Def – Wiederholung *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Das Bild von f ist die folgende Teilmenge von U:*
$Bild_f = \{u \in U \ \ \textit{so dass es gibt ein Element } v \in V \textit{ mit } f(v) = u\}$.
(Andere Bezeichnung: $f(V)$ – wird in Analysis-Vorlesung verwendet)

Der Kern von f ist die folgende Teilmenge von V:
$Kern_f = \{v \in V \ \ \textit{so dass } f(v) = \vec{0}\}$.
(Andere Bezeichnung: $f^{-1}(\vec{0})$; wird oft in Analysis verwenden. Man bemerke aber dass f^{-1} nicht die inverse Abbildung nach unseren Definitionen ist; außerdem ist f^{-1} keine Abbildung. Also $f^{-1}(\vec{0})$ ist nur die Bezeichnung.)

Bsp. Betrachte die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt: $\mathrm{Bild}_f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \ : \ \text{wobei } x, y \in \mathbb{R} \right\}$.

$\mathrm{Kern}_f = \left\{ \vec{0} \right\}$ (wird auf der nächsten Folie besprochen)

Satz 12 (1. Dimensionsformel) *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:*

(a) *$Bild_f$ ist ein Untervektorraum von U.*

(b) *$Kern_f$ ist ein Untervektorraum von V.*

(c) *Ist V endlichdimensional, so gilt:*
$dim(V) = dim(Bild_f) + dim(Kern_f)$.

Bsp. Betrachte die Linearabbildung aus der Bsp. oben

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt: $\mathrm{Kern}_f = \{\vec{0}\}$, weil
$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; also $dim(\mathrm{Kern}_f) = 0$.
$\mathrm{B}ild_f = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}\right\}$ ist 2-dimensional (mit der Basis
$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$; also ist die Dimensionsformel
$\underbrace{\dim(V)}_{2} = \underbrace{\dim(\mathrm{Bild}_f)}_{2} + \underbrace{\dim(\mathrm{Kern}_f)}_{0}$ in diesem Bsp. richtig.

Beweis (a) Bild_f ist ein Untervektorraum von U

Beweis (a): Seien $u_1, u_2 \in \mathrm{Bild}_f$, d.h. $u_1 = f(v_1)$, $u_2 = f(v_2)$.
Dann gilt:

- $u_1 + u_2 = f(v_1) + f(v_2) \stackrel{\text{Linearität}}{=} f(v_1 + v_2) \in \mathrm{Bild}_f$
- $\lambda u_1 = \lambda f(v_1) \stackrel{\text{Linearität}}{=} f(\lambda v_1) \in \mathrm{Bild}_f$.

Beweis (b) Kern_f ist ein Untervektorraum von V

Beweis (b): Seien $v_1, v_2 \in \mathrm{Kern}_f$, d.h. $f(v_1) = f(v_2) = \vec{0}$. Dann gilt:

- $f(v_1 + v_2) \overset{\text{Linearität}}{=} f(v_1) + f(v_2) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d.h. $v_1 + v_2 \in \mathrm{Kern}_f$.
- $f(\lambda v_1) \overset{\text{Linearität}}{=} \lambda f(v_1) = \lambda \vec{0} = \vec{0}$, d.h. $\lambda v_1 \in \mathrm{Kern}_f$.

Konstruktion einer Basis in Bild_f

Kern_f ist ein Untervektorraum des endlichdimensionalen Vektorraums V und ist deswegen auch nach Folgerung (d) aus Satz 10 endlichdimensional. Sei $\{v_1, ..., v_k\}$ eine Basis von Kern_f. Nach Folgerung (c) können wir die Basis $\{v_1, ..., v_k\}$ bis zum einer Basis in V erganzen: es gibt $v_{k+1}, ..., v_n$ so dass $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis ist.
Wir zeigen: $\{f(v_{k+1}), ..., f(v_n)\}$ ist eine Basis in $Bild_f \subseteq U$. Wir mussen zeigen, dass $\{f(v_{k+1}), ..., f(v_n)\}$ linearunabhängig und erzeugend ist.

Wir zeigen: $\{f(v_{k+1}), ..., f(v_n)\}$ ist erzeugend

Wir müssen zeigen, dass man jedes $u \in \mathrm{Bild}_f$ als eine Linearkombination von Elementen $f(v_{k+1}), ..., f(v_n)$ darstellen kann. Offensichtlich, kann man jedes $u \in \mathrm{Bild}_f$ als eine Linearkombination von Elementen $f(v_1), ..., f(v_n)$ darstellen. In der Tat, jedes $u \in \mathrm{Bild}_f$ ist Bild des irgentwelchen Vektors $v \overset{\text{Weil } \{v_1, ..., v_n\} \text{ eine Basis ist}}{=} \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$, also

$$u = f(v) = f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_n f(v_n).$$

Aber $f(v_1) = f(v_2) = ... = f(v_k) = \vec{0}$, da $v_1, ..., v_k \in \mathrm{Kern}_f$. Dann $u = \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + \lambda_{k+2} f(v_{k+2}) + ... + \lambda_n f(v_n)$. Also ist $\mathrm{span}(\{f(v_{k+1}), ..., f(v_n)\}) = \mathrm{Bild}_f$.

Wir zeigen: $\{f(v_{k+1}), ..., f(v_n)\}$ ist linear unabhängig

Angenommen ist die Linearkombination $\lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}$.
Z.z.: $\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = ... = \lambda_n = 0$.
Wir haben:

$$\underbrace{1\vec{0} + 1\vec{0} + ... + 1\vec{0}}_{k \text{ mal}} + \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}.$$

Da $f(v_1) = f(v_2) = ... = f(v_k) = \vec{0}$,

$$1f(v_1) + 1f(v_2) + ... + 1f(v_k) + \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}.$$

Weil f linear ist,

$$f(1v_1 + 1v_2 + ... + 1v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + ... + \lambda_n v_n) = \vec{0}.$$

Also, $1v_1 + 1v_2 + ... + 1v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + ... + \lambda_n v_n \in \mathrm{Kern}_f$. Dann ist er die Linarkombination von Elementen $v_1, ..., v_k$ und deswegen (Satz 7(b)) $\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = ... = \lambda_n = 0$.
Also gilt: $dim(\mathrm{Bild}_f) = [\text{Anzahl von Elementen in } \{f(v_{k+1}), ..., f(v_n)\}] = n - k$. Dann gilt:
$\underbrace{dim(V)}_{n} = \underbrace{dim(\mathrm{Kern}_f)}_{k} + \underbrace{dim(\mathrm{Bild}_f)}_{n-k}$, $\square$

Anwendung 1. Dimensionsformel für Endomorphismen

Def. — Wied: Endomorphismus $=$ lineare Abbildung $f : V \to V$ von Vektorraum V auf sich selbst.

Folgerung. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus von endlichdimensionalen Vektorraum V. Dann gilt:

$$f \text{ ist surjektiv} \iff f \text{ ist injektiv.}$$

Bemerkung. In Hausaufgabe 1 Blatt 5 mussten Sie mehrere Beispiele konstruieren – Sie werden sehen, dass falls U und V verschiedene Dimensionen haben, ist die Aussage der Folgerung nicht richtig.

Idea des Beweises: wir spielen mit der 1. Dimensionsformel (Satz 12): es gilt:

$$\underbrace{\dim(V)}_{n} = \dim(\mathrm{Bild}_f) + \dim(\mathrm{Kern}_f)$$

Beweis (surjektiv) $\Longrightarrow$ (injektiv).

Ist f surjektiv, so ist $Bild_f = V$. Wir haben

$$\begin{array}{ccccc} \dim(V) & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & \dim(\mathrm{Kern}_f) \\ n & = & n & + & ? \end{array} .$$

Dann ist $dim(Kern_f) = 0$, folglich $Kern_f = \{\vec{0}\}$. Nach Lemma 11c ist f injektiv.

Beweis (surjektiv) $\Longleftarrow$ (injektiv).

Ist f injektiv, so ist $Kern_f = \{\vec{0}\}$. Dann ist $dim(Kern_f) = 0$.
Wir haben

$$\begin{array}{ccccc} \dim(V) & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & \dim(\mathrm{Kern}_f) \\ n & = & ? & + & 0 \end{array},$$

folglich $dim(Bild_f) = n$. Dann enthält eine Basis B in $Bild_f$ $n = dim(V)$ linear unabhängige Vektoren. Nach Folgerung (a) aus Satz 10 ist dann B eine Basis in V, deswegen
$\mathrm{Bild}_f = \mathrm{span}(B) = V$, $\square$

Wiederholung und Plan:

- Ziel: alle linearen $f : V \to U$ zu beschreiben, wobei V, U Vektorräume sind, s.d. $dim(V) = n < \infty$, $dim(U) = m < \infty$.
- Wir benutzen: Hauptsatz 11' der linearen Algebra:
  - $V \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{R}^n$, $U \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{R}^m$.
  - Die Koordinatenabbildung $C_{B_V} : V \to \mathbb{R}^n$, $C_{B_U} : U \to \mathbb{R}^m$ sind Isomophismen, wobei B_V, B_U Basen in V bzw. U sind.
- Strategie:
  - Wir beschreiben alle linearen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (Heute, Schema)
    - Wir konstruieren ein Hauptbeispiel (Matrizen, nächste Folie)
    - Wir zeigen, dass alle linearen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ wie im Hauptbeispiel sind.
  - Wir untersuchen, wie sich die Beschreibung ändert, wenn wir andere Basen B'_V, B'_U in V bzw. U wählen.
    - später

Hauptbeispiel: Matrizen als lineare Abbildungen

Def. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine $(m \times n)$- Matrix ist ein rechteckiges Schema*

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

wobei alle $a_{ij} \in \mathbb{R}$. **Bsp:** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ist eine (2×3)-Matrix, $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$ ist eine (3×2)-Matrix

Bemerkung *Mathematisch exakt ist eine $(m \times n)$-Matrix eine Abbildung $A : \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\} \to \mathbb{R}$. Das Bild von $(i, j) \in \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\}$ ist dabei das, was im Schema an der $ij-$Stelle steht.*

Eine $(m \times n)$ Matrix A definiert eine Abbildung $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung heißt Multiplikation der Matrix mit dem Vektor, statt $f_A(v)$ schreibt man gewöhnlich Av ;

Z.B. $f_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 4 + 9 \\ 4 + 10 + 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 32 \end{pmatrix}.$$

Für den j-ten Eintrag des Produkts ist nur die j-te Reihe der Matrix und der Vektor verantwortlich:

$$\begin{pmatrix} ? & ? & \ldots & ? \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ? & ? & \ldots & ? \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ \vdots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n \\ \vdots \\ ? \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt einer Zeile der Matrix mit einem Vektor und mnemonische Regel

Sei $(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{in})$ die $i-$te Zeile einer Matrix $A = (a_{ij})$ und $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Als Skalarprodukt dieser Zeile mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ verstehen wir die Zahl $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$.

Mnemonische Regel: Auf dem $i-$ten Platz des Produkts von $(m \times n)-$Matrix A und $v \in \mathbb{R}^n$ steht das Skalarprodukt der i-ten Zeile der Matrix mit dem Vektor:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Mnemonische Regel Hilft auch die Parameter der Matrizen und Vektoren abzustimmen: Da für ein Skalarprodukt von Zeile und Vektor die Anzahl der Elemente gleich sein muss, multiplizieren wir eine $(m \times n)-$Matrix mit einem Vektor aus dem $\mathbb{R}^n$. Das Ergebniss hat dann genau soviel Zeilen wie die Matrix.

Mnemonische Regel:

Auf dem $i-$ten Platz des Produkts steht das Skalarprodukt der i-ten Zeile der Matrix mit dem Vektor

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ -2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Mnemonische Regel: Auf dem $i-$ten Platz des Produkts steht das Skalarprodukt der i-ten Zeile der Matrix mit dem Vektor

Aufgabe für Sie jetzt: Multiplizieren Sie die Matrix A mit dem Vektor v:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \\ 4 & 9 & 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Antwort:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \\ 4 & 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1*3+2*2+2*3 \\ 5*3+7*2+3*3 \\ 4*3+9*2+3*3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+4+6 \\ 15+14+9 \\ 12+18+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 38 \\ 39 \end{pmatrix}$$

Lemma 16 *Multiplikation von Matrizen und Vektoren ist eine lineare Abbildung*

Beweis: Additivität:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}(x_1 + y_1) + \dots + a_{1n}(x_n + y_n) \\ \vdots \\ a_{m1}(x_1 + y_1) + \dots + a_{mn}(x_n + y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n \\ \vdots \\ a_{m1}y_1 + \dots + a_{mn}y_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Ähnlich für λv. $\square$

Wichtiges Beispiel. **Frage.** *Wohin bildet diese Abbildung die Vektoren aus der Standard-Basis ab?Wir rechnen es aus.*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{12} + \dots + 0 \cdot a_{1n} \\ 1 \cdot a_{21} + 0 \cdot a_{22} + \dots + 0 \cdot a_{2n} \\ \vdots \\ 1 \cdot a_{m1} + 0 \cdot a_{m2} + \dots + 0 \cdot a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{12} + \dots + 0 \cdot a_{1n} \\ 0 \cdot a_{21} + 1 \cdot a_{22} + \dots + 0 \cdot a_{2n} \\ \vdots \\ 0 \cdot a_{m1} + 1 \cdot a_{m2} + \dots + 0 \cdot a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$$

Antwort. Die Matrix multipliziert mit dem i-ten Basisvektor aus der Standard-Basis ist gleich die i-te Spalte der Matrix

Matrix einer linearen Abbildung

Die Vektoren aus der Standard-Basis in $\mathbb{R}^n$ werden wir mit

$e_1, ..., e_n$ bezeichnen: $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-ter Platz

Satz 13 *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sei eine lineare Abbildung. Für jedes $i \in \{1, ..., n\}$ seien $f(e_i) = u_i := \begin{pmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \\ \vdots \\ u_i^m \end{pmatrix}$ die Bilder der Standard-Basisvektoren. Dann gilt für jeden Vektor*

$$v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : f(v) = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^m & u_2^m & \dots & u_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}.$$

In Worten: jede lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ ist die Multiplikation mit derjenigen Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.

Bsp. Aus der Vorlesung 9 (und aus Hausaufgabe 2 Blatt 4)

Bsp. Sei $V = U = \mathbb{R}^3$, mit der Standardbasis $\left(e_1 := \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2 := \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_3 := \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. Wir betrachten das Tripel $\left(u_1 := \begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}, u_2 := \begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}, u_3 := \begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}\right)$ von Vektoren aus $\mathbb{R}^3$.

Nach Lemma 15 existiert eine lineare Abbildung f, die $e_1 \longmapsto u_1$, $e_2 \longmapsto u_2$, $e_3 \longmapsto u_3$ abbildet. Die Formel für f haben wir in Vorl. 9 gefunden. Wir wiederholen das. Wir haben:

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = f\left(x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) =$$

$$f\left(x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) + f\left(y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) + f\left(z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = x\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1x+2y+3z\\4x+5y+6z\\7x+8y+9z\end{pmatrix}$$

Wir sehen, dass die Abbildung genau f_A ist (sie bildet also den Vektor $v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ auf das Produkt Av ab), wobei die Matrix $A = \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$ ist.

In der Tat, $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1x+2y+3z\\4x+5y+6z\\7x+8y+9z\end{pmatrix}$.

Satz 13 in Worten: Jede lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.

Beweis:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Lemma 15: Es gibt genau eine lin. Abbildung} \\
f \text{ mit } f(e_i) = u_i \\
\\
\textbf{Wicht. Bsp.}\text{: } Ae_i \text{ ist die } i\text{-te Spalte von } A. \\
\\
\text{Lemma 16: Multiplikation von Matrizen} \\
\text{und Vektoren ist eine lineare Abbildung}
\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Satz 13} \qquad \square$$

Beweis noch einmal (dasselbe in Sätzen)

Lemma 15: Es gibt genau eine lin. Abbildung f mit $f(e_i) = u_i$

Wicht. Bsp.: Ae_i ist die $i-$te Spalte von A.

Lemma 16: Multiplikation von Matrizen und Vektoren ist eine lineare Abbildung

$\Longrightarrow$ Satz 13

Wir behaupten im Satz 13, dass die lineare Abbidung f, die $e_1, ..., e_n$ jeweils auf $u_1, ..., u_n \in \mathbb{R}^m$ abbildet, die Multiplikation mit derjenigen Matrix A ist, deren Spalten die Vektoren $u_1, ..., u_n$ sind.

Multiplikation mit einer $(m \times n)-$Matrix ist eine lineare Abbildung nach Lemma 16. Multiplikation mit derjenigen Matrix, deren Spalten die Vektoren $u_1, ..., u_n \in \mathbb{R}^m$ sind, bildet die Standard-Basisvektoren $e_1, ..., e_n$ auf die Vektoren $u_1, ..., u_n$ ab, wie wir im **Wicht. Bsp.** oben gezeigt haben.

Also erfüllt die Multiplikation mit dieser Matrix diese beiden Eigenschaften.

Aber nach Lemma 15 definieren diese Eigenschaften die Abbildung eindeutig: nach Lemma 15 ist die lineare Abbildung f, die die Basisvektoren (in unserem Fall $e_1, ..., e_n$) auf die Vektoren $u_1, ..., u_m$ abbildet, EINDEUTIG. Also fällt sie mit f_A (wobei A diejenige Matrix ist, deren Spalten die Vektoren $u_1, ..., u_n$ sind), zusammen. $\square$

Aufgabe: Finde die Matrix der linearen Abbildung (von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$), die die Standardbasisvektoren e_1, e_2 jeweils in die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ überführt.

Antwort: Nach Satz 13 sind die Spalten der Matrix die Bilder der Vektoren, also ist die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Finde die Matrix der linearen Abbildung (von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$), die die Vektoren e_1, e_2, e_3 jeweils in die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ überführt.

Antwort: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Aufgabe. *Finde die Matrix der linearen Abbildung f (von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$), die die Vektoren* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *jeweils in die Vektoren* $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ *überführt.*

Lösung: Um Satz 13 zu benutzen, müssen wir die Bilder der Standard-Basisvektoren e_1, e_2 bestimmen.
Wir werden benutzen, dass $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\overset{\text{Linearität}}{=} \frac{1}{2}f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \frac{1}{2}f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \overset{\text{Voraussetz.}}{=} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ähnlich, $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.
Also haben wir die Bilder von e_1, e_2 ausgerechnet: $f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $f(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Dann können wir den Satz 13 benutzen und die Antwort bekommen.

Antwort: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe. Finde die Matrix der Abbildung $Id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $Id(v) = v$ (in der Standard-Basis).

Bemerkung. Die Abbildung Id ist offensichtlich linear: z.B. $Id(u+v) = u+v = Id(u) + Id(v)$.

Lösung: Um Satz 13 zu benutzen, müssen wir $Id(e_i)$ finden. Aber $Id(e_i) = e_i$!!!
Also ist die $i-$te Spalte der gesuchten Matrix e_i.

Antwort. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \quad \longleftarrow$ heisst Einheitsmatrix

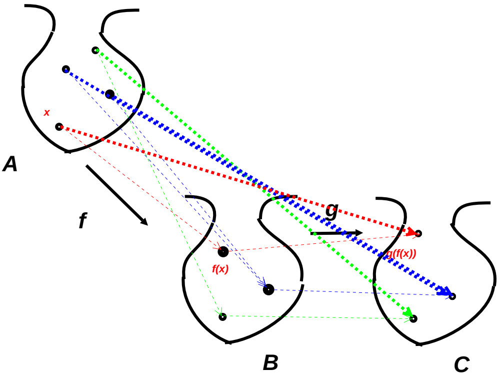
Machen Sie bitte zu Hause die folgende Übung: multiplizieren Sie die Einheitsmatrix mit dem beliebigen Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, und stellen Sie fest, dass das Ergebnis wieder $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ist.

Aufgabe. Finde (bzgl. der Standard-Basis) die Matrix der Streckung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $v \mapsto \alpha v$ wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.
Lösung: Um Satz 13 zu benutzen, müssen wir $f(e_i)$ finden. Aber
$f(e_i) = \alpha e_i$.
Also ist die $i-$te Spalte der gesuchten Matrix $\alpha \cdot e_i$.

Antwort. $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & ... & 0 \\ 0 & \alpha & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \alpha \end{pmatrix}$

Verkettung von Abbildungen – Wiederholung

A, B, C seien die Mengen, $f : A \to B$, $g : B \to C$ seien Abbildungen.
Die Verkettung (Komposition, Superposition, Hintereinanderausführung) von Abildungen g und f ist die Abbildung $g \circ f : A \to C$,
$g \circ f(x) := g(f(x))$.

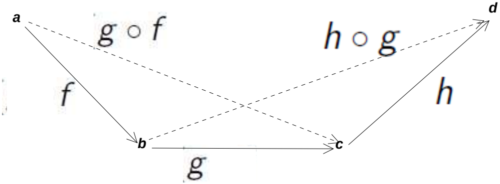


Lemma 17 Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ Abbildungen. Dann gilt: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

In Worten: *Die Verkettung von Abbildungen ist assoziativ.*

Beweis. Man nehme ein (beliebiges) $a \in A$. Z.z.:

$$h \circ (g \circ f)(a) = (h \circ g) \circ f(a) \qquad (*)$$

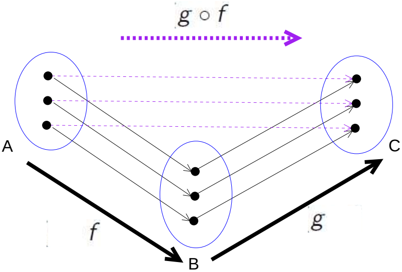


Setze
$b := f(a)$,
$c := g(b)$ und
$d := h(c)$.

Dann gilt:
$g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c$,
$h \circ (g \circ f)(a) = h(g \circ f(a)) = h(c) = d$. Also ist die linke Seite von $(*)$ gleich d.
Wir rechnen jetzt die rechte Seite: $f(a) = b$,
$(h \circ g) \circ f(a) = h \circ g(f(a)) = h \circ g(b) = h(g(b)) = h(c) = d$.
Also ist die rechte Seite von $(*)$ auch d. $\square$

Folgerung. Verkettung von Bijektionen ist bijektiv

Folgerung Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$ bijektiv. Dann gilt:
$g \circ f : A \to C$ ist auch bijektiv.



Wiederholung – Lemma 13 *Sei $f : A \to B$. Dann gilt:*

$$f \text{ ist Bijektion} \iff \begin{array}{l} \exists f^{-1} : B \to A \\ (\text{s.d. } f^{-1} \circ f = Id_A \text{ und } f \circ f^{-1} = Id_B). \end{array}$$

Wiederholung – die Bezeichnung f^{-1}: Dies war die Bezeichnung für die inverse Abbildung; die Abbildung $f^{-1} : B \to A$ wurde durch die Eigenschaften $f^{-1} \circ f = Id_A$ und $f \circ f^{-1} = Id_B$ definiert. Also hat $g^{-1} : C \to B$ nach unsere Bezeichnungen die Eigenschaften $g^{-1} \circ g = Id_B$ und $g \circ g^{-1} = Id_C$.

Folgerung Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$ bijektiv. Dann gilt: $g \circ f : A \to C$ auch bijektiv.

Beweis der Folgerung. Die Abbildungen $f : A \to B$, $g : B \to C$ seien bijektiv. Nach Lemma 13 existieren dann die inversen Abbildungen $f^{-1} : B \to A$ und $g^{-1} : C \to B$. Wir benutzen diese Abbildungen, um eine Abbildung zu konstruieren, die zu $g \circ f$ invers ist.

Wir zeigen nämlich, dass $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. Nach Definition der Inversen $(g \circ f)^{-1}$ muss dies eine Abbildung von C nach A sein, die die folgenden Eigenschaften hat: $(g \circ f)^{-1} \circ (g \circ f) = Id_A$ und $(g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1} = Id_C$.
Die Abbildung $f^{-1} \circ g^{-1}$ ist eine Abbildung von C nach A, weil $g^{-1} : C \to B$ und $f^{-1} : B \to A$. Wir beweisen jetzt die Eigenschaften:
$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) =$
[Da die Verkettung nach Lemma 17 assoziativ ist, können wir die Klammern beliebig umstellen]

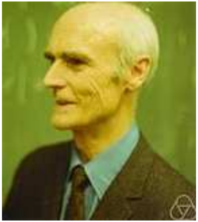
$$= f^{-1} \circ \left(\underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{Id_B} \circ f \right) = f^{-1} \circ (Id_B \circ f) = f^{-1} \circ f = Id_A.$$

Analog, $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ \left(\underbrace{(f \circ f^{-1})}_{Id_B} \circ g^{-1} \right) = g \circ (Id_B \circ g^{-1}) = g \circ g^{-1} = Id_C.$

Also existiert eine Inverse zu $g \circ f$. Die Abbildung $g \circ f$ ist dann nach Lemma 13 bijektiv. □

Wie berechnet man $(g \circ f)^{-1}$?

Wir haben folgende Formel im Beweis der Folgerung bekommen:
$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ wobei $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Bijektionen sind.



(Copyright: MFO)

Mnemonische Regel: (nach Coxeter):

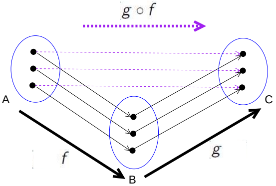
f = Socken anziehen $\quad f^{-1}$ = Socken ausziehen

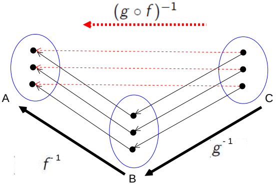
g = Schuhe anziehen $\quad g^{-1}$ = Schuhe ausziehen

$g \circ f$ = zuerst Socken anziehen, dann Schuhe anziehen

$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ =

zuerst Schuhe ausziehen, dann Socken ausziehen





Man kann analog beweisen, dass
$(f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_k)^{-1} = (f_k)^{-1} \circ (f_{k-1})^{-1} \circ \ldots \circ (f_1)^{-1}$.

Lemma 18 Seien $f : V \to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.

In Worten: *Die Verkettung von linearen Abbildungen ist linear.*
Beweis:

$$g \circ f(v+u) \stackrel{\text{Definition}}{=} g(f(v+u)) \stackrel{\text{Linearität von } f}{=} g(f(v)+f(u)) \stackrel{\text{Linearität von } g}{=}$$

$$g(f(v)) + g(f(u)) \stackrel{\text{Definition}}{=} g \circ f(v) + g \circ f(u)$$

Ähnlich für λv. $\square$

Schulden: Beweis, dass Satz 11' den Satz 11 impliziert

Wiederholung – Satz 11' Sei $(V, +, \cdot)$ ein $n-$dimensionaler Vektorraum. Dann gibt es einen Isomorphismus $f : V \to \mathbb{R}^n$.
Wiederholung – Lemma 14 – ein bisschen schwächere Version: Ist $g : U \to \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus, so ist $g^{-1} : \mathbb{R}^n \to U$ ebenfalls ein Isomorphismus.
Wiederholung – Satz 11 Sei $(V, +, \cdot)$ und $(U, +, \cdot)$ $n-$dimensionale Vektorräume der gleichen Dimension n. Dann gibt es einen Isomorphismus $h : V \to U$.

Wir folgern jetzt den Satz 11 aus Satz 11' und den heute bewiesenen Aussagen – Lemma 17 und Lemma 18. Wir betrachten die Isomorphismen $f : V \to \mathbb{R}^n$ und $g : U \to \mathbb{R}^n$, die nach Satz 11' existieren. Außerdem betrachen wir die Abbildung g^{-1}, die nach Lemma 14 ein Isomorphismus ist.
Wir zeigen dass $g^{-1} \circ f : V \to U$ ein Isomorphismus ist. In der Tat, $g^{-1} \circ f$ ist bijektiv nach Folgerung aus Lemma 17, als Verkettung von bijektiven Abbildungen. $g^{-1} \circ f$ ist linear nach Lemma 18 als Verkettung von linearen Abbildungen. Dann ist $h := g^{-1} \circ f$ ein Isomorphismus, wie behauptet, und die Vektorräume U und V sind, wie behauptet, isomorph. $\square$

Multiplikation der Matrizen

Wir definieren jetzt Produkt von zwei Matrizen: einer $(k \times m)-$Matrix A und einer $(m \times n)-$Matrix B.

Wiederholung – Lemma 18 *Seien $f : V \to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen (in unserem Fall wird $g = f_A$ und $f = f_B$.) Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.*

Wiederholung – Satz 13 Jede lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^k$ ist die Multiplikation mit der $(k \times n)-$Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Lemma 18: Verkettung von}\\ \text{linearen Abbildungen ist linear}\\ \\ \text{Satz 13: Jede lineare Abbildung:}\\ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m\\ \text{ist die Multiplikation}\\ \text{mit einer } (m \times n) \text{ Matrix.}\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

Seien $f_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ bzw. $f_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die Multiplikationen mit einer $(k \times m)$-Matrix A bzw. einer $(m \times n)-$Matrix B, d.h. $f_A(v) := Av$ für $v \in \mathbb{R}^m$ und $f_B(u) := Bu$ für $u \in \mathbb{R}^n$.

Die Verkettung $f_A \circ f_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ ist auch linear und ist deswegen auch die Multiplikation mit einer $(k \times n)$-Matrix

Def. *Seien $f_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ bzw. $f_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die Multiplikationen mit einer $(k \times m)$-Matrix A
bzw. $(m \times n)-$Matrix B d.h., $f_A(v) := Av$, $f_B(u) := Bu$.*

Dann heißt die Matrix von $f_A \circ f_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ das Produkt der beiden Matrizen und wird AB bezeichnet. Dies ist eine $(k \times n)$-Matrix.

Konstruktion aus Definition in Bsp.

Wir nehmen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$.

Die Matrix A entspricht der Abbildung $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$f_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \cdot x & +2 \cdot y & +3 \cdot z \\ 3 \cdot x & +2 \cdot y & +1 \cdot z \end{pmatrix}$. Die Matrix B entspricht der Abbildung $f_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f_B\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 \cdot x & 7 \cdot y \\ 6 \cdot x & 6 \cdot y \\ 7 \cdot x & 5 \cdot y \end{pmatrix}$.

Die Abbildung $f_A \circ f_B$ ist die Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$. Sie bildet den Vektor $\binom{x}{y}$ auf den Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \binom{x}{y} \right)$$

ab: Wir multiplizieren zuerst B mit $\binom{x}{y}$ und dann multiplizieren wir A mit dem Ergebnis.

Das ist eine lineare Abbildung (als Verkettung von linearen Abbildungen nach Lemma 18). Deswegen ist nach Satz 13 $f_A \circ f_B(\binom{x}{y})$ gleich dem Produkt einer (eindeutig bestimmten) $(2 \times 2)-$Matrix mit $\binom{x}{y}$. Diese Matrix heißt dann das Produkt von A und B.

Frage: *Wie kann man das Produkt von Matrizen ausrechnen?*

Satz 14 (Rechenregel für das Produkt von Matrizen) *Seien* $f_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, $f_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *Multiplikationen mit den Matrizen*

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Matrix von $f_A \circ f_B$ *gleich*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m a_{1i} b_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^m a_{1i} b_{in} \\ \sum_{i=1}^m a_{2i} b_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^m a_{2i} b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^m a_{ki} b_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^m a_{ki} b_{in} \end{pmatrix}$$

Mnemonische Regel: Auf dem (i, j)-ten Platz des Produkts steht das Skalarprodukt der i-ten Zeile der Matrix A mit der j-ten Spalte der Matrix B:

Mnemonische Regel: Auf dem (i, j)-ten Platz des Produkts steht das Skalarprodukt der i-ten Zeile der Matrix A mit der j-ten Spalte der Matrix B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 & 3 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Mnemonische Regel: Auf dem (i,j)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der i-ten Zeile der Matrix A mit der j-ten Spalte der Matrix B.

Aufgabe für Sie jetzt: Multiplizieren Sie die Matrizen A und B:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Antwort:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0*3+1*1+2*4 & 0*1+1*3+2*0 & 0*1+1*1+2*2 \\ 4*3+2*1+3*4 & 4*1+2*3+3*0 & 4*1+2*1+3*2 \\ 5*3+3*1+1*4 & 5*1+3*3+1*0 & 5*1+3*1+1*2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 5 \\ 26 & 10 & 12 \\ 22 & 14 & 10 \end{pmatrix}$$

Beweis des Satzes 14:

Mnemonische Regel: Auf dem (i, j)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der i-ten Zeile der Matrix A mit der j-ten Spalte der Matrix B.

Satz 13: $j-$te Spalte der Matrix AB
ist das Bild $f_A \circ f_B(e_j)$

Satz 13: j-te Spalte der Matrix B
ist das Bild $f_B(e_j)$

Rechenregel für Matr. mal Vektoren:
auf der i-ten Stelle
des Bildes $f_A(f_B(e_j)))$
Steht das Skalarprodukt
der i-ten Zeile der Matrix A
mit dem Vektor $f_B(e_j)$,
also das Skalarprodukt
der i-ten Zeile von A
mit der $j-$ten Spalte von B

$\Longrightarrow$

Auf dem (i, j)-ten Platz
des Produkts AB
steht das Skalarprodukt
der i-ten Zeile der Matrix A
mit der j-ten Spalte der Matrix B

$\square$

Ausführlicher: Beweis des Satzes anhand eines Bsp.

Finden wir die Matrix AB, wobei A und B wie im Bsp. oben sind:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Wir benutzen Satz 13: Die $j-te$ Spalte der Matrix AB ist das Bild von e_j. Also, um AB auszurechnen, müssen wir die Bilder von $f_A \circ f_B(e_j)$ finden. Machen wir es für $j = 1$, also für $e_1 = \binom{1}{0}$ – wir sollten die erste Spalte des Produkts bekommen.

Nach Definition der Verkettung, ist $f_A \circ f_B\left(\binom{1}{0}\right) = f_A\left(f_B\left(\binom{1}{0}\right)\right)$. Nach **Wicht. Bsp.** oben ist $f_B\left(\binom{1}{0}\right)$ die erste Spalte von B, also $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ (wer das **Wicht. Bsp.** vergessen hat, muß $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\binom{1}{0}$ ausrechnen). Also,

$$f_A\left(f_B\left(\binom{1}{0}\right)\right) = f_A\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}\right) \overset{\text{Def. von } f_A}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \overset{\text{Def von } Av}{=}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 \\ 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ 34 \end{pmatrix} \longleftarrow$$ und das muss die erste Spalte von AB sein.

Wir sehen, dass die Komponenten von AB, die in der ersten Spalte stehen, tatsächlich die Skalarprodukte der Zeilen von A und der ersten Spalte von B sind.

Dasselbe für beliebige Matrizen A und B

Was ist $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$? Nach der Definition des Produktes von Matrizen ist dies eine Matrix, sodass das Multiplizieren mit dieser Matrix den Vektor $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ auf den Vektor

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)$ abbildet. Um ihre $j-$te Spalte nach Satz 13 auszurechnen, müssen wir die Bilder von e_j ausrechnen. Wir haben:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} e_j \right) \overset{\text{Wicht. Bsp}}{=}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} \overset{\text{Satz 13}}{=} \begin{pmatrix} a_{11}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + \dots + a_{1m}b_{mj} \\ \vdots \\ a_{k1}b_{1j} + a_{k2}b_{2j} + \dots + a_{km}b_{mj} \end{pmatrix}$$

(Eintrag Nummer i ist Skalarprodukt der $i-$ten Zeile von A mit Be_j, also mit $j-$ter Spalte von B.) Wir sehen also, dass an der $(i,j)-$Stelle von AB das Skalarprodukt der $i-$ten Zeile von A und der $j-$ten Spalte von B steht, wie wir im Satz 14 behauptet haben.

Folgerung

Die Multiplikation von Matrizen ist assoziativ: $(AB)C = A(BC)$ (falls definiert).

Beweis: Nach Lemma 17 ist Verkettung von Abbildungen assoziativ. $\square$

Bemerkung. Die Rechenregeln für das Produkt einer $(k \times n)-$ Matrix mit einem Vektor des $\mathbb{R}^n$ sowie das Produkt von einer $(k \times n)-$ Matrix und einer $(n \times 1)-$Matrix ist gleich – man kann Vektoren als $(n \times 1)-$ Matrizen betrachten.

Vektorraumsstruktur auf der Menge von $(m \times n)-$Matrizen: Summe von Matrizen

Seien A, B $(m \times n)$-Matrizen über $\mathbb{R}$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(v) := Av + Bv$. Diese Abbildung ist linear.

Def *Die Matrix dieser Abbildung f heißt die Summe von Matrizen und wird mit $A + B$ bezeichnt.*

Rechenregel:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Tatsächlich,

$$j\text{-te Spalte von } A + B \overset{\text{Wicht. Bsp.}}{=} (A + B)(e_j)$$

$$\overset{\text{Def.}}{=} Ae_j + Be_j \overset{\text{Wicht. Bsp.}}{=} j\text{-te Spalte von } A + j\text{-te Spalte von } B \qquad \square$$

Multiplikation von Matrizen mit Skalaren

Sei A eine $(m \times n)-$Matrix, $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(v) := \lambda f_A(v) = \lambda \cdot (Av)$. Die Abbildung ist linear (als Verkettung von zwei linearen Abbildungen).

Def. *Die Matrix dieser Abbildung f heißt das λ-fache von A und wird mit λA bezeichnet.*

Rechenregel: $\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$

Beweis von Rechenregel.

i-te Spalte von $\lambda A \overset{\text{Wicht. Bsp.}}{=} \lambda(A(e_i))$
$\overset{\text{Def.}}{=} \lambda A e_i \overset{\text{Wicht. Bsp.}}{=} \lambda$-faches der i-ten Spalte von A.

Bemerkung Die Multiplikation mit λ liefert dasselbe Ergebnis wie die Multiplikation von links mit der $(m \times m)$ Matrix $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$, weil Multiplikation mit dieser Matrix wie wir vorher bewiesen haben multipliziert den Vektor mit λ, also

$$\left(\begin{pmatrix} \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} A\right) v \overset{\text{Assoziativität}}{=} \begin{pmatrix} \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} (Av) = \lambda \cdot (Av) \overset{\text{Def. von } \lambda A}{=} (\lambda A) v.$$

Vektorraum der Matrizen

Bezeichnung *Die Menge der $(m \times n)$-Matrizen werden wir mit $Mat(m,n)$ bezeichnen.*
Aussage *$Mat(m,n)$ mit eben definierter Addition und Skalarmultiplikation ist ein Vektorraum der Dimension $m \cdot n$.*

Tatsächlich, wir können eine Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ mit dem folgenden Element aus $\mathbb{R}^{nm}$ identifizieren:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

und dann sind die Operationen in $Mat(m,n)$ dieselben wie in $\mathbb{R}^{nm}$

Standard-Basis in $Mat(m,n)$: Die Matrizen B_{ij}, deren Einträge bis auf eine 1 an der Stelle (i,j) alle 0 sind.
Bsp: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_{12} \in Mat(2,3)$,
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B_{31} \in Mat(3,2)$.