# Quadratische Matrizen

$(n \times n)$-Matrizen heißen quadratische. Die entsprechenden linearen Abbildungen sind laut Definition Endomorphismen des $\mathbb{R}^n$ (weil $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$).
Das Produkt von $(n \times n)$- Matrizen ist auch eine $(n \times n)$- Matrix.
**Def.** *Eine $(n \times n)$ Matrix $B$ heißt die inverse Matrix zu einer $(n \times n)$-Matrix $A$, falls* $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

**Frage** *Hat jede $(n \times n)$ Matrix eine inverse?*

**Nein!** Die 0-Matrix $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ hat keine inverse Matrix.

In der Tat, für eine beliebige Matrix $B$ ist $B\mathbf{0} =$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

**Def.** Eine $(n \times n)-$ Matrix heißt nichtausgeartet, oder invertierbar, wenn sie eine Inverse hat.

# Die inverse oder eine inverse?

**Bemerkung.** Später (Folg. 2 aus Satz 15) zeigen wir, dass die inverse Matrix eindeutig ist.

**Satz 15** *Sei $A$ eine $(n \times n)$ - Matrix. Dann sind die folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *$A$ hat eine inverse Matrix ( $\overset{Def.}{\iff}$ $A$ ist nichtausgeartet)*

(b) *Die Abbildung $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, also die Multiplikation mit der Matrix $A$ ist ein Isomorphismus.*

(c) *Die Spalten von $A$ sind linear unabhängig.*

# Beweis (a) $\Longrightarrow$ (b): zuerst Injektivität

(a) $A$ hat eine inverse Matrix.

(b) Die Multiplikation mit der Matrix $A$ ist ein Isomorphismus.

**Beweis (a) $\Longrightarrow$ (b)** Angenommen es gibt ein $B$ mit $BA = Id$. Da wir nach Lemma 16 wissen, dass $f_A$ linear ist, müssen wir nur zeigen, dass $f_A$ bijektiv ist. Wir zeigen zuerst, dass $f_A$ injektiv ist.
Sei $Av_1 = Av_2$ (Z.z.: $v_1 = v_2$). Wir multiplizieren die Gleichung $Av_1 = Av_2$ (von links) mit $B$ und bekommen
$BAv_1 = BAv_2$. Da $BA = Id$ und $Id\, v = v$, gilt $v_1 = v_2$. Also, aus $f_A(v_1) = f_A(v_2)$ folgt $v_1 = v_2$. Dann ist $f_A$ injektiv.

**Bemerkung.** Hier haben wir im Wesentlichen den Beweis von Lemma 12(1) in Richtung „$\Longleftarrow$“ aus Vorl. 7 wiederholt:
(Lemma 12(1) in Richtung „$\Longleftarrow$“ sagt, dass

$f$ ist injektiv $\Longleftarrow$ $f$ hat eine Linksinverse.)
In unserem Fall ist $f_B$ eine Linksinverse von $f_A$, weil

$$f_B \circ f_A(v) \overset{\text{Def. des Matrixprodukts}}{=} \underbrace{BA}_{Id}\, v = Id(v) = v.$$

# Beweis (a) $\Longrightarrow$ (b): Surjektivität

(a) $A$ hat eine inverse Matrix.

(b) Die Multiplikation mit der Matrix $A$ ist ein Isomorphismus.

Wir haben eben bewiesen, dass die Abbildung $f_A$ injektiv ist. Wir haben aber Bijektivität behauptet. Um zu zeigen, dass $f_A$ auch surjektiv ist, benutzten wir die **Wichtige Anwendung der 1. Dimensionsformel.**

**Wiederh. — Wicht. Anw. der 1. Dimensionsformel; Vorl. 8** Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus, $dim(V) = n < \infty$. Dann gilt:

$$f \text{ ist injektiv} \iff f \text{ ist surjektiv.}$$

Da die Matrix $A$ quadratisch ist, ist $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ also ein Endomorphismus.
Wir haben bereits bewiesen, dass die Abbildung $f_A$ injektiv ist. Dann ist sie nach **Wicht. Anw.** surjektiv; folglich bijektiv.

# Beweis (b) $\Longrightarrow$ (c).

(b) Die Abbildung $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, also die Multiplikation mit der Matrix $A$, ist ein Isomorphismus.

(c) Die Spalten von $A$ sind linear unabhängig.

Angenommen $f_A$ ist ein Isomorphismus. Z.z.: Die Spalten von $A$ sind linear unabhängig.
Die Vektoren $u_1, \dots, u_n$ seien die Spalten von $A$, die Matrix sei also
$\begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix}$ Dann ist die Linearkombination

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1^1 & + \dots + & \lambda_n u_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 u_1^n & + \dots + & \lambda_n u_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^1 & \dots & u_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Da $f_A$ ein Isomorphismus ist, ist $Kern_{f_A} = \{\vec{0}\}$. Dann folgt aus $(*) = 0$, dass $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$; die Vektoren (= Spalten) $u_i$ sind dann linear unabhängig, $\square$

# Beweis (c) $\Longrightarrow$ (a)

(c) Die Spalten von $A$ sind linear unabhängig.

(a) $A$ hat eine inverse Matrix.

Die Spalten von $A$ bezeichnen wir mit $u_1, ..., u_n$. Sei $\{u_1, ..., u_n\}$ linear unabhängig. Dann ist $(u_1, ..., u_n)$ eine Basis (Folgerung (a) aus dem Austauschsatz). Man betrachte die lineare Abbildung $f$, die $u_1 \mapsto e_1$, $u_2 \mapsto e_2$ ,..., $u_n \mapsto e_n$ (Existenz: Lemma 15). Wir zeigen: $f \circ f_A = Id$. Tatsächlich, $e_i \overset{f_A}{\mapsto} u_i \overset{f}{\mapsto} e_i$. Also, $f \circ f_A(e_i) = e_i = Id(e_i)$. Aber es gibt GENAU EINE Abbildung (Lemma 15), die jedes $e_i$ auf $e_i$ abbildet. Eine solche Abbildung können wir sofort konstruieren, $Id$ ist nämlich eine lineare Abbildung, sodass $Id(e_i) = e_i$ $(\forall i)$. Also $f \circ f_A = Id$. Sei $B$ die Matrix von $f$. Dann ist $BA \overset{\text{Def. Matrixprodukt}}{=} Id$. □

**Bemerkung.** Wir haben die gleiche Bezeichnung $Id$ für zwei verschiedene Objekte – $Id$ ist für uns eine Abbildung, $Id(v) = v$, und auch eine $(n \times n)-$Matrix $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. Seien Sie bitte nicht verwirrt.

# Folgerung 1: Produkt von nichtausgearteten $(n \times n)-$Matrizen ist nichtausgeartet.

**Beweis.** Seien $A$, $B$ nichtausgeartete $(n \times n)$-Matrizen. Dann sind $f_A$, $f_B$ Isomorphismen nach Satz 15. Dann ist $f_A \circ f_B$ auch ein Isomophismus nach der Folg. aus Lemma 17.
Dann ist die entsprechende Matrix, also $AB$, auch nichtausgeartet nach Satz 15, □

**Rechnenregeln.** $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

**Beweis.** In der Tat, $(B^{-1}A^{-1})(AB) \overset{\text{Assoziativität}}{=} B^{-1}((A^{-1}A)B) = B^{-1}(Id \cdot B) = B^{-1}B = Id$.

**Bemerkung.** Das ist vollständig analog zur Rechnenregel für das Invertieren von Isomorphismen („Coxeter") aus Vorl. 10-11

Man kann die Folgerung „iterieren": Wenn $A, B, C$ nichtausgeartet sind, dann ist $ABC = A(\underbrace{BC}_{\text{nichtausg.}})$ nichtausgeartet. Dasselbe gilt für eine beliebige Anzahl von Matrizen.

# Inverse zu inverse: rechnenregeln

**Frage.** Sei $A$ nichtausgeartet, also existiert $A^{-1}$ mit $A^{-1}A = Id$. Ist $A^{-1}$ auch nichtausgeartet? Eindeutig?

**Folgerung 2 aus Satz 15** Sei $A \in Mat(n,n)$ nichtausgeartet. Dann gilt: die inverse Matrix ist eindeutig. Ferner gilt: $A^{-1}$ ist auch nichtausgeartet, und $(A^{-1})^{-1} = A$.

**Wiederholung – Lemma 14** Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus, so ist $f^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ebenfalls ein Isomorphismus.

**Beweis der Folgerung 2.** Angenommen, $A \in Mat(n,n)$ ist nichtausgeartet. Dann ist $f_A$ ein Isomorphismus nach Satz 15. Dann ist $(f_A)^{-1}$ ebenfalls ein Isomorphismus. Sei $B$ die Matrix von $(f_A)^{-1}$.
Wir haben $BA = [\text{Matrix von } (f_A)^{-1} \circ f_A] = Id$; also ist $B$ eine inverse Matrix zu $A$. Außerdem haben wir:
$AB = [\text{Matrix von } f_A \circ (f_A)^{-1}] = Id. \qquad (*)$
Angenommen die Matrix $B'$ auch eine inverse Matrix zu $A$ ist, d.h., $Id = B'A$. Wir multiplizieren diese Gleichung von rechts mit $B$ und bekommen $B = (B'A)B = B'\underbrace{(AB)}_{Id} = B'$; also $B = B'$ — Eindeutigkeit ist bewiesen. Aus $(*)$ und Eindeutigkeit von inverser Matrix folgt, dass $AA^{-1} = Id$; deswegen $(A^{-1})^{-1} = A$, $\square$

# Direkte Konstruktion einer inversen Matrix

Sei $A \in Mat(n,n)$. Die Spalten von $A$ seien Vektoren $u_1$,..., $u_n$. Ist $(u_1, ..., u_n)$ keine Basis, so ist die Matrix nicht invertierbar (Satz 15). Ist sie eine Basis, kann man die Vektoren $e_j$ als Linearkombination der Vektoren $u_i$ darstellen, sei also

$e_j = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} u_i. \quad (*)$

(Für jedes $j$ ist $(*)$ ein lineares Gleichungssystem aus $n$ Gleichungen für $n$ Unbekannte; also ingesamt müssen wir ein lineares Gleichungssystem aus $n^2$ Gleichungen für $n^2$ Unbekannte lösen.)

Dann ist die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

die inverse Matrix zu $A$. Tatsächlich bildet nach Konstruktion die Multiplikation mit der Matrix den Vektor $u_j$ auf $\sum_{i=1}^n \lambda_{ij} u_i = e_j$ ab. Also bildet $BA$ jedes $e_j \xmapsto{A} u_j \xmapsto{B} e_j$ ab, also $f_{BA} = Id$ und folglich $BA = Id$.

Wir werden zwei bessere Algoritmen kennenlernen (einen heute noch, den zweiten später), um inverse Matrizen zu berechnen.

# Matrizendarstellung von linearen Gleichungssystemen

Das lineare Gleichungssystem ($m$ Gleichungen, $n$ Unbekannte $x_1, .., x_n$.)

$$\left\{ \begin{array}{lllll} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & \dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & a_{m2}x_2+ & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{array} \right.$$

kann man in Matrixform schreiben:

$Ax = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n),\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ und } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Die Matrix $A$ heißt die Koeffizientenmatrix des Systems.

Die Matrix $A_{erw} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in Mat(m, n+1)$ heißt die

erweiterte Koeffizientenmatrix des Systems.

Man kann die elementaren Zeilenoperationen aus Vorl. 1 als elementare Zeilenoperationen der erweiterten Koeffizientenmatrix verstehen.

**Folgerung 3 aus Satz 15** *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n, n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^n$. $A$ ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung $x = A^{-1}b$.*

**Beweis:** $\Longrightarrow$ Sei $A$ nichtausgeartet. Dann ist das System tatsächlich lösbar: $x := A^{-1}b$ ist eine Lösung, weil $Ax = AA^{-1}b = b$.
In der Tat ist diese Lösung ist eindeutig: Sei $x$ eine Lösung. Nach der Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung $Ax = b$ mit $A^{-1}$ bekommen wir: $A^{-1}Ax = A^{-1}b$, also $x = A^{-1}b$.

$\Longleftarrow$ Angenommen das System ist eindeutig lösbar. Dann ist das System $Ax = \vec{0}$ auch eindeutig lösbar. Tatsächlich, es ist lösbar, weil $\vec{0}$ eine Lösung ist. Falls noch eine Lösung $x' \neq \vec{0}$ des Systems $Ax = \vec{0}$ existiert, dann ist $x + x'$ eine Lösung von $Ax = b$ (weil $A(x + x') = Ax + Ax' = b + \vec{0} = b$), was den Voraussetzungen widerspricht. Also ist $Ax = \vec{0}$ eindeutig lösbar und die Lösung ist $x = \vec{0}$.

Da $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$
die Linearkombination der Spalten von $A$ mit Koeffizienten $x_1, \dots, x_n$ ist, ist nur die triviale Linearkombination der Spalten gleich Null. Dann sind die Spalten von $A$ linear unabhängig und die Matrix ist nichtausgeartet nach Satz 15. $\square$

# Exkurs: $Kern_A$ und lineare Abhängigkeit der Spalten einer Matrix $A$

$A$ sei eine $(n \times n)$-Matrix. Aus der Äquivalenz der Aussagen $(b) \iff (c)$

(b) Die Abbildung $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, also die Multiplikation mit der Matrix $A$, ist ein Isomorphismus.

(c) Die Spalten von $A$ sind linear unabhängig.

und aus **Wicht. Anw. 1. Dimenensionsformel** wissen wir, dass
$A$ kein Isomorphismus ist $\iff Kern_A \neq \{\vec{0}\}$.
Wir kombinieren diese zwei Äquivalenzen und bekommen:

$Kern_{f_A} \neq \{\vec{0}\} \iff \quad [\text{die Spalten von } A \text{ sind linear abhängig}]$

Versuchen wir, diese Aussage unabhängig von Satz 15 zu verstehen:

# $Kern_{f_A} \neq \{\vec{0}\} \iff$ Spalten von $A$ sind linear abhängig.

**Frage.** Wie findet man den Kern einer Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m,n)$$

(d.h. den Kern der entsprechenden Abbildung $f_A$)? Nach Definition besteht $Kern_A$ aus allen Vektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ sodass $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{0}$; das bedeutet, $Kern_A$ ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \overset{\text{ausrechnen}}{=} \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \overset{\text{ausrechnen}}{=}$$

$$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Das ist dasselbe Gleichungssystem, das wir bekommen, wenn wir entscheiden ob die Vektoren $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind!!! Die Lösungen davon bestehen aus Koeffizienten sodass die Linearkombination von $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ gleich Null ist. Wir werden dies als eine **Beobachtung** formulieren.

# Beobachtung.

Seien $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ die Spalten einer $(n \times m)-$Matrix $A=$ $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Dann gilt: ein Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in Kern_A \Longleftrightarrow x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Also, mit Hilfe von inversen Matrizen können wir leicht (quadratische) Gleichungssysteme lösen – die Lösung von $Ax = b$ (wobei $A$ eine nichtausgeartete quadratische Matrix ist) ist $x = A^{-1}b$; die Lösungsmenge ist also einelementig und ist $\{A^{-1}b\}$.

Man bemerke auch, dass wenn wir mehrere Gleichungssysteme mit gleichem $A$ und verschiedenen $b$ lösen sollen (was öfter in praktischen Aufgaben der Fall ist), wir einmal $A$ invertieren und dann die verschiedenen $b$ in die Formel $x = A^{-1}b$ einsetzen können.

Aber wie können wir die inverse Matrix ausrechnen? Mit der Definition ist es zu aufwendig – wir müssen ein Gleichungssystem aus $n^2$ linearen Gleichungen lösen und es ist nicht besonders effektiv, statt eines Gleichungsystems aus $n$ Gleichungen ein Gleichungssystem aus $n^2$ Gleichungen zu lösen.

Es gibt aber andere Methoden, die inverse Matrix auszurechnen. Heute lernen wir das „Gaussverfahren“ (auch Gauss-Jordan-Verfahren genannt) und irgendwann später die Leibniz-Formel.

# Standard-Basis in $Mat(n, n)$ – Wiederholung

Elementarmatrizen sind quadratische Matrizen von spezieller Gestalt.
**Wiederholung.** Standard-Basis in $Mat(n, n)$: Die Matrizen $B_{ij}$, deren $(i, j)$-Element gleich 1 ist und deren andere Elemente gleich 0 sind.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{(i,j)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

**Bsp:** $B_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

# Elementarmatrizen in $Mat(n, n)$

**Elementarmatrix von Typ 1.** Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ~~und $\alpha \neq 0$~~. Falls $i \neq j$, setze $E_{ij}^{\alpha} := Id + \alpha B_{ij}$.

**Bsp in D3.** $E_{13}^{5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Allgemein gilt: Diagonalelemente sind alle gleich 1, auf dem $(i, j)-$Platz steht $\alpha$, sonst steht überall 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{(i,j)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha_{(i,j)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

**Elementarmatrix von Typ 2.** Für $i \in \{1, ..., n\}$ und $\gamma \neq 0$, setze $E_i^\gamma = Id + (\gamma - 1)B_{ii}$.

**Bsp in D3.** $E_2^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (5-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Allgemein gilt: Diagonalelemente sind 1 mit Ausnahme der $(i, i)-$Stelle, auf welcher $\gamma$ steht; sonst steht überall 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} + (\gamma - 1) \cdot \begin{pmatrix} & & & \\ & 1_{(i,i)} & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \gamma_{(i,i)} & & \\ & & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

**Elementarmatrix von Typ 3.** Sei $i, j \in \{1, ..., n\}$. Setze
$E_{ij} := Id - B_{ii} - B_{jj} + B_{ij} + B_{ji}$

**Bsp in D3.** $E_{23} = E_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} +$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Allgemein gilt: Die $i-$te und die $j-$te Zeile sind vertauscht.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1_{(i,i)} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & & \\ & & 1_{(j,j)} \\ & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & 1_{(i,j)} \\ & & \\ & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & \\ 1_{(j,i)} & & \\ & & \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0_{(i,i)} & \cdots & 1_{(i,j)} & \\ & \vdots & 1 & \vdots & \\ & 1_{(j,i)} & \cdots & 0_{(j,j)} & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

# Elementare Zeilenumformungen vom Typ 1,2,3 – Wiederholung

**Typ 1**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & \vdots & \\ (a_{k1} + \lambda a_{i1})x_1 & + \cdots + & (a_{kn} + \lambda a_{in})x_n & = & b_k + \lambda b_i & \longleftarrow \ k\text{–te Zeile} \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

**Typ 2:**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & \vdots & \\ c \cdot a_{k1}x_1 & + \cdots + & c \cdot a_{kn}x_n & = & c \cdot b_k \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

**Typ 3:**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{k1}x_1 & + \cdots + & a_{kn}x_n & = & b_k & \longleftarrow \ i\text{–te Zeile} \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{i1}x_1 & + \cdots + & a_{in}x_n & = & b_i & \longleftarrow \ k\text{–te Zeile} \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

# Eigenschaften der Elementarmatrizen

Sei $A$ eine beliebige $(n \times n)-$ Matrix. Dann gilt:

1. Sei $i \neq j$. Es gilt: Multiplikation von links mit $E_{ij}^{\lambda}$ addiert zur $i$-ten Zeile das $\lambda$-fache der $j$-ten Zeile. (Elementare Zeilenumformung (S1) aus Vorl. 1) Ferner gilt: $(E_{ij}^{\lambda})^{-1} = E_{ij}^{-\lambda}$
2. Multiplikation von links mit $E_i^{\lambda}$ multipliziert die $i$-te Zeile mit $\lambda$. (Elementare Zeilenumformung (S2) aus Vorl. 1) Ferner gilt: $(E_i^{\lambda})^{-1} = E_i^{1/\lambda}$.
3. Multiplikation von links mit $E_{ij}$ vertauscht die $i$-te und die $j$-te Zeile (von $A$) (Elementare Zeilenumformung (S3) aus Vorl. 1) . Ferner gilt: $(E_{ij})^{-1} = E_{ij}$

Wir beweisen die Eigenschaften nur für die Elementarmatrizen vom Typ 1. Für die anderen Typen ist der Beweis analog, bitte unbedingt zu Hause probieren und wenn sie Schwierigkeiten damit haben, bitte in D3 „mit Gewalt“ ausrechnen.
**Folgerung** *Jede Elementarmatrix ist nichtausgeartet. Ihre Inverse ist auch eine Elementarmatrix*
**Beweis der Folgerung.** Die Matrix ist nichtausgeartet, wenn sie eine Inverse hat; die Inversen von Elementarmetrizen sind oben

# Beweis der Eigenschaften einer Matrix vom Typ 1

**Zu beweisende Eigenschaft:** Multiplikation von links mit $E_{ij}^{\lambda}$ addiert zur $i$-ten Zeile das $\lambda$-fache der $j$-ten Zeile.

**Beweis.** Nach Definition ist $E_{ij}^{\lambda} := Id + \lambda B_{ij}$. Dann gilt für beliebige Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$:

$E_{ij}^{\lambda} A = (Id + \lambda B_{ij})A \overset{\text{Matrixaddition/Multiplikation ist distributiv}}{=} A + \lambda(B_{ij}A)$.

Rechnen wir $B_{ij}A$ aus, zuerst in einem Bsp: Wir nehmen $B_{23}$ in D3:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

[Was nicht in der $i-$ten Zeilen steht ist nicht wichtig] =

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} ?\cdot 0 + ?\cdot 0 + a_{31}\cdot 0 & ?\cdot 0 + ?\cdot 0 + a_{32}\cdot 0 & ?\cdot 0 + ?\cdot 0 + a_{33}\cdot 0 \\ ?\cdot 0 + ?\cdot 0 + a_{31}\cdot 1 & ?\cdot 0 + ?\cdot 0 + a_{32}\cdot 1 & ?\cdot 0 + ?\cdot 0 + a_{33}\cdot 1 \\ ?\cdot 0 + ?\cdot 0 + a_{31}\cdot 0 & ?\cdot 0 + ?\cdot 0 + a_{32}\cdot 0 & ?\cdot 0 + ?\cdot 0 + a_{33}\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Analog kann man das für beliebige $n, i, j$ ausrechnen – $B_{ij}A$ ist eine Matrix, deren $i-$te Zeile die $j-$te Zeile von $A$ ist und sonst nur Nullen enthält.

Dann ist $E_{ij}^{\lambda} A \overset{\text{wie oben erklärt}}{=} A + \lambda \cdot B_{ij}A$ wie wir behauptet haben: die $j-$Zeile ist mit Koeffizient $\lambda$ zur $i-$ten Zeile addiert.

# Zu beweisende Eigenschaft:

$E_{ij}^{-\lambda} = \left(E_{ij}^{\lambda}\right)^{-1}$.

Was ist $E_{ij}^{\lambda} Id$? Umformuliert: Was macht die Multiplikation mit $E_{ij}^{\lambda}$ mit der Matrix $Id$?

Dasselbe, was sie mit allen anderen Matrizen macht: sie addiert zu der $i$-ten Zeile von $Id$ das $\lambda$-fache der $j$-ten Zeile.

Was ist $E_{ij}^{-\lambda} E_{ij}^{\lambda} Id$? Umformuliert: Was macht die Multiplikation mit $E_{ij}^{-\lambda}$ mit der Matrix $E_{ij}^{\lambda} Id$?

Dasselbe was sie mit allen anderen Matrizen macht: sie addiert zu der $i$-ten Zeile von $E_{ij}^{\lambda} Id$ das $(-\lambda)-$fache der $j$-ten Zeile.

Also addiert die Multiplikation von $E_{ij}^{-\lambda} E_{ij}^{\lambda}$ mit $Id$ zuerst zur $i-$ten Zeile das $\lambda$-fache der $j$-ten Zeile und dann zur $i$-ten Zeile des Ergebnisses das $-\lambda$-fache der(selben) $j$-ten Zeile. Deswegen ändert die Multiplikation mit $E_{ij}^{-\lambda} E_{ij}^{\lambda}$ die Matrix $Id$ nicht.

Also ist $E_{ij}^{-\lambda} E_{ij}^{\lambda} Id = Id$ und deswegen $E_{ij}^{-\lambda} E_{ij}^{\lambda} = Id$.

**Satz 16** *Jede nichtausgeartete* $(n \times n)$ *Matrix ist das Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen*

**Frage** *Kann eine ausgeartete Matrix Produkt von Elementarmatrizen sein?*

**Nein!** Produkt von nichtausgearteten Matrizen ist nichtausgeartet nach Folgerung 1 aus Satz 15.

# Vor dem Beweis

**Frage.** Was ist $E_{12}^{\lambda}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$?

Ich habe das gerade erklärt: Multiplikation mit $E_{12}^{\lambda}$ addiert zur $1-$ten Zeile das $\lambda-$fache der $2-$ten Zeile. Dann ist

$$E_{12}^{\lambda}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+\lambda a_{21} & a_{12}+\lambda a_{22} & a_{13}+\lambda a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

**Frage.** Was ist $(E_3^{\mu} E_{12}^{\lambda})\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$?

Wegen Assoziativität ist $(E_3^{\mu} E_{12}^{\lambda})\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$

$$E_3^{\mu}\left(E_{12}^{\lambda}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right) = E_3^{\mu}\begin{pmatrix} a_{11}+\lambda a_{21} & a_{12}+\lambda a_{22} & a_{13}+\lambda a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

[ Multiplikation von links mit $E_3^{\mu}$ multipliziert die 3-te Zeile mit $\mu$] $=$

$$\begin{pmatrix} a_{11}+\lambda a_{21} & a_{12}+\lambda a_{22} & a_{13}+\lambda a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \mu a_{31} & \mu a_{32} & \mu a_{33} \end{pmatrix}.$$

# Rechnen Sie bitte selbst:

Was ist $(E_2^{1/\mu} E_{23} E_3^{\mu} E_{12}^{\lambda}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$?

**Antwort.** Das ist $\left( E_2^{1/\mu} \left( E_{23} \begin{pmatrix} a_{11} + \lambda a_{21} & a_{12} + \lambda a_{22} & a_{13} + \lambda a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \mu a_{31} & \mu a_{32} & \mu a_{33} \end{pmatrix} \right) \right) =$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + \lambda a_{21} & a_{12} + \lambda a_{22} & a_{13} + \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

# Die Idee des Beweises

Sei $A$ eine nichtausgeartete Matrix. Es genügt zu zeigen: Man kann sie mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix $Id$ überführen. Tatsächlich, jede elementare Zeilenumformung ist dasselbe wie die Multiplikation mit einer geeigneten Elementarmatrix. Also gibt es Elementarmatrizen $E_1, E_2, ..., E_m$, so dass

$$E_1 E_2 ... E_m A = Id. \qquad (*)$$

Dann ist $E_1 E_2 ... E_m$ die inverse Matrix zu $A$, also
$A = (E_1 E_2 ... E_m)^{-1} = E_m^{-1} ... E_2^{-1} E_1^{-1}$.
Aber die inverse Matrix einer Elementarmatrix ist auch eine Elementarmatrix. Also ist $A = E_m^{-1} ... E_2^{-1} E_1^{-1}$ ein Produkt von Elementarmatrizen

# Wie kann man eine nichtausgeartete Matrix mit Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix $Id$ überführen?

**Schritt 1.** Mit dem Gauß-Algorithmus kann man eine Matrix in Stufenform bringen. Wir werden zeigen, dass wenn die ursprüngliche Matrix nichtausgeartet ist, dann alle „Stufen" die Länge 1 haben, also die Stufenform der Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ist,
wobei alle Diagonalelementen $a_{ii} \neq 0$.

**Schritt 2.** Jetzt benutzen wir die Operationen des Typs 1 um alle Elemente über der Diagonalen auf 0 zu bringen: um z.B. das $(1,2)-$Element auf Null zu bringen, addieren wir zur 1. Zeile das $\left(-\frac{a_{12}}{a_{22}}\right)-$fache der zweiten Zeile. Wir machen dies für alle Elemente über der Diagonalen', d.h. $(i,j)-$Plätze mit $i < j$. Wir bekommen dann die Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

**Schritt 3.** Mit Operationen von Typ 2 (Multiplizieren der $i-$ten Zeile, $i = 1, ..., n$, mit einem geeigneten Skalar; in unserem Fall mit $\frac{1}{a_{ii}}$) bekommen wir die Einheitsmatrix.

# Beispiel in D3

**Schritt 1.** $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Vertausche die erste und die dritte Zeile} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$\text{Subtrahiere das doppelte der ersten Zeile von der zweiten} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$\text{Subtrahiere das dreifache der ersten Zeile von der dritten} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$\text{Vertausche die zweite und die dritte Zeile und multipliziere diese mit } -1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die Matrix ist in Stufenform; wir sehen, dass die Diagonalelemente nicht 0 sind (wie gesagt ist dies immer der Fall, wenn die ursprungliche Matrix nichtausgeartet ist.)

**Schritt 2** $\text{Subtrahiere das doppelte der zweiten Zeile von der ersten} \longrightarrow$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Addiere das achtfache der dritten Zeile zur ersten} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$\text{Subtrahiere das fünffache der dritten Zeile von der zweiten} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$ wie wir wollten.

**Schritt 3** Fällt in diesem Bsp. weg, weil wir bereits die Einheitsmatrix bekommen haben. Das ist Zufall; in der Regel liefert Schritt 2 nur eine Diagonalmatrix und man muss noch mit Operationen vom Typ 2 (Zeilen mit Skalaren multiplizieren) die Diagonalelemente auf 1 bringen.

# Beweis von Satz 16

.

**Aus Satz 2 (Gauß) folgt:** Jede Matrix kann man auf Stufenform mit Hilfe von endlich vielen elementaren Zeilenumformungen bringen. Wir wissen, dass jede elementare Zeilenumformung mit der Matrix dasselbe macht wie eine Multiplikation von links mit einer geeigneten Elementarmatrix. Also existieren (sagen wir $k$) Elementarmatrizen $E_1, ..., E_k$ sodass

$$A^{(k)} = E_1 ... E_k A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & \dots & a_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

(Da die Matrix eine $(n \times n)-$Matrix in Stufenform ist, sind alle Elemente unter der Diagonalen gleich 0.)
Da die Matrix $A$ nichtausgeartet ist, ist auch die Matrix $A^{(k)}$ nichtausgeartet. Denn nach Folg. 1 aus Satz 15 ist $A^{(k)} = \underbrace{E_1 ... E_k \cdot A}_{\text{Produkt von nichtausg. Matrizen}}$, also eine nichtausgeartete Matrix.

Wir haben bewiesen, dass Elementarmatrizen $E_1, ..., E_k$ existieren, sodass $A^{(k)} := E_1...E_k \cdot A$ die Form $\begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & \dots & a_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$ hat; ferner wissen wir, dass $A^{(k)}$ nichtausgeartet ist.

**Wir zeigen jetzt,** dass die Elemente $a_{ii}^{(k)}$ auf der Diagonale $\neq 0$ sind.

**Widerspruchsbeweis.** Angenommen das $i$-te Element auf der Diagonalen von $A^{(k)}$ ist gleich 0. Wir betrachten die Vektoren $A^{(k)}e_j$, wobei $j \leq i$ (also die ersten $i$ Spalten von $A^{(k)}$). Nur die ersten $i-1$ Einträge von diesen Vektoren können ungleich 0 sein, weil die letzten $n-i+1$ Einträge der ersten $i$ Spalten gleich 0 sind. Dann sind die Vektoren $A^{(k)}e_j$ (wobei $j \leq i$) Linearkombinationen der Vektoren $e_1, ..., e_{i-1}$. Dann ist $dim(Span(\{A^{(k)}e_j,\ j = 1, .., i\}) \leq i-1$. Folglich sind die Vektoren $A^{(k)}e_j$ linear abhängig nach Folg (a) aus dem Austauschsatz, was nach Satz 15 unmöglich ist (weil $A^{(k)}$ nichtausgeartet ist). Der Widerspruch zeigt, dass alle Diagonalelemente $a_{ii}^{(k)} \neq 0$ sind.

**Schritt 2** Wir wollen jetzt die Elemente über der Diagonalen mit Hilfe einer Multiplikation von links mit Elementarmatrizen $E_{ij}^{\lambda}$, also mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen vom Typ 1, auf 0 bringen.

Um ein Element $a_{ij}^{(k)}$ (wobei $i < j$) auf Null zu bringen, multiplizieren wir die Matrix mit $E_{ij}^{\lambda}$ , wobei $\lambda = -\frac{a_{ij}^{(k)}}{a_{jj}^{(k)}}$. Diese Multiplikation addiert zur $i$-ten Zeile die $j$-te Zeile der Matrix $A^{(k)}$ und ändert die Elemente unter der Diagonalen der Matrix nicht. Auf dem Platz $(i, j)$ des Ergebnisses steht $a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ij}^{(k)}}{a_{jj}^{(k)}} a_{jj}^{(k)} = 0$. Wir tun das zuerst für die zweite Spalte, dann für die dritte u.s.w.

Wir bekommen eine Matrix bei der nur die Elemente auf der Diagonalen von 0 verschieden sind (man bemerke, dass die Elemente auf der Diagonalen dieselben wie in der Matrix $A^{(k)}$ und deswegen nicht 0 sind.) Also existieren Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_m$, sodass $A^{(m)} := E_1 \ldots . E_m \cdot A$ Diagonalform hat,

$$A^{(m)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & \ldots & 0 \\ \vdots & & 0 \\ 0 & \ldots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

**Schritt 3.** Mit Hilfe einer Multiplikation mit geeigneten $E_i^{\lambda}$ können wir auch die Elemente auf der Diagonalen zu 1 machen. Wir bekommen die *Id* Matrix, also $E_1 E_2 \ldots E_r A = Id$. □

# Beispiel zum Beweis/ Konstruktion der inversen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{31}^1 E_{12} A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix} \qquad E_{31}^1 E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{32}^{-2} E_{31}^1 E_{12} A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_{32}^{-2} E_{31}^1 E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{13}^{-11} E_{23}^{-6} E_{32}^{-2} E_{31}^1 E_{12} A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_{13}^{-11} E_{23}^{-6} E_{32}^{-2} E_{31}^1 E_{12} = \begin{pmatrix} 22 & 10 & -11 \\ 13 & -6 & -6 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{12}^{-1} E_{13}^{-11} E_{23}^{-6} E_{32}^{-2} E_3^1 E_{12} A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_{12}^{-1} E_{13}^{-11} E_{23}^{-6} E_{32}^{-2} E_{32}^{-2} E_{31}^1 E_{12} = \begin{pmatrix} 9 & -4 & -5 \\ 13 & -6 & -6 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1^{1/2} E_2^{1/3} E_{12}^{-1} E_{13}^{-11} E_{23}^{-6} E_{32}^{-2} E_{31}^1 E_{12} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_1^{1/2} E_2^{1/3} E_{13}^{-11} E_{23}^{-6} E_{32}^{-2} E_{32}^{-2} E_{31}^1 E_{12} = \begin{pmatrix} 9/2 & -2 & -5/2 \\ 13/3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Also ist die inverse Matrix $E_1^{1/2} E_2^{1/3} E_{12}^{-1} E_{13}^{-11} E_{23}^{-6} E_{32}^{-2} E_{31}^1 E_{12} Id$

Also haben wir die inverse Matrix zur $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ konstruiert: sie ist $A^{-1} = E_1^{1/2} E_2^{1/3} E_{12}^{-1} E_{13}^{-11} E_{23}^{-6} E_{32}^{-2} E_{31}^{1} E_{12}$ (wir haben sie auch ausgerechnet; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 9/2 & -2 & -5/2 \\ 13/3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, aber diese lange Formel ist nützliche für uns.)

Dann können wir sie invertieren: da $(A^{-1})^{-1} = A$ nach rechnenregeln (direkt nach Folg. 1 aus Satz 15).

$$A = (A^{-1})^{-1} = \left(E_1^{1/2} E_2^{1/3} E_{12}^{-1} E_{13}^{-11} E_{23}^{-6} E_{32}^{-2} E_{31}^{1} E_{12}\right)^{-1}$$

$$= E_{12} E_{31}^{-1} E_{32}^{2} E_{23}^{6} E_{13}^{11} E_{12}^{1} E_2^{3} E_1^{2}$$

# Methode der Elementarmatrizen zum Berechnen der inversen Matrix

Sei $A$ eine $(n \times n)$ Matrix. Die Idee: um mit dem Gauß-Algorithmus die Zerlegung von $A$ in ein Produkt von Elementarmatrizen zu bekommen, haben wir Elementarmatrizen $E_1, ..., E_r$ gefunden, sodass $E_1 ... E_r \cdot A = Id$. Dann ist das Produkt $E_1 ... E_r$ gleich der inversen Matrix von $A$.

Die Matrizen $E_1, ..., E_r$ entsprechen den elementaren Zeilenoperationen, die wir durchgeführt haben, um aus $A$ die Einheitmatrix zu bekommen. Wenn wir dieselben Zeilenoperationen in derselben Reihenfolge auf $Id$ anwenden, bekommen wir die Matrix $E_1 ... E_r$, also die zu $A$ inverse Matrix.

**Algorithmus.** Schreibe die Matrix $Id$ neben $A$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

Mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen überführen wir die Matrix $A$ in $Id$. Jede elementare Zeilenumformung wird auch auf der rechten Seite angewendet. Wenn links $Id$ steht, steht rechts $A^{-1}$.

Bsp: Invertiere die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$ Zeile II:$=$ Zeile II- 2(Zeile I)

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$ Zeile I:$=$ Zeile I -2 (Zeile II)

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$ Rechts steht die inverse Matrix zu $A$.

Wir machen es für $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Vertausche die erste und die dritte Zeile

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Subtrahiere das doppelte der ersten Zeile von der zweiten

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Subtrahiere das dreifache der ersten Zeile von der dritten

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Vertausche die zweite und die dritte Zeile und multipliziere diese mit -1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Subtrahiere das doppelte der zweiten Zeile von der ersten

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -8 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Addiere das achtfache der dritten Zeile zur ersten $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 8 & -21 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$

Subtrahiere das fünffache der dritten Zeile von der zweiten $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 8 & -21 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -5 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$

Links steht $Id$, also steht rechts $A^{-1}$. Also $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -21 \\ -1 & -5 & 13 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

# Abschnitt: Determinante

Bezeichnung Die $i$-te Zeile werden wir mit $[a_i]$ bezeichnen. Die Null-Zeile werden wir mit $\mathbf{0}$ bezeichnen. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$.

**Def.** *Eine Abbildung $det : Mat(n,n) \to \mathbb{R}$ heißt eine Determinantenabbildung, falls die folgende Eigenschaften erfüllt sind*

D1 *Eine Determinante ist linear in jeder Zeile, d.h.*

$$det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i]+[b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \quad ; \quad det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ \lambda\,[a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = \lambda det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

D2 *(Eine Determinante ist alternierend): Stimmen zwei Zeilen der Matrix $A$ überein, so ist $det(A) = 0$.*

D3 *(Eine Determinante ist normiert): $det(Id) = 1$*

**Fragen** *Existiert solche Funktion? Ist sie eindeutig? Wie kann man sie ausrechnen?*

# Satz 17

*Sei $det : M(n,n) \to \mathbb{R}$ eine Determinantenabbildung. Dann gilt für alle $A, B \in Mat(n,n)$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$:*

- D4 *Ist eine Zeile von $A$ gleich $\mathbf{0}$, so ist $det(A) = 0$.*
- D5 *Entsteht $B$ aus $A$ durch Vertauschung zweier Zeilen, so ist $det(B) = -det(A)$.*
- D6 *Entsteht $B$ aus $A$ durch Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen, so ist $det(B) = det(A)$.*

Beweis für (D4):

$$det(A) =_{det} \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ 0 \cdot \mathbf{0} \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \overset{\text{Linearität}}{=} 0 \cdot det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = 0$$

## Beweis für (D5):

$$0 \overset{(D2)}{=} \det \begin{array}{c} \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \ i\text{-te Zeile} \\ \\ \leftarrow \ j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array} \overset{\text{Linearität}}{=} \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Linearität}}{=} \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \overset{(D2)}{=}$$

$$0 + \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + 0; \quad \text{Also} \quad \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \qquad \square$$

# Beweis für (D6)

$$det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] + \lambda \left[a_j\right] \\ \vdots \\ \left[a_j\right] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \ i\text{-te Zeile} \\ \\ \leftarrow \ j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{matrix} \overset{\text{Linearität}}{=} det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ \left[a_j\right] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + \lambda det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ \left[a_j\right] \\ \vdots \\ \left[a_j\right] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \overset{(D2)}{=}$$

$$det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ \left[a_j\right] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + \lambda 0$$

$\square$

**Folgerung** *Sind die Zeilen von $A \in Mat(n,n)$ linear ~~un~~abhängig, so ist $det(A) = 0$.*

**Beweis.** Angenommen $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, [a_i] = \mathbf{0}$, wobei nicht alle $\lambda_i$ gleich 0 sind. OBdA ist dann $\lambda_1 \neq 0$, sonst die Zeilen vertauschen. Dann ist $[a_1] = -\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1}[a_i]$, also

$$det(A) = \det \begin{pmatrix} -\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \, [a_i] \, , \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \stackrel{\text{Linearität}}{=} -\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \det \begin{pmatrix} [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \stackrel{\text{(D2)}}{=} \sum_{i=2}^{n} 0 = 0$$

$\square$

## Die Eigenschaften **(D1–D6)** erlauben uns, Determinanten von einigen Matrizen auszurechen

**Bsp.** $det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{\text{(D6); Z2:=Z2- 2 Z1}}{=} det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{(D1); Z2:=(-1)}\cdot\text{Z2}}{=}$
$-det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{(D6); Z1:=Z1- 2 Z2}}{=} -det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{(D3)}}{=} -1.$

**Bsp.** $det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 0$. In der Tat, die Zeilen der Matrix sind linear abhängig:

$$-Z1+2\cdot Z2-Z3 = -[1,2,3]+2\cdot[4,5,6]-[7,8,9] = [0,0,0].$$

Dann ist $det = 0$ nach Folgerung aus Satz 17.