}{ccccc} \dim(V) & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & \dim(\mathrm{Kern}_f) \\ n & = & ? & + & 0 \end{array},$$

folglich $dim(Bild_f) = n$. Dann enthält eine Basis B in $Bild_f$ $n = dim(V)$ linear unabhängige Vektoren. Nach Folgerung (a) aus Satz 10 ist dann B eine Basis in V, deswegen $\mathrm{Bild}_f = \mathrm{span}(B) = V$, $\square$

Wiederholung und Plan:

- Ziel: alle linearen $f : V \to U$ zu beschreiben, wobei V, U Vektorräume sind, s.d. $dim(V) = n < \infty$, $dim(U) = m < \infty$.
- Wir benutzen: Hauptsatz 11' der linearen Algebra:
  - $V \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{R}^n$, $U \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{R}^m$.
  - Die Koordinatenabbildung $C_{B_V} : V \to \mathbb{R}^n$, $C_{B_U} : U \to \mathbb{R}^m$ sind Isomophismen, wobei B_V, B_U Basen in V bzw. U sind.
- Strategie:
  - Wir beschreiben alle linearen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (Heute, Schema)
    - Wir konstruieren ein Hauptbeispiel (Matrizen, nächste Folie)
    - Wir zeigen, dass alle linearen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ wie im Hauptbeispiel sind.
  - Wir untersuchen, wie sich die Beschreibung ändert, wenn wir andere Basen B'_V, B'_U in V bzw. U wählen.
    - später

Hauptbeispiel: Matrizen als lineare Abbildungen

Def. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine $(m \times n)$- Matrix ist ein rechteckiges Schema*

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

wobei alle $a_{ij} \in \mathbb{R}$. **Bsp:** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ist eine (2×3)-Matrix, $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$ ist eine (3×2)-Matrix

Bemerkung *Mathematisch exakt ist eine $(m \times n)$-Matrix eine Abbildung $A : \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\} \to \mathbb{R}$. Das Bild von $(i, j) \in \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\}$ ist dabei das, was im Schema an der $ij-$Stelle steht.*

Eine $(m \times n)$ Matrix A definiert eine Abbildung $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung heißt Multiplikation der Matrix mit dem Vektor, statt $f_A(v)$ schreibt man gewöhnlich Av ;

Z.B. $f_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 4 + 9 \\ 4 + 10 + 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 32 \end{pmatrix}.$$

Für den j-ten Eintrag des Produkts ist nur die j-te Reihe der Matrix und der Vektor verantwortlich:

$$\begin{pmatrix} ? & ? & \ldots & ? \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ? & ? & \ldots & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ \vdots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n \\ \vdots \\ ? \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt einer Zeile der Matrix mit einem Vektor und mnemonische Regel

Sei $(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots, a_{in})$ die $i-$te Zeile einer Matrix $A = (a_{ij})$ und $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Als Skalarprodukt dieser Zeile mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ verstehen wir die Zahl $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$.

Mnemonische Regel: Auf dem $i-$ten Platz des Produkts von $(m \times n)-$Matrix A und $v \in \mathbb{R}^n$ steht das Skalarprodukt der i-ten Zeile der Matrix mit dem Vektor:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Mnemonische Regel Hilft auch die Parameter der Matrizen und Vektoren abzustimmen: Da für ein Skalarprodukt von Zeile und Vektor die Anzahl der Elemente gleich sein muss, multiplizieren wir eine $(m \times n)-$Matrix mit einem Vektor aus dem $\mathbb{R}^n$. Das Ergebniss hat dann genau soviel Zeilen wie die Matrix.

Mnemonische Regel:

Auf dem $i-$ten Platz des Produkts steht das Skalarprodukt der i-ten Zeile der Matrix mit dem Vektor

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ -2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Mnemonische Regel: Auf dem $i-$ten Platz des Produkts steht das Skalarprodukt der i-ten Zeile der Matrix mit dem Vektor

Aufgabe für Sie jetzt: Multiplizieren Sie die Matrix A mit dem Vektor v:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \\ 4 & 9 & 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Antwort:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \\ 4 & 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1*3+2*2+2*3 \\ 5*3+7*2+3*3 \\ 4*3+9*2+3*3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+4+6 \\ 15+14+9 \\ 12+18+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 38 \\ 39 \end{pmatrix}$$

Lemma 16 *Multiplikation von Matrizen und Vektoren ist eine lineare Abbildung*

Beweis: Additivität:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}(x_1 + y_1) + \dots + a_{1n}(x_n + y_n) \\ \vdots \\ a_{m1}(x_1 + y_1) + \dots + a_{mn}(x_n + y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n \\ \vdots \\ a_{m1}y_1 + \dots + a_{mn}y_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Ähnlich für λv. $\square$

Wichtiges Beispiel. **Frage.** *Wohin bildet diese Abbildung die Vektoren aus der Standard-Basis ab?Wir rechnen es aus.*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{12} + \dots + 0 \cdot a_{1n} \\ 1 \cdot a_{21} + 0 \cdot a_{22} + \dots + 0 \cdot a_{2n} \\ \vdots \\ 1 \cdot a_{m1} + 0 \cdot a_{m2} + \dots + 0 \cdot a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{12} + \dots + 0 \cdot a_{1n} \\ 0 \cdot a_{21} + 1 \cdot a_{22} + \dots + 0 \cdot a_{2n} \\ \vdots \\ 0 \cdot a_{m1} + 1 \cdot a_{m2} + \dots + 0 \cdot a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$$

Antwort. Die Matrix multipliziert mit dem i-ten Basisvektor aus der Standard-Basis ist gleich die i-te Spalte der Matrix

Matrix einer linearen Abbildung

Die Vektoren aus der Standard-Basis in $\mathbb{R}^n$ werden wir mit

$e_1, \ldots, e_n$ bezeichnen: $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-ter Platz

Satz 13 *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sei eine lineare Abbildung. Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ seien $f(e_i) = u_i := \begin{pmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \\ \vdots \\ u_i^m \end{pmatrix}$ die Bilder der Standard-Basisvektoren. Dann gilt für jeden Vektor*

$$v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : f(v) = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \ldots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \ldots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^m & u_2^m & \ldots & u_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}.$$

In Worten: jede lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ ist die Multiplikation mit derjenigen Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.

Bsp. Aus der Vorlesung 9 (und aus Hausaufgabe 2 Blatt 4)

Bsp. Sei $V = U = \mathbb{R}^3$, mit der Standardbasis $\left(e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Wir betrachten das Tripel $\left(u_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, u_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, u_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$ von Vektoren aus $\mathbb{R}^3$.

Nach Lemma 15 existiert eine lineare Abbildung f, die $e_1 \longmapsto u_1$, $e_2 \longmapsto u_2$, $e_3 \longmapsto u_3$ abbildet. Die Formel für f haben wir in Vorl. 9 gefunden. Wir wiederholen das. Wir haben:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = f\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$f\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + f\left(y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + f\left(z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = x\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \\ 7x + 8y + 9z \end{pmatrix}$$

Wir sehen, dass die Abbildung genau f_A ist (sie bildet also den Vektor $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ auf das Produkt Av ab), wobei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ ist.

In der Tat, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \\ 7x + 8y + 9z \end{pmatrix}$.

Satz 13 in Worten: Jede lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.

Beweis:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Lemma 15: Es gibt genau eine lin. Abbildung}\\ f \text{ mit } f(e_i)=u_i\\ \\ \textbf{Wicht. Bsp.}\text{: } Ae_i \text{ ist die } i-\text{te Spalte von } A.\\ \\ \text{Lemma 16: Multiplikation von Matrizen}\\ \text{und Vektoren ist eine lineare Abbildung}\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Satz 13} \qquad \square$$

Beweis noch einmal (dasselbe in Sätzen)

Lemma 15: Es gibt genau eine lin. Abbildung f mit $f(e_i) = u_i$

Wicht. Bsp.: Ae_i ist die $i-$te Spalte von A.

Lemma 16: Multiplikation von Matrizen und Vektoren ist eine lineare Abbildung

$\Longrightarrow$ Satz 13

Wir behaupten im Satz 13, dass die lineare Abbildung f, die $e_1, ..., e_n$ jeweils auf $u_1, ..., u_n \in \mathbb{R}^m$ abbildet, die Multiplikation mit derjenigen Matrix A ist, deren Spalten die Vektoren $u_1, ..., u_n$ sind.

Multiplikation mit einer $(m \times n)-$Matrix ist eine lineare Abbildung nach Lemma 16. Multiplikation mit derjenigen Matrix, deren Spalten die Vektoren $u_1, ..., u_n \in \mathbb{R}^m$ sind, bildet die Standard-Basisvektoren $e_1, ..., e_n$ auf die Vektoren $u_1, ..., u_n$ ab, wie wir im **Wicht. Bsp.** oben gezeigt haben.

Also erfüllt die Multiplikation mit dieser Matrix diese beiden Eigenschaften.

Aber nach Lemma 15 definieren diese Eigenschaften die Abbildung eindeutig: nach Lemma 15 ist die lineare Abbildung f, die die Basisvektoren (in unserem Fall $e_1, ..., e_n$) auf die Vektoren $u_1, ..., u_m$ abbildet, EINDEUTIG. Also fällt sie mit f_A (wobei A diejenige Matrix ist, deren Spalten die Vektoren $u_1, ..., u_n$ sind), zusammen. $\square$

Aufgabe: Finde die Matrix der linearen Abbildung (von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$), die die Standardbasisvektoren e_1, e_2 jeweils in die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ überführt.

Antwort: Nach Satz 13 sind die Spalten der Matrix die Bilder der Vektoren, also ist die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Finde die Matrix der linearen Abbildung (von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$), die die Vektoren e_1, e_2, e_3 jeweils in die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ überführt.

Antwort: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Aufgabe. *Finde die Matrix der linearen Abbildung f (von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$), die die Vektoren* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *jeweils in die Vektoren* $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ *überführt.*

Lösung: Um Satz 13 zu benutzen, müssen wir die Bilder der Standard-Basisvektoren e_1, e_2 bestimmen.
Wir werden benutzen, dass $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\overset{\text{Linearität}}{=} \frac{1}{2}f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \frac{1}{2}f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \overset{\text{Voraussetz.}}{=} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ähnlich, $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.
Also haben wir die Bilder von e_1, e_2 ausgerechnet: $f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $f(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Dann können wir den Satz 13 benutzen und die Antwort bekommen.

Antwort: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe. Finde die Matrix der Abbildung $Id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $Id(v) = v$ (in der Standard-Basis).

Bemerkung. Die Abbildung Id ist offensichtlich linear: z.B. $Id(u+v) = u+v = Id(u) + Id(v)$.

Lösung: Um Satz 13 zu benutzen, müssen wir $Id(e_i)$ finden. Aber $Id(e_i) = e_i$!!!
Also ist die $i-$te Spalte der gesuchten Matrix e_i.

Antwort. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \longleftarrow$ heisst Einheitsmatrix

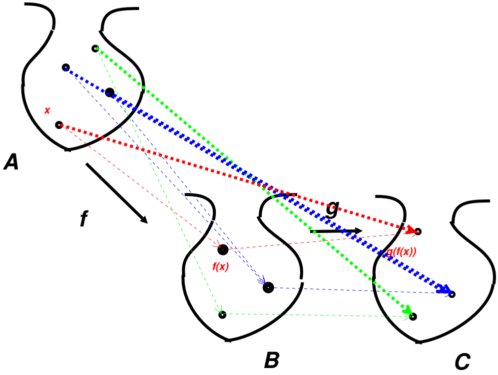
Machen Sie bitte zu Hause die folgende Übung: multiplizieren Sie die Einheitsmatrix mit dem beliebigen Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, und stellen Sie fest, dass das Ergebnis wieder $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ist.

Aufgabe. Finde (bzgl. der Standard-Basis) die Matrix der Streckung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $v \mapsto \alpha v$ wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.
Lösung: Um Satz 13 zu benutzen, müssen wir $f(e_i)$ finden. Aber $f(e_i) = \alpha e_i$.
Also ist die $i-$te Spalte der gesuchten Matrix $\alpha \cdot e_i$.

Antwort. $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & ... & 0 \\ 0 & \alpha & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \alpha \end{pmatrix}$

Verkettung von Abbildungen – Wiederholung

A, B, C seien die Mengen, $f : A \to B$, $g : B \to C$ seien Abbildungen.
Die Verkettung (Komposition, Superposition, Hintereinanderausführung) von Abildungen g und f ist die Abbildung $g \circ f : A \to C$,
$g \circ f(x) := g(f(x))$.

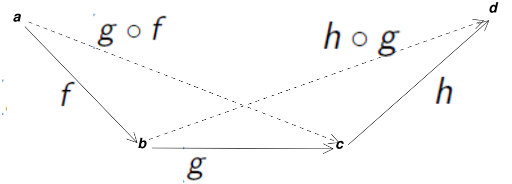


Lemma 17 Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ Abbildungen. Dann gilt: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

In Worten: *Die Verkettung von Abbildungen ist assoziativ.*

Beweis. Man nehme ein (beliebiges) $a \in A$. Z.z.:

$$h \circ (g \circ f)(a) = (h \circ g) \circ f(a) \qquad (*)$$

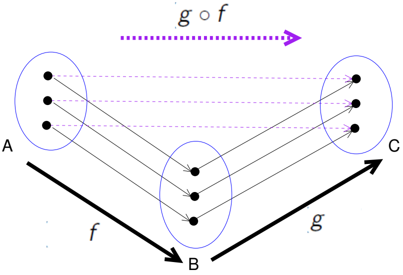


Setze
$b := f(a)$,
$c := g(b)$ und
$d := h(c)$.

Dann gilt:
$g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c$,
$h \circ (g \circ f)(a) = h(g \circ f(a)) = h(c) = d$. Also ist die linke Seite von $(*)$ gleich d.
Wir rechnen jetzt die rechte Seite: $f(a) = b$,
$(h \circ g) \circ f(a) = h \circ g(f(a)) = h \circ g(b) = h(g(b)) = h(c) = d$.
Also ist die rechte Seite von $(*)$ auch d. $\square$

Folgerung. Verkettung von Bijektionen ist bijektiv

Folgerung Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$ bijektiv. Dann gilt: $g \circ f : A \to C$ ist auch bijektiv.



Wiederholung – Lemma 13 *Sei $f : A \to B$. Dann gilt:*

$$f \text{ ist Bijektion} \iff \begin{array}{l} \exists f^{-1} : B \to A \\ (\text{s.d. } f^{-1} \circ f = Id_A \text{ und } f \circ f^{-1} = Id_B). \end{array}$$

Wiederholung – die Bezeichnung f^{-1}: Dies war die Bezeichnung für die inverse Abbildung; die Abbildung $f^{-1} : B \to A$ wurde durch die Eigenschaften $f^{-1} \circ f = Id_A$ und $f \circ f^{-1} = Id_B$ definiert. Also hat $g^{-1} : C \to B$ nach unsere Bezeichnungen die Eigenschaften $g^{-1} \circ g = Id_B$ und $g \circ g^{-1} = Id_C$.

Folgerung Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$ bijektiv. Dann gilt: $g \circ f : A \to C$ auch bijektiv.

Beweis der Folgerung. Die Abbildungen $f : A \to B$, $g : B \to C$ seien bijektiv. Nach Lemma 13 existieren dann die inversen Abbildungen $f^{-1} : B \to A$ und $g^{-1} : C \to B$. Wir benutzen diese Abbildungen, um eine Abbildung zu konstruieren, die zu $g \circ f$ invers ist.

Wir zeigen nämlich, dass $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. Nach Definition der Inversen $(g \circ f)^{-1}$ muss dies eine Abbildung von C nach A sein, die die folgenden Eigenschaften hat: $(g \circ f)^{-1} \circ (g \circ f) = Id_A$ und $(g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1} = Id_C$.
Die Abbildung $f^{-1} \circ g^{-1}$ ist eine Abbildung von C nach A, weil $g^{-1} : C \to B$ und $f^{-1} : B \to A$. Wir beweisen jetzt die Eigenschaften: $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) =$

$\left[\text{Da die Verkettung nach Lemma 17 assoziativ ist, können wir die Klammern beliebig umstellen}\right]$

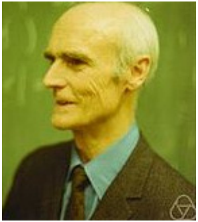
$$= f^{-1} \circ \left(\underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{Id_B} \circ f \right) = f^{-1} \circ (Id_B \circ f) = f^{-1} \circ f = Id_A.$$

Analog, $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ \left(\underbrace{(f \circ f^{-1})}_{Id_B} \circ g^{-1} \right) = g \circ (Id_B \circ g^{-1}) = g \circ g^{-1} = Id_C.$

Also existiert eine Inverse zu $g \circ f$. Die Abbildung $g \circ f$ ist dann nach Lemma 13 bijektiv. □

Wie berechnet man $(g \circ f)^{-1}$?

Wir haben folgende Formel im Beweis der Folgerung bekommen:
$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ wobei $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Bijektionen sind.



(Copyright: MFO)

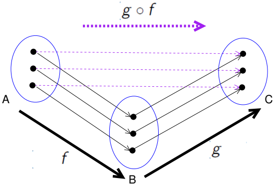
Mnemonische Regel: (nach Coxeter):

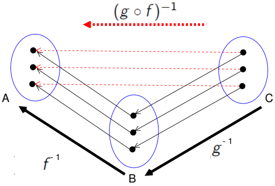
f = Socken anziehen $\quad$ f^{-1} = Socken ausziehen

g = Schuhe anziehen $\quad$ g^{-1} = Schuhe ausziehen

$g \circ f$ = zuerst Socken anziehen, dann Schuhe anziehen

$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} =$
zuerst Schuhe ausziehen, dann Socken ausziehen





Man kann analog beweisen, dass
$(f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_k)^{-1} = (f_k)^{-1} \circ (f_{k-1})^{-1} \circ \ldots \circ (f_1)^{-1}$.

Lemma 18 Seien $f : V \to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.

In Worten: *Die Verkettung von linearen Abbildungen ist linear.*
Beweis:

$$g \circ f(v+u) \overset{\text{Definition}}{=} g(f(v+u)) \overset{\text{Linearität von } f}{=} g(f(v)+f(u)) \overset{\text{Linearität von } g}{=}$$

$$g(f(v)) + g(f(u)) \overset{\text{Definition}}{=} g \circ f(v) + g \circ f(u)$$

Ähnlich für λv. $\square$

Schulden: Beweis, dass Satz 11' den Satz 11 impliziert

Wiederholung – Satz 11' Sei $(V, +, \cdot)$ ein $n-$dimensionaler Vektorraum. Dann gibt es einen Isomorphismus $f : V \to \mathbb{R}^n$.
Wiederholung – Lemma 14 – ein bisschen schwächere Version: Ist $g : U \to \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus, so ist $g^{-1} : \mathbb{R}^n \to U$ ebenfalls ein Isomorphismus.
Wiederholung – Satz 11 Sei $(V, +, \cdot)$ und $(U, +, \cdot)$ $n-$dimensionale Vektorräume der gleichen Dimension n. Dann gibt es einen Isomorphismus $h : V \to U$.

Wir folgern jetzt den Satz 11 aus Satz 11' und den heute bewiesenen Aussagen – Lemma 17 und Lemma 18. Wir betrachten die Isomorphismen $f : V \to \mathbb{R}^n$ und $g : U \to \mathbb{R}^n$, die nach Satz 11' existieren. Außerdem betrachen wir die Abbildung g^{-1}, die nach Lemma 14 ein Isomorphismus ist.
Wir zeigen dass $g^{-1} \circ f : V \to U$ ein Isomorphismus ist. In der Tat, $g^{-1} \circ f$ ist bijektiv nach Folgerung aus Lemma 17, als Verkettung von bijektiven Abbildungen. $g^{-1} \circ f$ ist linear nach Lemma 18 als Verkettung von linearen Abbildungen. Dann ist $h := g^{-1} \circ f$ ein Isomorphismus, wie behauptet, und die Vektorräume U und V sind, wie behauptet, isomorph. $\square$

Multiplikation der Matrizen

Wir definieren jetzt Produkt von zwei Matrizen: einer $(k \times m)-$Matrix A und einer $(m \times n)-$Matrix B.

Wiederholung – Lemma 18 *Seien $f : V \to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen (in unserem Fall wird $g = f_A$ und $f = f_B$.) Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.*

Wiederholung – Satz 13 Jede lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^k$ ist die Multiplikation mit der $(k \times n)-$Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.

Lemma 18: Verkettung von linearen Abbildungen ist linear

Satz 13: Jede lineare Abbildung: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist die Multiplikation mit einer $(m \times n)$ Matrix.

$\Longrightarrow$

Seien $f_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ bzw. $f_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die Multiplikationen mit einer $(k \times m)$-Matrix A bzw. einer $(m \times n)-$Matrix B, d.h. $f_A(v) := Av$ für $v \in \mathbb{R}^m$ und $f_B(u) := Bu$ für $u \in \mathbb{R}^n$.

Die Verkettung $f_A \circ f_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ ist auch linear und ist deswegen auch die Multiplikation mit einer $(k \times n)$-Matrix

Def. *Seien $f_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ bzw. $f_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die Multiplikationen mit einer $(k \times m)$-Matrix A bzw. $(m \times n)-$Matrix B d.h., $f_A(v) := Av$, $f_B(u) := Bu$.*

Dann heißt die Matrix von $f_A \circ f_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ das Produkt der beiden Matrizen und wird AB bezeichnet. Dies ist eine $(k \times n)$-Matrix.

Konstruktion aus Definition in Bsp.

Wir nehmen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$.
Die Matrix A entspricht der Abbildung $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,
$f_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \cdot x & +2 \cdot y & +3 \cdot z \\ 3 \cdot x & +2 \cdot y & +1 \cdot z \end{pmatrix}$. Die Matrix B entspricht der Abbildung $f_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f_B\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 \cdot x & 7 \cdot y \\ 6 \cdot x & 6 \cdot y \\ 7 \cdot x & 5 \cdot y \end{pmatrix}$.
Die Abbildung $f_A \circ f_B$ ist die Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$. Sie bildet den Vektor $\binom{x}{y}$ auf den Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \binom{x}{y} \right)$$

ab: Wir multiplizieren zuerst B mit $\binom{x}{y}$ und dann multiplizieren wir A mit dem Ergebnis.
Das ist eine lineare Abbildung (als Verkettung von linearen Abbildungen nach Lemma 18). Deswegen ist nach Satz 13 $f_A \circ f_B(\binom{x}{y})$ gleich dem Produkt einer (eindeutig bestimmten) $(2 \times 2)-$Matrix mit $\binom{x}{y}$. DIESE MATRIX HEISST DANN DAS PRODUKT VON A UND B.

Frage: *Wie kann man das Produkt von Matrizen ausrechnen?*

Satz 14 (Rechenregel für das Produkt von Matrizen) *Seien* $f_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, $f_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *Multiplikationen mit den Matrizen*

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Matrix von $f_A \circ f_B$ *gleich*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m a_{1i} b_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^m a_{1i} b_{in} \\ \sum_{i=1}^m a_{2i} b_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^m a_{2i} b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^m a_{ki} b_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^m a_{ki} b_{in} \end{pmatrix}$$

Mnemonische Regel: Auf dem (i, j)-ten Platz des Produkts steht das Skalarprodukt der i-ten Zeile der Matrix A mit der j-ten Spalte der Matrix B:

Mnemonische Regel: Auf dem (i,j)-ten Platz des Produkts steht das Skalarprodukt der i-ten Zeile der Matrix A mit der j-ten Spalte der Matrix B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 6 + 1\cdot 7 & 3\cdot 7 + 2\cdot 6 + 1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Mnemonische Regel: Auf dem (i, j)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der i-ten Zeile der Matrix A mit der j-ten Spalte der Matrix B.

Aufgabe für Sie jetzt: Multiplizieren Sie die Matrizen A und B:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Antwort:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0*3+1*1+2*4 & 0*1+1*3+2*0 & 0*1+1*1+2*2 \\ 4*3+2*1+3*4 & 4*1+2*3+3*0 & 4*1+2*1+3*2 \\ 5*3+3*1+1*4 & 5*1+3*3+1*0 & 5*1+3*1+1*2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 5 \\ 26 & 10 & 12 \\ 22 & 14 & 10 \end{pmatrix}$$

Beweis des Satzes 14:

Mnemonische Regel: Auf dem (i,j)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der i-ten Zeile der Matrix A mit der j-ten Spalte der Matrix B.

Satz 13: $j-$te Spalte der Matrix AB
ist das Bild $f_A \circ f_B(e_j)$

Satz 13: j-te Spalte der Matrix B
ist das Bild $f_B(e_j)$

Rechenregel für Matr. mal Vektoren:
auf der i-ten Stelle
des Bildes $f_A(f_B(e_j)))$
Steht das Skalarprodukt
der i-ten Zeile der Matrix A
mit dem Vektor $f_B(e_j)$,
also das Skalarprodukt
der i-ten Zeile von A
mit der $j-$ten Spalte von B

$\Longrightarrow$

Auf dem (i,j)-ten Platz
des Produkts AB
steht das Skalarprodukt
der i-ten Zeile der Matrix A
mit der j-ten Spalte der Matrix B

$\square$

Ausführlicher: Beweis des Satzes anhand eines Bsp.

Finden wir die Matrix AB, wobei A und B wie im Bsp. oben sind:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Wir benutzen Satz 13: Die $j-te$ Spalte der Matrix AB ist das Bild von e_j. Also, um AB auszurechnen, müssen wir die Bilder von $f_A \circ f_B(e_j)$ finden. Machen wir es für $j = 1$, also für $e_1 = \binom{1}{0}$ – wir sollten die erste Spalte des Produkts bekommen.

Nach Definition der Verkettung, ist $f_A \circ f_B\left(\binom{1}{0}\right) = f_A\left(f_B\left(\binom{1}{0}\right)\right)$. Nach **Wicht. Bsp.** oben ist $f_B\left(\binom{1}{0}\right)$ die erste Spalte von B, also $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ (wer das **Wicht. Bsp.** vergessen hat, muß $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\binom{1}{0}$ ausrechnen). Also,

$$f_A\left(f_B\left(\binom{1}{0}\right)\right) = f_A\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}\right) \overset{\text{Def. von } f_A}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \overset{\text{Def von } Av}{=}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 \\ 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ 34 \end{pmatrix} \longleftarrow$$ und das muss die erste Spalte von AB sein.

Wir sehen, dass die Komponenten von AB, die in der ersten Spalte stehen, tatsächlich die Skalarprodukte der Zeilen von A und der ersten Spalte von B sind.

Dasselbe für beliebige Matrizen A und B

Was ist $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$? Nach der Definition des Produktes von Matrizen ist dies eine Matrix, sodass das Multiplizieren mit dieser Matrix den Vektor $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ auf den Vektor

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)$ abbildet. Um ihre $j-$te Spalte nach Satz 13 auszurechnen, müssen wir die Bilder von e_j ausrechnen. Wir haben:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} e_j \right) \overset{\text{Wicht. Bsp}}{=}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} \overset{\text{Satz 13}}{=} \begin{pmatrix} a_{11}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + \dots + a_{1m}b_{mj} \\ \vdots \\ a_{k1}b_{1j} + a_{k2}b_{2j} + \dots + a_{km}b_{mj} \end{pmatrix}$$

(Eintrag Nummer i ist Skalarprodukt der $i-$ten Zeile von A mit Be_j, also mit $j-$ter Spalte von B.) Wir sehen also, dass an der $(i,j)-$Stelle von AB das Skalarprodukt der $i-$ten Zeile von A und der $j-$ten Spalte von B steht, wie wir im Satz 14 behauptet haben.

Folgerung

Die Multiplikation von Matrizen ist assoziativ: $(AB)C = A(BC)$ (falls definiert).

Beweis: Nach Lemma 17 ist Verkettung von Abbildungen assoziativ. $\square$

Bemerkung. Die Rechenregeln für das Produkt einer $(k \times n)-$ Matrix mit einem Vektor des $\mathbb{R}^n$ sowie das Produkt von einer $(k \times n)-$ Matrix und einer $(n \times 1)-$Matrix ist gleich – man kann Vektoren als $(n \times 1)-$ Matrizen betrachten.

Vektorraumsstruktur auf der Menge von $(m \times n)-$Matrizen: Summe von Matrizen

Seien A, B $(m \times n)$-Matrizen über $\mathbb{R}$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(v) := Av + Bv$. Diese Abbildung ist linear.

Def *Die Matrix dieser Abbildung f heißt die Summe von Matrizen und wird mit $A + B$ bezeichnt.*

Rechenregel:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Tatsächlich,

$$j\text{-te Spalte von } A + B \overset{\text{Wicht. Bsp.}}{=} (A + B)(e_j)$$

$$\overset{\text{Def.}}{=} Ae_j + Be_j \overset{\text{Wicht. Bsp.}}{=} j\text{-te Spalte von } A + j\text{-te Spalte von } B \qquad \square$$

Multiplikation von Matrizen mit Skalaren

Sei A eine $(m \times n)-$Matrix, $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(v) := \lambda f_A(v) = \lambda \cdot (Av)$. Die Abbildung ist linear (als Verkettung von zwei linearen Abbildungen).

Def. *Die Matrix dieser Abbildung f heißt das λ-fache von A und wird mit λA bezeichnet.*

Rechenregel: $\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$

Beweis von Rechenregel.

i-te Spalte von $\lambda A \overset{\text{Wicht. Bsp.}}{=} \lambda(A(e_i))$

$\overset{\text{Def.}}{=} \lambda A e_i \overset{\text{Wicht. Bsp.}}{=} \lambda$-faches der i-ten Spalte von A.

Bemerkung Die Multiplikation mit λ liefert dasselbe Ergebnis wie die Multiplikation von links mit der $(m \times m)$ Matrix $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$, weil Multiplikation mit dieser Matrix wie wir vorher bewiesen haben multipliziert den Vektor mit λ, also

$$\left(\begin{pmatrix} \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} A\right) v \overset{\text{Assoziativität}}{=} \begin{pmatrix} \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} (Av) =$$

$$\lambda \cdot (Av) \overset{\text{Def. von } \lambda A}{=} (\lambda A)v.$$

Vektorraum der Matrizen

Bezeichnung *Die Menge der $(m \times n)$-Matrizen werden wir mit $Mat(m, n)$ bezeichnen.*
Aussage *$Mat(m, n)$ mit eben definierter Addition und Skalarmultiplikation ist ein Vektorraum der Dimension $m \cdot n$.*

Tatsächlich, wir können eine Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ mit dem folgenden Element aus $\mathbb{R}^{nm}$ identifizieren:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

und dann sind die Operationen in $Mat(m, n)$ dieselben wie in $\mathbb{R}^{nm}$

Standard-Basis in $Mat(m, n)$: Die Matrizen B_{ij}, deren Einträge bis auf eine 1 an der Stelle (i, j) alle 0 sind.
Bsp: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_{12} \in Mat(2, 3)$,
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B_{31} \in Mat(3, 2)$.