

Wie werden die Vorlesungen/Übungen organisiert?

- ▶ Mein Name: Prof. Dr. Vladimir Matveev
- ▶ Sprechstunden: nach jeder Vorlesung bzw. in der Pause bzw. kommen Sie vorbei
- ▶ Homepage der Vorlesung:
<http://users.fmi.uni-jena.de/~matveev/Lehre/LA24/>
Sie ist von meiner Homeseite (benutze Google) verlinkt.
- ▶ Das ist eine Pflichtveranstaltung,
- ▶ die jede Woche aus 2 zwei-stündigen Vorlesungen und einer 2-stündigen Anwesenheitsübung besteht.
- ▶ Die erfolgreiche Teilnahme bringt 8 Leistungspunkte

Was bedeutet „erfolgreiche Teilnahme“?

- ▶ Sie müssen an den Übungen regelmäßig und aktiv teilnehmen
 1. Regelmäßig = man soll nicht mehr als zwei mal unbegründet fehlen
 2. Aktiv = man soll mind. einmal an der Tafel vorrechnen
- ▶ Mind. 60% der Punkte von den Hausaufgaben sammeln
 1. An fast jeden Donnerstag wird ein Übungsblatt mit in der Regel vier Aufgaben ins Moodle gestellt.
 2. Sie müssen die Aufgaben einzeln lösen und über Moodle fristgerecht abgeben. Die Übungen fangen ab der zweiten Woche an. Die erste Übungsgruppe findet am 08.04 statt. Die Erste Hausaufgabe haben sie schon bekommen, sie ist relativ klein sein und muss bis Donnerstag 04.04. (Mittag) über Moodle abgegeben werden. Die nächsten Hausaufgaben bekommen Sie stets am Donnerstag; sie müssen bis nächsten Donnerstag über Moodle abgegeben werden.
 3. Die abgegebenen Lösungen werden individuell korrigiert und bepunktet. Sie müssen mind. 60% der Punkte sammeln.
 4. Sie bekommen eventuell noch Bonuspunkte für das Bonus-Blatt (als Wiederholungsmöglichkeit angesehen).
 5. Außerdem **findet in der Mitte des Semesters, am 06.06. eine Probe-Klausur statt**. Dafür bekommen Sie auch Bonuspunkte (bis zu 20% der Hausaufgabenpunkte).
- ▶ Sie müssen die Hauptklausur oder die Wiederholungsklausur bestehen (i.d.R. 50% der Punkte).

- ▶ Die Anzahl von Hausaufgabenpunkten ist die wichtigste Zulassungsbedingung zur Hauptklausur (bzw. zur Wiederholungsklausur)
- ▶ Für die Gesamtnote zählen nur die Punkte der Hauptklausur bzw. der Wiederholungsklausur.
- ▶ Klausur besteht (in der Regel) aus 5 Aufgaben.
 - ▶ Eine Klausuraufgabe ist, einen Satz aus der Vorlesung zu beweisen. (Sie bekommen eine Liste.)
 - ▶ Eine Klausuraufgabe ist eine Verständnisaufgabe (etwa welche von drei Aussagen falsch sind, gegebenenfalls mit Gegenbeispiel).
 - ▶ Eine Klausuraufgabe ist eine nichtveränderte Beweis-Hausaufgabe.
 - ▶ Zwei Klausuraufgaben sind Rechenaufgaben (die zu Hausaufgaben ähnlich sind). Die Studenten, die die Hausaufgaben gut verstanden haben, bestehen in der Regel die Klausur.

Empfehlungen und typische Fehler.

- ▶ Ich stelle die Vorlesungen vorher ins Netz. Drucken Sie sie aus. Während der Vorlesungen machen Sie Notizen. Versuchen Sie den Inhalt der Vorlesungen noch am gleichen Tag zu verstehen.
(Typischer Fehler: „Ich werde in zwei Wochen mehr Zeit haben.“)
- ▶ Probieren Sie, alle Hausaufgaben zu lösen. Falls Sie dies nicht geschafft haben, probieren Sie die Lösungen später zu verstehen. Wenden Sie sich an die Kommilitonen und an den Übungsgruppenleiter. (Typischer Fehler: „Ich habe 2 von vier Aufgaben verstanden - das reicht schon“).
- ▶ Es ist empfehlenswert, in kleinen Gruppen zu Arbeiten. In dem Fall müssen Sie trotzdem die Aufgaben einzeln abgeben und die Lösungen der abgegebenen Aufgaben vollständig verstehen.
(Typischer Fehler: Man teilt die Hausaufgaben: ein Student macht 1 und 2, der andere 3 und 4).
- ▶ SIE DÜRFEN MICH WÄHREND DER VORLESUNG UNTERBRECHEN UND FRAGEN STELLEN.

- ▶ Fast jedes Lineare-Algebra Buch für Uni-Studenten der Mathe ist gut
- ▶ Aus der Lehrbibliothek
 - ▶ Definition des Vektorraums z.B. Serge Lang, „Lineare Algebra“
 - ▶ Lineare Abbildungen z.B. Kowalsky et al “Lineare Algebra,,
 - ▶ Für vorgeschrittene Studenten Briscorn „Lineare Algebra“
- ▶ Einfachere Versionen:
 - ▶ Repetitorium der Linearen Algebra I, II (Detlef Wille , Michael Holz)
 - ▶ Lineare Algebra von A. Beutelspacher das erste Semester
- ▶ Preiswerte Alternative: Vorlesungsskripten im Internet

Ziel des Kurses: Einführung in das Gebiet der linearen Algebra mit Anwendungen in der analytischen Geometrie.

Wichtigster Unterschied zur „Schulmathematik“: Beweise

- ▶ Sie müssen die Beweise verstehen.
 - ▶ Sie müssen selbst Beweisen können
 - ▶ und Beweise sauber aufschreiben können.

Die drei wichtigsten Beweismethoden: direkter Beweis, Widerspruchsbeweis (indirekter Beweis), Induktionsbeweis

Direkter Beweis: Die Behauptung wird durch Anwendung von bereits bewiesenen Aussagen und durch logische Folgerungen bewiesen.

Bsp von einem direkten Beweis: zuerst Vorarbeit:

Wir betrachten ein **allgemeines lineares Gleichungssystem** mit m Gleichungen und n Unbekannten:

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 & \text{Zeile 1} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m & \text{Zeile m} \end{cases}$$

Bsp. Für $n = m = 2$ und $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ haben wir das Gleichungssystem $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 8 \\ 3x_1 - 6x_2 = 4 \end{cases}$

Eine **Lösung** des Gleichungssystems ist ein geordnetes n -Tupel $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, wobei \bar{x}_i reelle Zahlen sind, s. d. für jede Gleichung

$a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j$ des Gleichungssystems gilt

$$a_{j1}\bar{x}_1 + \cdots + a_{jn}\bar{x}_n = b_j.$$

Bsp. $n = m = 2$, $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 8 \\ 3x_1 - 6x_2 = 4 \end{cases}$

Dann ist $(\frac{8}{3}, \frac{2}{3})$ eine Lösung: $\begin{cases} 2 \cdot \frac{8}{3} + 4 \cdot \frac{2}{3} = 8 \\ 3 \cdot \frac{8}{3} - 6 \cdot \frac{2}{3} = 4 \end{cases}$

Wir definieren die folgenden **elementaren Operationen** (**elementare Zeilenumformungen**) auf linearen Gleichungssystemen:

Typ 1: Seien i, k aus $1, \dots, m$, $i \neq k$, $c \in \mathbb{R}$. Dann

(S1)

$$\left\{ \begin{array}{cccc} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (a_{k1} + c \cdot a_{i1})x_1 & + \cdots + & (a_{kn} + c \cdot a_{in})x_n & = & b_k + c \cdot b_i \quad \leftarrow k\text{-te Zeile} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

(Das c -fache der i -ten Gleichung wird zur k -ten addiert.)

Bsp: $\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 = 8 \\ 3x_1 - 6x_2 = 4 \end{array} \right. \xrightarrow{Z_2 := Z_2 - \frac{3}{2}Z_1} \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 = 8 \\ 0x_1 - 12x_2 = -8 \end{array} \right.$

Typ 2: Sei k eine Zahl aus $1, \dots, m$ und $c \neq 0$. Dann

$$(S2) \quad \left\{ \begin{array}{cccc} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c \cdot a_{k1}x_1 & + \cdots + & c \cdot a_{kn}x_n & = & c \cdot b_k \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

Bsp. $k = 2, c = -\frac{1}{12}$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 = 8 \\ 0 \cdot x_1 - 12x_2 = -8 \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 = 8 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 = \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

Typ 3: Seien i, k aus $1, \dots, m$, $i < k$. Dann

$$(S3) \quad \left\{ \begin{array}{lclcl} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1}x_1 & + \cdots + & a_{kn}x_n & = & b_k & \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}x_1 & + \cdots + & a_{jn}x_n & = & b_j & \leftarrow k\text{-te Zeile} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

Satz 1 Ist $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ eine Lösung des Systems (S) , so ist $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ eine Lösung des Systems $(S1)$, $(S2)$ und $(S3)$.

(Direkter) Beweis: 1. Angenommen, $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ ist eine Lösung von (S) .
Z.z.: Dann ist $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ auch eine Lösung von $(S1)$.

Wir betrachten die i -te und die k -te Gleichungen von (S) : wenn wir $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ einsetzen, bekommen wir die Gleichungen, die erfüllt sind.

$$a_{i1}\bar{x}_1 + \dots + a_{in}\bar{x}_n = b_i$$

$$a_{k1}\bar{x}_1 + \dots + a_{kn}\bar{x}_n = b_k$$

Dann ist auch $(a_{k1}\bar{x}_1 + \dots + a_{kn}\bar{x}_n) + c \cdot (a_{i1}\bar{x}_1 + \dots + a_{in}\bar{x}_n) = b_k + c \cdot b_i$ erfüllt. Nach Umordnen der Terme in der letzten Gleichung sehen wir, dass

$(a_{k1} + c \cdot a_{i1})\bar{x}_1 + \dots + (a_{kn} + c \cdot a_{in})\bar{x}_n = b_k + c \cdot b_i$ erfüllt ist, und dies ist $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ eingesetzt in die k -te Gleichung von $(S1)$.

Die anderen Gleichungen von $(S1)$ sind auch erfüllt, weil sie mit Gleichungen von (S) zusammenfallen. Also ist $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ eine Lösung des Systems $(S1)$.

2. Angenommen, $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ ist eine Lösung von (S) . Z.z.: Dann ist es auch eine Lösung von $(S2)$. Wir betrachten die k -te Gleichung von $(S2)$: wenn wir $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ einsetzen, bekommen wir

$$(*) \quad c \cdot a_{k1}\bar{x}_1 + \dots + c \cdot a_{kn}\bar{x}_n = c \cdot b_k.$$

Wegen des Distributivgesetzes steht links die Zahl

$$c \cdot (a_{k1}\bar{x}_1 + \dots + a_{kn}\bar{x}_n).$$
 Da rechts $c \cdot b_k$ steht und da

$a_{k1}\bar{x}_1 + \dots + a_{kn}\bar{x}_n = b_k$ ist, ist $(*)$ erfüllt. Die anderen Gleichungen von $(S2)$ sind auch erfüllt, weil sie mit Gleichungen von (S) zusammenfallen.

Also ist $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ eine Lösung des Systems $(S2)$.

Man könnte mit ähnlichen Methoden (einfach) beweisen, dass jede Lösung $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ von $(S3)$ auch eine Lösung von (S) ist; ich werde aber einen anderen Beweis vorführen. Zuerst ein Witz:

Wie kocht ein Mathematiker Tee (falls leerer Wasserkocher, mehrere Teebeutel, Wasserhahn, Strom usw. vorhanden sind) ?

1. Wasser in Wasserkocher gießen 2. Wasser kochen 3. Teebeutel und kochendes Wasser in die Tasse.

Wie kocht ein Mathematiker Tee (falls Wasserkocher schon mit Wasser gefüllt ist?)

Er führt das neue Problem auf das alte zurück: Zuerst Ausgießen. Dann wie oben.

Warum ist jede Lösung von (S) auch eine Lösung von (S3)

Weil eine Operation vom Typ 3 sich aus Operationen der Typen 1 und 2 zusammensetzen läßt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k \\ \vdots \end{array} \right. \xrightarrow{Z_k := Z_k + Z_i} \left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ (a_{k1} + a_{i1})x_1 + \cdots + (a_{kn} + a_{in})x_n = b_k + b_i \\ \vdots \end{array} \right.$$

$$Z_i := Z_i - Z_k \left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ -a_{k1}x_1 + \cdots - a_{kn}x_n = -b_k \\ \vdots \\ (a_{k1} + a_{i1})x_1 + \cdots + (a_{kn} + a_{in})x_n = b_k + b_i \\ \vdots \end{array} \right. \xrightarrow{Z_k := Z_k + Z_i}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ -a_{k1}x_1 + \cdots - a_{kn}x_n = -b_k \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \end{array} \right. \xrightarrow{Z_i := -1 \cdot Z_i} \left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \end{array} \right.$$



Folgerung 1 Ist $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ eine Lösung eines der Systeme $(S1)$, $(S2)$ oder $(S3)$, so ist $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ auch eine Lösung des Systems (S) (und deswegen nach Satz 1 auch der Systeme $(S1)$, $(S2)$, und $(S3)$).

Beweis. (S) entsteht aus $(S1)$ durch Operationen vom Typ 1 (mit den selben k und i und $c' = -c$). Deswegen ist nach Satz 1 jede Lösung von $(S1)$ auch eine Lösung von (S) .

(S) entsteht aus $(S2)$ durch Operationen vom Typ 2 (mit dem selben k und $c' = \frac{1}{c}$). Deswegen ist nach Satz 1 jede Lösung von $(S2)$ auch eine Lösung von (S) .

(S) entsteht aus $(S3)$ durch Operationen vom Typ 3 (mit den selben k und i). Deswegen ist nach Satz 1 jede Lösung von $(S3)$ auch eine Lösung von (S) . □

Vollständige Induktion

Induktion benutzt man oft zum Beweis von Sätzen der Form „Für jede natürliche Zahl n gilt ... „. Dazu zeigt man zuerst, dass (InduktionsAnfang) die Aussage für $n = 1$ (oder auch einen anderen Anfangswert n_0) gilt, und danach, (InduktionsSchritt) dass sie auch für $n + 1$ gilt, wenn (InduktionsVoraussetzung) sie für n gilt.



Die vollständige Induktion lässt sich mit einem Domino-Effekt vergleichen.

Man stellt die Steine (= Aussagen) so auf, dass, wenn einer umfällt (= richtig ist), auch der nächste umfällt (= richtig ist) ($n \rightarrow n + 1$),

und stößt den ersten Stein um ($n = 1$; (InduktionsAnfang))

Picture from Wikipedia common

Lin. Gleichungssystem in Stufenform

Def 1. Wir sagen, dass das Gleichungssystem (S) **Stufenform** hat, wenn für alle $i = 1, \dots, m - 1$ folgendes gilt:

(a) Wenn ein k aus $1, 2, \dots, n - 1$ existiert mit

$a_{i1} = a_{i2} = \dots = a_{ik} = 0$, dann gilt:

$a_{i+1\ 1} = a_{i+1\ 2} = \dots = a_{i+1\ k+1} = 0$

(b) Wenn $a_{i1} = \dots = a_{in} = 0$, dann

$a_{i+1\ 1} = \dots = a_{i+1\ n} = 0$

(c) Wenn $a_{i1} \neq 0$, dann $a_{i+1\ 1} = 0$.

Bsp.

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 8x_2 + 5x_3 = -1 \\ -2x_3 = 6 \end{cases}$$

Frage an Euch: Welche sind in Stufenform?

(1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$, (2) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_3 = 2 \\ 0 \cdot x_3 = 1 \end{cases}$ sind in Stufenform.

Bsp (3) $\begin{cases} x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$, (4) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4 \\ 0 \cdot x_3 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases}$, (5) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_1 + 0 \cdot x_3 = 2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

sind NICHT in Stufenform: In (3) ist (a) für $i = k = 1$ nicht erfüllt, weil $a_{1+1\ 1} \neq 0$. In (4) ist (b) nicht erfüllt (für $i = 2$). In (5) ist (c) nicht erfüllt (für $i = 1$).

Satz von Gauss

Def 1 – Wiederholung. Wir sagen, dass das Gleichungssystem (S) **Stufenform** hat, wenn für alle $i = 1, \dots, m - 1$ folgendes gilt:

(a) Wenn ein k aus $1, 2, \dots, n - 1$ existiert mit

$a_{i1} = a_{i2} = \dots = a_{ik} = 0$, dann gilt:

$a_{i+1\ 1} = a_{i+1\ 2} = \dots = a_{i+1\ k+1} = 0$

(b) Wenn $a_{i1} = \dots = a_{in} = 0$, dann

$a_{i+1\ 1} = \dots = a_{i+1\ n} = 0$

(c) Wenn $a_{i1} \neq 0$, dann $a_{i+1\ 1} = 0$.

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 8x_2 + 5x_3 = -1 \\ -2x_3 = 6 \end{cases}$$

Satz 2 (Gauss) *Jedes lin. Gleichungssystem läßt sich durch endlich viele elementare Operationen auf Stufenform bringen.*



Bemerkung. Aus der Beweis von Satz von Gauss wird auch ein Algorithmus folgen (Gauss'scher Algorithmus), wie man ein lin. Gleichungssystem durch endlich viele elementare Operationen auf Stufenform bringen kann.

Satz 2 (Gauss) *Jedes lin. Gleichungssystem läßt sich durch endlich viele elementare Operationen auf Stufenform bringen.*

Induktionsbeweis: Induktion nach m .

(IA) Für $m = 1$ ist die Aussage richtig: Jede lin. Gleichungssystem, das aus $m = 1$ Gleichung besteht, ist in Stufenform.

(IV) Angenommen, die Aussage ist für irgendein m richtig: jedes lin. Gleichungssystem, das aus m Gleichungen besteht, läßt sich durch endlich viele elementaren Operationen auf Stufenform bringen.

(IS) Z.z.: Die Aussage ist auch für $m + 1$ richtig: Jedes lin. Gleichungssystem, das aus $m + 1$ Gleichungen besteht, läßt sich durch endlich viele elementare Operationen auf Stufenform bringen.

Nehmen wir das erste k aus $1, \dots, n$, s.d. nicht alle Zahlen a_{1k}, \dots, a_{m+1k} gleich 0 sind (sonst ist das Gleichungssystem bereits in Stufenform).

Bsp: Für $\begin{cases} 0 \cdot x_1 & +3x_2 & -5x_3 & = 6 \\ 0 \cdot x_1 & +0 \cdot x_2 & +x_3 & = 2 \\ 0 \cdot x_1 & +1 \cdot x_2 & +0 \cdot x_3 & = 1 \end{cases}$ ist $k = 2$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $a_{1k} \neq 0$, sonst vertauscht man die Gleichung mit $a_{jk} \neq 0$ mit der ersten Gleichung (Operation von Typ 3).

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_{k-1} \\ \vdots \\ 0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_{k-1} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} + a_{1k}x_k + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \hline \text{Irgendwas} \end{array} \quad , a_{1k} \neq 0.$$

Dann addieren wir für jedes j aus $2, \dots, m+1$ das $-\frac{a_{jk}}{a_{1k}}$ -fache der 1-ten Gleichung zur j -ten Gleichung. **Bsp:**

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 & +3x_2 & -5x_3 & = 6 \\ 0 \cdot x_1 & +0 \cdot x_2 & +x_3 & = 2 \\ 0 \cdot x_1 & +1 \cdot x_2 & +0 \cdot x_3 & = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} Z_2 := Z_2 + 0 \cdot Z_1 \\ Z_3 := Z_3 - \frac{1}{3}Z_1 \\ \longrightarrow \end{array} \quad \begin{cases} 0 \cdot x_1 & +3x_2 & -5x_3 & = 6 \\ 0 \cdot x_1 & +0 \cdot x_2 & +x_3 & = 2 \\ 0 \cdot x_2 & +0 \cdot x_2 & +\frac{5}{3} \cdot x_3 & = -1 \end{cases}$$

Wir bekommen $\left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_{k-1} \\ \vdots \\ 0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_{k-1} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} + a_{1k}x_k + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ +0 \cdot x_k + \\ \vdots \\ +0 \cdot x_k + \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Irgendwas} \end{array}$

Jetzt betrachten wir das **Untersystem**, das aus den Gleichungen 2 bis $m + 1$ besteht.

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_{k-1} \\ \vdots \\ 0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_{k-1} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} + a_{1k}x_k + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ +0 \cdot x_k + \\ \vdots \\ +0 \cdot x_k + \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Irgend-} \\ \text{was} \end{array}$$

Es besteht aus $m(= m + 1 - 1)$ Gleichungen.

Nach (IV) können wir das System durch endlich viele elementare Operationen auf Stufenform bringen. Da diese Operationen auch elementare Operationen des gesamten Systems sind, kann man durch endlich viele elementare Operationen das System auf die Form

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_{k-1} \\ \vdots \\ 0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_{k-1} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} + a_{1k}x_k + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ +0 \cdot x_k + \\ \vdots \\ +0 \cdot x_k + \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Stufen-} \\ \text{form} \end{array} \quad \text{bringen.}$$

Bemerkung. Die Operationen ändern die ersten k Spalten nicht.

Wir bekommen ein System in Stufenform. □

Gauß-Algorithmus

Der Beweis gibt uns auch einen Weg, lineare Gleichungssysteme auf Stufenform zu bringen (Gauß-Algorithmus). **Bsp:**

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 2 \\ 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases} \xrightarrow{\begin{array}{l} Z_2 := Z_2 - \frac{3}{2}Z_1 \\ Z_3 := Z_3 - \frac{1}{2}Z_1 \end{array}} \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 0x_4 = 1 \\ x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow{Z_3 := Z_3 - Z_2} \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 0x_4 = 1 \\ -2x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$$

Gleichungssystem in Stufenform!

Da die elementaren Operationen die Lösungen erhalten, ist jede Lösung

von $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 0x_4 = 1 \\ -2x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$ auch eine Lösung von

$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 2 \\ 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}$ und umgekehrt. Es ist einfach, die Lösungen eines Systems, das in Stufenform ist, zu bestimmen. Im Bsp oben:

Aus der 3-ten Gleichung: $x_3 = x_4 + \frac{1}{2} = r + \frac{1}{2}$
Aus der 2-ten Gleichung: $x_2 = x_3 + 1 = r + \frac{1}{2} + 1 = r + \frac{3}{2}$
Aus der 1-ten Gleichung: $x_1 = -2x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 1 = -7r - 3$

Also, jede Lösung $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_4)$ hat die Form $(-7r - 3, r + \frac{3}{2}, r + \frac{1}{2}, r)$, wobei r eine (beliebige) reelle Zahl ist, und umgekehrt: Jedes 4-Tupel der Form $(-7r - 3, r + \frac{3}{2}, r + \frac{1}{2}, r)$ ist eine Lösung. Nach Satz 1 und Folgerung 1 ist jede Lösung des ursprünglichen Systems eine Lösung des System in Stufenform und umgekehrt. Deswegen sind dies auch alle Lösungen des ursprünglichen Systems.