Abschnitt: (symmetrische) Bilinearformen

Def. Es seien $(V, +, \cdot)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, u, u', u'', v, v', v'' beliebige Vektoren aus V und $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{K}$ beliebiege Skalare. Eine Bilinearform auf V ist eine Abbildung $\sigma : V \times V \to \mathbb{K}$ mit der Eigenschaft

(Bilinearität) $\sigma(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = \lambda' \sigma(u', v) + \lambda'' \sigma(u'', v)$, $\sigma(u, \lambda' v' + \lambda'' v'') = \lambda' \sigma(u, v') + \lambda'' \sigma(u, v'')$.

(Symmetrie) Eine Bilinearform σ heißt symmetrisch, falls $\forall u, v \in V$ gilt $\sigma(u, v) = \sigma(v, u)$.

Bemerkung $\sigma(\vec{0}, v) = \sigma(u, \vec{0}) = 0$. Tatsächlich, $\sigma(\vec{0}, v) = \sigma(0 \cdot \overrightarrow{0}, v) \overset{\text{Linearität}}{=} 0 \cdot \sigma(\vec{0}, v) = 0$.

Bsp. (Standard-Skalarprodukt) auf $\mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{K}^n$). Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ setze $\sigma(x, y) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$.

Das ist eine symmetrische Bilinearform
Symmetrie ist offensichtlich (weil $x_i y_i = y_i x_i$).
Bilinearität:

$$\sigma(\lambda' x' + \lambda'' x'', y) = (\lambda' x_1' + \lambda'' x_1'') y_1 + ... + (\lambda' x_n' + \lambda'' x_n'') y_n =$$
$$= \lambda' x_1' y_1 + ... + \lambda' x_n' y_n + \lambda'' x_1'' y_1 + ... + \lambda'' x_n'' y_n =$$
$$= \lambda' \sigma(x', y) + \lambda'' \sigma(x'', y).$$

Linearität bzgl. 2tem Eintrag zeigt man analog.

Bsp. $\sigma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei wie folgt definiert:
Für $x = \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2$ und $y = \binom{y_1}{y_2} \in \mathbb{R}^2$ setzen wir
$\sigma(x, y) := x_1 y_2 - x_2 y_1$.

Das ist eine Bilinearform: Linearität zeigt man wie im Beispiel oben:
$\sigma(\lambda' \cdot x' + \lambda'' \cdot x'', y) := \underbrace{\lambda' \cdot x_1' y_2 - \lambda' \cdot x_2' y_1}_{\lambda' \cdot \sigma(x', y)} + \underbrace{\lambda'' \cdot x_1'' y_2 - \lambda'' \cdot x_2'' y_1}_{\lambda'' \cdot \sigma(x'', y)}$.

Die Bilinearform σ ist aber nicht symmetrisch:

Nach Definition ist $\sigma(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$ und
$\sigma(y, x) = y_1 x_2 - y_2 x_1 = -(x_1 y_2 - x_2 y_1) = -\sigma(x, y)$.
Also $\sigma\left(\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\right) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 \neq \sigma\left(\binom{0}{1}, \binom{1}{0}\right) = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$,
was zeigt, dass σ nicht symmetrisch ist.

Bemerkung. Die Bilinearformen mit Eigenschaft $\sigma(u, v) = -\sigma(v, u)$ heissen anti- oder skew- oder schiefsymmetrisch.

Hauptbeispiel:

Sei $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V. *Sei* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. *Wir identifizieren* $Mat(n, 1, \mathbb{K})$ *mit* $\mathbb{K}^n$ *und* $Mat(1, 1, \mathbb{K})$ *mit* $\mathbb{K}$ *und definieren* $\sigma_A : V \times V \to \mathbb{K}$ *wie folgt: Für die Vektoren* u, v *mit Koordinaten* $C_B(u) := x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ *bzw.* $C_B(v) := y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ *setze*

$$\sigma_A(u, v) = x^t A y = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in Mat(1, 1, \mathbb{K}) \equiv \mathbb{K}.$$

(In einer Formel: $\sigma_A(u, v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$*.)*

Bsp. Für $V = \mathbb{R}^2$ mit der Standard-Basis (e_1, e_2) und $A = Id$ ist $\sigma_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 y_1 + x_2 y_2)$ (Dies ist das Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$).

Die Form σ_A ist bilinear: Tatsächlich,
$\sigma_A(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = (\lambda' x' + \lambda'' x'')^t A y = (\lambda' x'^t + \lambda'' x''^t) A y = \lambda' x'^t A y + \lambda'' x''^t A y = \lambda' \sigma_A(u', v) + \lambda'' \sigma_A(u'', v)$.
Linearität bzgl. zweiter Variable ist ähnlich.

Noch einmal: wir brauchen die folgenden Daten für σ_A: eine Matrix A und eine Basis.

Berechnen Sie bitte selbst: $\sigma_A(x, y)$

wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (alles ist über $\mathbb{R}$).

Antwort: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = (-6)$.

Bsp. Wir betrachten das Bilinearprodukt aus dem anderen Beispiel oben: $\sigma(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$.
Diese Bilinearform kann man auch wie im Hauptbeispiel darstellen. Die entsprechende Matrix ist $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (und die entsprechende Basis ist die Standardbasis):

$$(x_1 \ x_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 \ x_2)\begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1 = \sigma(x, y).$$

Lemma 29 *Die Bilinearform σ_A ist symmetrisch $\Longleftrightarrow A^t = A$. (Solche Matrizen heißen symmetrische Matrizen)*

Bsp: symmetrische Matrizen.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 22 & 2 & 7 \\ 2 & 14 & 5 \\ 7 & 5 & 71 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

Bsp. Wir haben gesehen, dass das Standard-Skalarprodukt, also die Bilinearform

$$\sigma\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = (x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

symmetrisch ist. Die Matrix *Id* ist offensichtlich auch symmetrisch.

Bsp. Wir haben gesehen, dass die Bilinearform $\sigma(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$ nicht symmetrisch ist.
Die Matrix A für diese Bilinearform haben wir ebenfalls konstruiert: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; diese Matrix ist NICHT symmetrisch, weil $A^t = -A \neq A$.

Beweis in „$\Longleftarrow$“

Lemma 29 *Die Bilinearform σ_A ist symmetrisch $\Longleftrightarrow$ $A^t = A$. (Solche Matrizen heißen symmetrische Matrizen)*

Wiederholung — (Rechenregel für das Produkt transponierter Matrizen) :
$(AB)^t = B^t A^t$.

Beweis in „$\Longleftarrow$“. Angenommen, $A^t = A$. Setzen wir $\sigma_A(u, v) = \alpha$. Z.z.: $\sigma_A(v, u) = \alpha$. Seien $x = C(u) \in \mathbb{R}^n$ und $y = C(v) \in \mathbb{R}^n$ die Koordinatenvektoren von u und v. Nach Definition ist
$Mat(1,1) \ni (\alpha) \overset{Def.}{=} x^t A y \qquad (*)$
Wir transponieren die beiden Seiten der Gleichung $(*)$. Da $(\alpha)^t = (\alpha)$,
$(\alpha) = (x^t A y)^t \overset{\text{Rechenregel}}{=} y^t A^t (x^t)^t \overset{\text{weil } (x^t)^t = x \text{ und } A^t = A \text{ ist}}{=} y^t A x = \sigma_A(v, u)$.
Also $\sigma_A(u, v) = \alpha = \sigma_A(v, u)$ und σ_A ist daher symmetrisch.

Beweis in „$\Longrightarrow$“

Wicht. Frage vor dem Beweis: Was ist $\sigma_A(b_i, b_j)$?

Antwort: Wir wissen, dass $C(b_j) = e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{Platz j} \\ \\ \\ \end{array}$ ist. Dann

gilt:

$$\sigma_A(b_i, b_j) = (0 \dots \underbrace{1}_{\text{Platz i}} \dots 0) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{Platz j} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= (0 \dots \underbrace{1}_{\text{Platz i}} \dots 0) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_{ij}.$$

Beweis von $\Longrightarrow$ in Lemmas 29: Angennommen, σ_A ist symmetrisch. Dann ist $\sigma_A(b_i, b_j) = \sigma_A(b_j, b_i)$. Dann ist $a_{ij} = a_{ji}$, und deswegen $A^t = A$. $\square$

Jede Bilinearform ist wie in HauptBsp.

Satz 33. *Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in einem $\mathbb{K}-$Vektorraum V. Dann gilt: für jede Bilinearform σ auf V gibt es genau ein $A \in Mat(n, n)$, so dass $\sigma = \sigma_A$. Ferner gilt: das Element (i, j) der Matrix A ist gleich $\sigma(b_i, b_j)$.*

Die Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform oder Gramsche Matrix.

Bsp. Wir haben gesehen, dass die Gramsche Matrix des Standard-Skalarprodukts bzgl. der Standardbasis, $\sigma(x, y) := x_1y_1 + ... + x_ny_n$, gleich Id ist

(weil $x^t \; Id \; y = (x_1 \cdots x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1y_1 + ... + x_ny_n$)

Man kann Sie auch mit der im Satz vorgeschlagenen Regel konstruieren: $(i, j)-$Element ist

$$\begin{cases} \text{für } i = j & \sigma(e_i, e_i) = 0 \cdot 0 + ... + 1 \cdot 1 + ... + 0 \cdot 0 = 1 \\ \text{für } i \neq j & \sigma(e_i, e_j) = 0 \cdot 0 + ... + 1 \cdot 0 + ... + 0 \cdot 1 + ... + 0 \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

wie in der Einheitsmatrix.

Satz 33. *Sei $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis in einem $\mathbb{K}-$Vektorraum V. Dann gilt: für jede Bilinearform σ auf V gibt es genau ein $A \in Mat(n, n)$, so dass $\sigma = \sigma_A$. Ferner gilt: das Element (i, j) der Matrix A ist gleich $\sigma(b_i, b_j)$.*

Bsp. Wir haben gesehen, dass die Gramsche Matrix der Bilinearform $\sigma(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$ bzgl. der Standardbasis gleich $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist.
Man kann diese Matrix auch mit Satz 33 ausrechnen:
$(1, 1)-$Eintrag davon ist $\sigma(e_1, e_1) = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 1 = 0$,
$(1, 2)-$Eintrag davon ist $\sigma(e_1, e_2) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$ u.s.w.

Beweis von Satz 33: zuerst Konstruktion und Eindeutigkeit.

Angenommen $\sigma_A(u, v) = \sigma_B(u, v)$ für alle $u, v \in V$. Dann ist $\sigma_A(b_i, b_j) = \sigma_B(b_i, b_j)$.

Da $\sigma_A(b_i, b_j)$ gleich dem Element (i, j) von A ist (siehe **Wicht. Bsp.** in Beweis von Lemma 29) und $\sigma_B(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von B ist, sind die Matrizen gleich.

Eindeutigkeit ist bewiesen. Außerdem sehen wir, dass wenn $\sigma = \sigma_A$ für eine Matrix A ist, dann ist $(i, j)-$Eintrag von A gleich $\sigma(b_i, b_j)$.

Beweis der Existenz

Man betrachte die Matrix A mit $a_{ij} = \sigma(b_i, b_j)$. Man betrachte die Bilinearform $\sigma_0 : V \times V \to \mathbb{R}$, $\sigma_0(u, v) := \sigma(u, v) - \sigma_A(u, v)$.
Z.z.: $\sigma_0(u, v) = 0$. Nach Konstruktion ist

$$\sigma_0(b_i, b_j) = \underbrace{\sigma(b_i, b_j)}_{a_{ij}} - \underbrace{a_{ij}}_{\text{Wicht. Bsp}} = 0. \qquad (*)$$

Seien $u = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$ und $v = y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n$. Dann ist
$\sigma_0(u, v) = \sigma_0(x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n, y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n) =$
$x_1 \sigma_0(b_1, y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n) + \ldots + x_n \sigma_0(b_n, y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n) =$

$$= x_1 \big(y_1 \underbrace{\sigma_0(b_1, b_1)}_{0 \text{ nach } (*)} + \ldots + y_n \underbrace{\sigma_0(b_1, b_n)}_{0 \text{ nach } (*)} \big) + \ldots + x_n \big(y_1 \underbrace{\sigma_0(b_n, b_1)}_{0 \text{ nach } (*)} + \ldots + y_n \underbrace{\sigma_0(b_n, b_n)}_{0 \text{ nach } (*)} \big).$$

Da alle $\sigma_0(b_i, b_j) \overset{(*)}{=} 0$, ist die Summe oben gleich 0. $\square$

Bemerkung. Es gibt eine klare Analogie zum Beweis von Satz 13 aus dem Abschnitt „Matrizen von linearen Abbildungen“: Wir haben gezeigt, dass wegen der Linearität die Werten der Bilinearform auf den Basisvektoren die Bilinearform bestimmen. Die Gramsche Matrix A ist so konstruiert, dass $\sigma(b_i, b_j) = \sigma_A(b_i, b_j)$ für beliebige Basisvektoren b_i, b_j; daraus folgt dass $\sigma \equiv \sigma_A$.

Wie ändert sich die Gramsche Matrix, wenn wir die Basis wechseln?

Wiederholung: Gramsche Matrix zu σ bzgl. Basis B ist die Matrix A sodass $\sigma(u,v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$. $\qquad (*)$

Wiederholung — Satz 25 $\forall v$ *gilt:*
$TC_{B'}(v) = C_B(v)$, $\qquad (**)$
wobei T die Transformationsmatrix von B nach B' ist,d.h. die Spalten von T sind die Koordinaten von b_i' in der Basis B.

Also ist $\sigma(u,v) \overset{(*)}{=} (C_B(u))^t A C_B(v) \overset{(**)}{=} (TC_{B'}(u))^t ATC_{B'}(v) \overset{\text{Rechenregel}}{=} (C_{B'}(u))^t \underbrace{T^t A T}_{A'} C_{B'}(v)$.

Wir haben bewiesen:

Satz 34 (Transformationsregel für Gramsche Matrizen). Sei A die Gramsche Matrix der Bilinearform σ bzgl. der Basis B. Dann ist $A' := T^t A T$ die Gramsche Matrix von σ bzgl. der Basis B', wobei T die Transformationsmatrix von B nach B' ist.

Kleine Übung: Ist A symmetrisch (d.h. $A^t = A$), so ist $T^t A T$ auch symmetrisch. In der Tat, $(T^t A T)^t \overset{\text{Rechenregel}}{=} T^t A^t (T^t)^t = T^t A T$.

Zielsetzung:

Ziel: Symmetrische Bilinearformen untersuchen.
Methode: Suchen eine Basis, sodass die Matrix „einfach“ ist.
Wiederholung – Satz 34 (Transformationsregel für Gramsche Matirzen). Nach Basiswechseln mit der Transformationsmatrix T wird die Gramsche Matrix A der Bilinearform σ wie folgt geändert: $A \mapsto T^t AT$.
Ziel umformuliert: In welche „einfachste“ Form kann man eine Matrix mit Hilfe der Transformation $A \mapsto T^t AT$ bringen (wobei $T \in Mat(n, n)$ nichtausgeartet ist)?

Das Problem kann man über beliebigen Körper stellen. Wir werden die vollständige Antwort nur für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ geben.

Skalarprodukt:

Def. einer Bilinearform – Vorsetztung: Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Eine Bilinearform heißt positiv definit, falls

(Positive Definitheit) $\sigma(u, u) > 0$ für $u \neq \vec{0}$. (Ist sinnvoll nur in $\mathbb{R}$)
Eine symmetrische positiv definite Bilinearform heißt ein Skalarprodukt (oder: inneres Produkt).
Bsp. Das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$,
$\sigma(x, y) = x_1y_1 + ... + x_ny_n = (x_1 \; ... \; x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, ist ein Skalarprodukt:

Bilinearität und Symmertrie haben wir bereits bewiesen.

Z.z.: (Positive Definitheit): $\sigma(x, x) = x_1^2 + ... + x_n^2 \overset{\text{für } x \neq \vec{0}}{>} 0$

Bsp.

Seien $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$. Setze $\sigma(x,y) = \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$. Das ist eine symmetrische Bilnearform auf $\mathbb{R}^n$ (beweis wie im Bsp. mit Standard-Skalarprodukt).

Frage: *Ist sie positiv definit?* **Frage umformuliert:** *Ist $\sigma(x,x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \vec{0}$?*

Antwort hängt von den α_i ab. Sind alle $\alpha_i > 0$, so ist $\sigma(x,x) = \alpha_1 x_1^2 + ... + \alpha_n x_n^2 \geq 0$ und dies ist nur für $x = \vec{0}$ gleich 0. Falls ein $\alpha_i \leq 0$ ist, dann ist

$$\sigma(e_i, e_i) = \alpha_1 \cdot 0 + ... + \underbrace{\alpha_i \cdot 1 \cdot 1}_{i-\text{te Summante}} + ... + \alpha_n \cdot 0 = \alpha_i \leq 0, \text{ also}$$

gibt es (mind) ein $u \neq \vec{0}$, nähmlich $u)e_i$, so dass $\sigma(u,u) \leq 0$ und die Bilinearform ist daher nicht positiv definit.

Frage: Was ist die Gramsche Matrix von σ?

Antwort: $a_{ij} \overset{\text{Satz 33}}{=} \sigma(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ \alpha_i & \text{für } i = j \end{cases}$

Also ist die Gramsche Matrix $\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Orthogonale und orthonormale Basen

Def. *Eine Basis* $(b_1, ..., b_n)$ *heißt orthogonal bzgl. einer Bilinearform* σ*, falls für alle* $i \neq j \in \{1, ..., n\}$ *gilt:* $\sigma(b_i, b_j) = 0$*. Falls zusäzlich für jedes* $i \in \{1, ..., n\}$ $\sigma(b_i, b_i) = 1$ *gilt, dann heißt die Basis orthonormal*

Bsp. *Die Standard-Basis in* $\mathbb{R}^n$ *ist eine Orthogonalbasis für die Bilinearform* $\sigma(x, y) := \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$*.*

(In der Tat, für $i < j$ *gilt*

$$\sigma(e_i, e_j) := 0 \cdot 0 + ... + \underbrace{\alpha_i \cdot 1 \cdot 0}_{i-te\ Summante} + ... + \underbrace{\alpha_j \cdot 0 \cdot 1}_{j-te\ Summante} + ... + 0 \cdot 0 = 0.)$$

Außerdem ist jede Basis der Form $(\lambda_1 \cdot e_1, ..., \lambda_n \cdot e_n)$ *wobei* $\lambda_i \neq 0$ *orthogonal (d.h. alle Vektoren sind vielfache der Standard-Basisvektoren).*

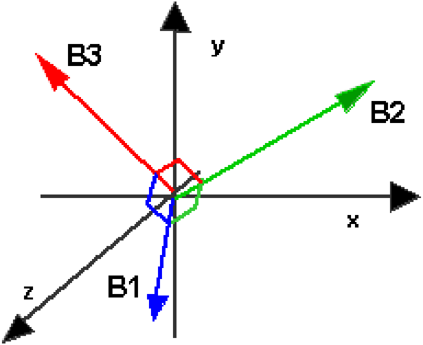
Bsp. *Die Standard-Basis in* $\mathbb{R}^n$ *ist eine Orthonormalbasis für das Standard-Skalarprodukt* $\sigma(x, y) := x_1 y_1 + ... + x_n y_n$*. In der Tat, wie wir oben bewiesen haben, ist sie orthogonal. Da zusätzlich*

$$\sigma(e_i, e_i) := 0 + ... + \underbrace{1 \cdot 1}_{i-ter\ Summand} + ... + 0 = 1,$$ *ist sie orthonormal.*

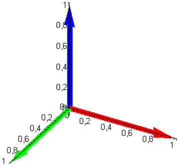
Die Basis der Form $(\lambda_1 \cdot e_1, ..., \lambda_n \cdot e_n)$ *mit* $\lambda_i \neq 0$ *ist im Allgemeinen nicht mehr orthonormal: die Bedingung* $\sigma(b_i, b_j) = 0$ *für* $i \neq j$ *ist erfüllt, aber die Bedingung* $\sigma(b_i, b_i) = 1$ *ist nur dann erfüllt, wenn die* $\lambda_i \in \{1, -1\}$ *sind.*

Geometrische Vorstellung

Wir werden später (in einem Vektorraum mit Skalarprodukt) „Länge“ und „Winkel“ einführen.
Sie werden sehen, dass eine Basis g.d. orthogonal ist, wenn alle Winkel zwischen den Basisvektoren rechte Winkel sind, und g.d. orthonormal, wenn zusätzlich alle Basisvektoren die Länge 1 haben.



Orthogonale Basis



Orthonormale Basis

Lemma 30 Sei σ eine Bilinearform. Dann gilt:
Ist $(b_1, ..., b_n)$ eine orthogonale Basis, so ist die Gramsche Matrix von σ diagonal.
Ist $(b_1, ..., b_n)$ eine orthonormale Basis, so ist die Gramsche Matrix von σ gleich Id.

Beweis: Ausrechnen: nach Definition der Gramschen Matrix $A = (a_{ij})$ gilt $a_{ij} = \sigma(b_i, b_j) \overset{\text{Satz 33}}{=} \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ \sigma(b_i, b_i) := \alpha_i & \text{für } i = j \end{cases}$ .Wir sehen, dass $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Ist außerdem die Basis orthonormal, dann sind die $\alpha_i := \sigma(b_i, b_i) \overset{\text{Def.}}{=} 1$, also ist die Matrix gleich Id. □

Folgerung: Es gilt:
(a) $\exists$ eine othogonale Basis$\Longrightarrow$ die Bilinearform ist symmetrisch.
(b) $\exists$ eine othonormale Basis$\Longrightarrow$ die Bilinearform ist symmetrisch und positiv definit (und ist deswegen ein Skalarprodukt).

Beweis: Die diagonalen Matrizen sind symmetrisch (d.h. sie erfüllen $A^t = A$) $\overset{\text{Lemma 29}}{\Longrightarrow}$ σ ist symmetrisch.

Gibt es eine orthonormale Basis, so ist die Gramsche Matrix gleich Id, also gilt für $v \in V, v \neq \vec{0}$ mit Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, dass

$$\sigma(v, v) = (x_1 \ \cdots \ x_n) Id \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \ \cdots \ x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + \ldots + x_n^2 > 0. \quad \square$$

Satz 35 *σ sei eine Bilinearform auf einem Vektorraum V der Dimension n. Es gibt genau dann eine orthonormale Basis, wenn die Bilinearform ein Skalarprodukt ist.*
Satz in Richtung $\Longrightarrow$: Folgerung (b).
Beweis von $\Longleftarrow$. Angenommen σ ist ein Skalarprodukt. Wir werden zuerst eine orthogonale und dann eine orthonormale Basis algorithmisch konstruieren; der Algorithmus heißt Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren.

Wir werden auch sehen, dass wir als ersten Vektor der orthonormalen Basis einen beliebigen Vektor v mit $\sigma(v, v) = 1$ wählen können.

Ferner gilt: wenn die Vektoren $b_1, ..., b_k$ die Bedienungen $\sigma(b_i, b_j) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$ erfüllen, dann kann man das $k-$Tupel $(b_1, ..., b_k)$ zu einer orthonormalen Basis vervollständigen.

Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis.
Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.
Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1$. Das ist wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0$ ist.
Eigenschaften von b_2: (i) $\sigma(b_1, b_2) = 0$ und (ii) $b_2 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_2) = \sigma\left(b_1, a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1\right)$
$\overset{\text{Linearität}}{=} \sigma(b_1, a_2) - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\sigma(b_1, b_1) = \sigma(b_1, a_2) - \sigma(b_1, a_2) = 0.$
Beweis (ii): Da b_2 eine nichttriviale Linearkombination der Elemente der linear unabhängigen Menge $\{a_1, a_2\}$ ist, ist $b_2 \neq \vec{0}$.

Bsp. Im $\mathbb{R}^3$ versehen mit dem Standardskalarprodukt betrachten wir das Basistupel $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ und führen den ersten Schritt des G-S-Orthogonalisierungsverfahrens durch.

$b_1 := a_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};$

$b_2 := a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1\cdot1+1\cdot0+1\cdot0}{1\cdot1+1\cdot1+0\cdot0}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}.$

Wir sehen, dass b_1 und b_2 nicht zueinander proportional sind. Außerdem sehen wir, dass $\sigma(b_1, b_2) = 0$ ist, weil
$\sigma\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}\right) = 1\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 0\cdot 1 = 0$ wie wir wollten.

Schritt 3. Setze $b_3 = a_3 - \frac{\sigma(b_1,a_3)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1 - \frac{\sigma(b_2,a_3)}{\sigma(b_2,b_2)}\, b_2$. Das ist wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0 \neq \sigma(b_2, b_2)$ ist.

Eigenschaften von b_3: (i) $\sigma(b_1, b_3) = \sigma(b_2, b_3) = 0$ und (ii) $b_3 \neq \vec{0}$.

Beweis (i): $\sigma(b_1, b_3) = \sigma\left(b_1, a_3 - \frac{\sigma(b_1,a_3)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1 - \frac{\sigma(b_2,a_3)}{\sigma(b_2,b_2)}\, b_2\right)$

$$\overset{\text{Linearität}}{=} \sigma(b_1, a_3) - \frac{\sigma(b_1,a_3)}{\sigma(b_1,b_1)}\sigma(b_1, b_1) - \frac{\sigma(b_2,a_3)}{\sigma(b_2,b_2)}\sigma(b_1, b_2)$$

$= \sigma(b_1, a_3) - \sigma(b_1, a_3) - 0 = 0.$

Ähnlich zeigt man $\sigma(b_2, b_3) = 0$:

$\sigma(b_2, b_3) = \sigma\left(b_2, a_3 - \frac{\sigma(b_1,a_3)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1 - \frac{\sigma(b_2,a_3)}{\sigma(b_2,b_2)}\, b_2\right)$

$$\overset{\text{Linearität}}{=} \sigma(b_2, a_3) - \frac{\sigma(b_1,a_3)}{\sigma(b_1,b_1)}\sigma(b_2, b_1) - \frac{\sigma(b_2,a_3)}{\sigma(b_2,b_2)}\sigma(b_2, b_2)$$

$= \sigma(b_2, a_3) - 0 - \sigma(b_2, a_3) = 0.$

Beweis (ii): Da b_3 eine nichttriviale Linearkombination der Elemente der linear unabhängigen Menge $\{a_1, a_2, a_3\}$ ist, ist $b_3 \neq \vec{0}$.

Rechnen Sie bitte selbst:

Führen Sie den zweiten Schritt des G-S-Verfahrens für die Basis $(a_1, a_2, a_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ durch. Den ersten Schritt haben wir bereits gemacht:

$b_1 = a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $b_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung.

$$b_3 = a_3 - \frac{\sigma(b_1,a_3)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1 - \frac{\sigma(b_2,a_3)}{\sigma(b_2,b_2)}\, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\sigma\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}{\sigma\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} -$$

$$\frac{\sigma\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}{\sigma\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \vec{0} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Haben wir uns verrechnet? Unwahrscheinlich, da $\sigma(b_1, b_3) = \sigma(b_2, b_3) = 0$, was unser Ziel war.

Schritt k. Schritt $k-1$ liefert $k-1$ Vektoren $b_1, \ldots, b_{k-1}$, die nichttriviale Linearkombinationen der $\{a_1, \ldots, a_{k-1}\}$ sind, sodass (ii) jedes $b_i \neq \vec{0}$ und sodass (i) $\sigma(b_i, b_j) = 0$ für $i \neq j$.

Setze $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i$.

Wir zeigen: (i) für $j < k$ gilt $\sigma(b_j, b_k) = 0$ und (ii) $b_k \neq \vec{0}$.

Beweis (i): $\sigma(b_j, b_k) = \sigma(b_j, a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i)$

$$\overset{\text{Linearität}}{=} \sigma(b_j, a_k) - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} \sigma(b_j, b_i)}_{\text{nur } \sigma(b_j, b_j) \neq 0 \text{ nach (i)}} = \sigma(b_j, a_k) - \sigma(b_j, a_k) = 0.$$

Beweis (ii): Da b_k eine nichttriviale Linearkombination der Elemente der linear unabhängigen Menge $\{a_1, \ldots, a_k\}$ ist, ist $b_k \neq \vec{0}$.

Nach n Schritten bekommen wir $\{b_1, \ldots, b_n\}$ so dass (i) $\sigma(b_i, b_j) = 0$ für $i \neq j$ und so dass (ii) $b_i \neq \vec{0}$.

Wir zeigen: diese Menge ist linear unabhängig.

Sei $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = \vec{0}$. Für jedes j ist dann $\sigma(b_j, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i) = 0$. Aber

$$\sigma(b_j, \textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i) \overset{\text{Linearität}}{=} \textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma(b_j, b_i) \overset{\substack{\text{weil nur} \\ \sigma(b_j, b_j) \neq 0}}{=} \lambda_j \sigma(b_j, b_j).$$

Da $\sigma(b_j, b_j) \neq 0$ ist, muss $\lambda_j = 0$. Da j beliebig war, sind alle $\lambda_j = 0$, also ist die Linearkombination trivial.

Also ist $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis, nach Konstruktion ist sie orthogonal.

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten $\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2, ..., \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n,b_n)}}b_n\right)$. Da $\sigma(b_i, b_i)$ positiv ist, sind die Vektoren wohldefinitert.

Wir zeigen: dieses Tupel ist eine orthonormale Basis. Tatsächlich,

$$\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}}\,b_i, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\,b_j\right) \overset{\text{Bilinearität}}{=}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\sigma(b_i, b_j) = \begin{cases} \frac{\sigma(b_i,b_i)}{\sigma(b_i,b_i)} = 1, \text{ falls } i = j \\ 0, \text{ falls } i \neq j \end{cases} \qquad \square$$

Rechnen Sie bitte selbst.

Normieren Sie bitte die Vektoren der orthogonalen Basis
$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right)$.

Lösung: $\sqrt{\sigma\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)} = \sqrt{2}$, also wird b_1 in der Basis durch $b_1' := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ ersetzt (ist immer noch zu b_2 und b_3 orthogonal; $\sigma(b_1', b_1')$ ist aber gleich 1).

$\sqrt{\sigma\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, also wird b_2 durch $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ ersetzt.

$\sigma\left(\begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, deswegen wird b_3 durch

$b_3' := \sqrt{3} \cdot \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ ersetzt.

Die Basis $(b_1', b_2', b_3') = \left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right)$ **ist orthonormiert!!!**

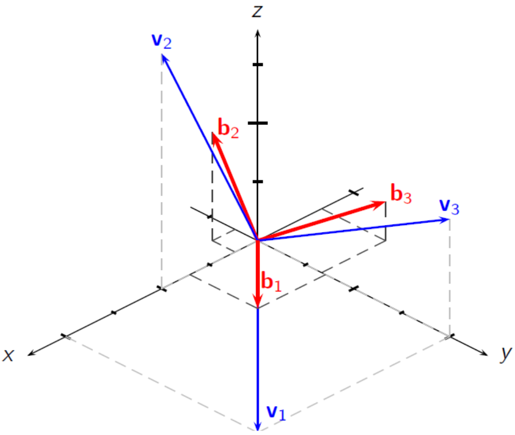
Bsp.

Gegebene Basis:

$$\mathbf{v}_1 = (2, 2, 0)^T$$
$$\mathbf{v}_2 = (1, 0, 2)^T$$
$$\mathbf{v}_3 = (0, 2, 1)^T$$

Orthonormale Basis:

$$\mathbf{b}_1 = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T$$
$$\mathbf{b}_2 = (\tfrac{\sqrt{2}}{6}, -\tfrac{\sqrt{2}}{6}, \tfrac{2\sqrt{2}}{3})^T$$
$$\mathbf{b}_3 = (-\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3})^T$$



Satz 35 in Worten: *Jedes Skalarprodukt in einem endlichdimensionalen Vektorraum ist das Standard-Skalarprodukt in einer geeigneten Basis.*
Modifikation des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens: Mann kann in jedem Schritt den konstruierten Vektor b_k mit $\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_k,b_k)}}$ multiplizieren.

Vorteil 1: die Basis $(b_1, ..., b_n)$ wird orthonormal.

Vorteil 2: in der Formel $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i,a_k)}{\sigma(b_i,b_i)} b_i$ wird $\sigma(b_i, b_i) = 1$.

Nachteil. Die Formel für b_i wird in der Regel Wurzeln enthalten – rechnerisch kompliziert.

Bezeichnung: Wenn wir auf V ein Skalarprodukt σ ausgewält haben, werden wir es mit $\langle\ ,\rangle$ bezeichnen, d.h. statt $\sigma(u, v)$ werden wir $\langle u, v\rangle$ schreiben. Alternative Schreibweisen in der Literatur: $(\ ,\ )$, $\langle\ |\ \rangle$
Def. *Ein Euklidscher Vektorraum ist ein Paar* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$*,wobei* V *ein endlichdimensionaler Vektorraum ist und* $\langle\ ,\ \rangle$ *ein Skalarprodukt.*

Nach Satz 35 können wir in V eine Basis B wählen, sodass $\langle\ ,\ \rangle$ das Standard-Skalarprodukt ist: für die Vektoren x, y mit Koordinatenvektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ gilt:$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + ... + x_ny_n$.

Bemerkung Ist U ein Untervektorraum des Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, so ist $(U, \langle\ ,\ \rangle_{|U})$ ein Euklidscher Vektorraum, wobei $\langle u_1, u_2\rangle_{|U} = \langle u_1, u_2\rangle$.

Frage *Welche Koordinaten hat ein Vektor v in einer orthonormalen Basis?*

Satz 36 *Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine orthonormale Basis. Dann gilt: die Koordinaten von beliebiges $v \in V$ sind gleich* $\begin{pmatrix} \langle b_1, v\rangle \\ \vdots \\ \langle b_n, v\rangle \end{pmatrix}$.

In Worten: Die Koordinaten in der orthonormalen Basis sind die Skalarprodukte mit den Basisvektoren.

Bsp. Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Die Standard-Basis ist bzgl. des Standard-Skalarprodukts orthonormal. Dann gilt: $\langle \binom{1}{0}, \binom{x_1}{x_2} \rangle = x_1$ und $\langle \binom{0}{1}, \binom{x_1}{x_2} \rangle = x_2$, also gibt uns die Formel im Satz 36 die richtige Antwort (weil die Koordinaten von $\binom{x_1}{x_2}$ in der Standard-Basis offensichtlich x_1, x_2 sind).

Bsp. Wir haben oben eine orthonormierte Basis
$(b_1', b_2', b_3') = \left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right)$ des $\mathbb{R}^3$ mit dem Standard-Skalarprodukt konstruiert.

Wie findet man die Koordinaten eines Vektors, z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, in dieser Basis?

Man kann dies mit Hilfe der Definition tun – dazu muss man ein LGS
$x_1 \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
für die Unbekannten x_1, x_2, x_3 lösen. Mit Satz 36 ist dies viel einfacher:
$x_1 = \sigma \left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 1/\sqrt{2}$, $x_2 = \sigma \left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 1/\sqrt{6}$,
$x_3 = \sigma \left(\begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = -1/\sqrt{3}$.
(Sie können diese x_1, x_2, x_3 in das LGS oben einsetzen und sehen, dass x_1, x_2, x_3 die Koordinaten des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in der Basis (b_1', b_2', b_3') sind).

Beweis von Satz 36

> **Satz 36** *Es sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Sei* $(b_1, \ldots, b_n)$ *eine orthonormale Basis. Dann gilt: die Koordinaten eines beliebigen* $v \in V$ *sind gleich* $\begin{pmatrix} \langle b_1, v\rangle \\ \vdots \\ \langle b_n, v\rangle \end{pmatrix}$.

Beweis. Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor von v. Z.z.: $x_i = \langle b_i, v\rangle$, d.h., $v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$. Man nehme ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ und betrachte

$$\langle b_i, v\rangle = \langle b_i, x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n\rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} x_1\langle b_i, b_1\rangle + \ldots + x_n\langle b_i, b_n\rangle.$$

Da $\langle b_i, b_j\rangle = 0$ für $i \neq j$ und $\langle b_i, b_i\rangle = 1$, ist $\langle b_i, v\rangle = x_i$. □

Folgerung *Es sei* V *ein Vektorraum mit dem Skalarprodukt* $\langle\ ,\ \rangle$ *und einer Orthonormalbasis* $(b_1, \ldots, b_n)$ *. Für ein* $u \in V$ *gelte: für jedes* b_i *ist* $\langle b_i, u\rangle = 0$*. Dann gilt:* $u = \vec{0}$*.*

Orthogonale Projektion – Lot

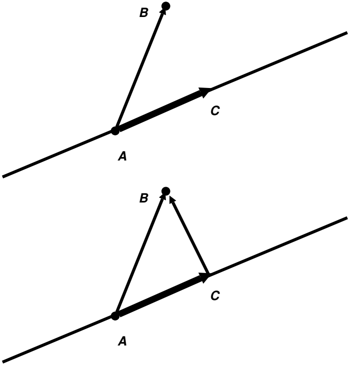
Def. *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Die Vektoren* $u, v \in V$ *heißen* *orthogonal*, *falls* $\langle u, v\rangle = 0$. *Ein Vektor* v *heißt orthogonal zu der nichtleeren Teilmenge* $M \subseteq V$, *falls* v *zu allen Vektoren aus* M *orthogonal ist.*

Bsp. Jeder Vektor ist orthogonal zu $\vec{0}$.

Bemerkung *Wir werden später sehen, dass die Vektoren* $u \neq \vec{0}, v \neq \vec{0}$ *g.d. orthogonal sind, wenn der Winkel (wird später definiert) zwischen* u *und* v *gleich* $\pi/2$ *ist.*

Def. – (Schulgeometrie) *Sei* U *ein Untervektorraum von* V. *Für* $v \in V$ *heißt der Vektor* $u \in U$, *so dass* $v - u$ *orthogonal zu* U *ist,* *die orthogonale Projektion* *(oder:* *das Lot*) *des Vektors* v *auf* U *und wird mit* $Proj_U(v)$ *bezeichnet.*

Geometrische Vorstellung:



Vektor $\overrightarrow{AC}$ ist Projektion des Vektors $\overrightarrow{AB}$ auf $span\left(\{\overrightarrow{AC}\}\right)$, da $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ zu $\overrightarrow{AC}$ und deswegen auch zu allen Vektoren aus $span\left(\{\overrightarrow{AC}\}\right)$ orthogonal ist.

Lemma 31 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Sei* U *ein Untervektorraum von* V*. Dann gilt: für jedes* $v \in V$ *existiert genau eine Projektion* u *von* v *auf* U*.*
Ferner gilt: für jedes $u' \in U$*,* $u' \neq u$ *ist* $\langle v-u', v-u'\rangle > \langle v-u, v-u\rangle$*.*

In Worten: *Die Projektion des Vektors* v *auf der Unterraum* U *existiert, ist eindeutig und minimiert* $|v-u|$ *für* $u \in U$*.*
Beweis. Eindeutigkeit: Für die Vektoren u_1, $u_2 \in U$ gelte: für jedes $u' \in U$ $\langle v-u_1, u'\rangle = 0$ und $\langle v-u_2, u'\rangle = 0$.Dann

$$0 = \langle v-u_1, u'\rangle - \langle v-u_2, u'\rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} \langle u_2-u_1, u'\rangle \overset{\text{Folgerung}}{\Longrightarrow} u_1-u_2 = \vec{0}.$$

Existenz. Skalarprodukt auf V induziert ein Skalarprodukt auf U. Nach Satz 35 existiert eine orthonormalen Basis $(b_1, ..., b_m)$ in U. Betrachte $u := \langle v, b_1\rangle b_1 + \langle v, b_2\rangle b_2 + ... + \langle v, b_m\rangle b_m$. Wir zeigen: u ist die Projektion von v. Tatsächlich, $v-u = v - \langle v, b_1\rangle b_1 - ... - \langle v, b_m\rangle b_m$. Deswegen

$$\langle v-u, b_i\rangle = \langle v, b_i\rangle - \langle v, b_1\rangle\langle b_1, b_i\rangle - ... - \langle v, b_m\rangle\langle b_m, b_i\rangle = \langle v, b_i\rangle - \langle v, b_i\rangle = 0.$$

Also ist $v-u$ orthogonal zu allen b_i und deswegen zu allen $u' \in U$. Damit ist die Existenz der orthogonalen Projektion bewiesen.

Wir zeigen jetzt: für jedes $u' \in U$, $u' \neq u$ ist
$\langle v - u', v - u' \rangle > \langle v - u, v - u \rangle$ (wobei u die orthogonale Projektion von v auf U ist).
Offensichtlich, $v - u' = v - u + \underbrace{u - u'}_{u'' \in U}$. Da $u'' \in U$ ist, ist u'' zum Vektor $v - u$ orthogonal, also $\langle v - u, u'' \rangle = \langle u'', v - u \rangle = 0$.
Dann gilt: $\langle v - u', v - u' \rangle = \langle v - u + u'', v - u + u'' \rangle \overset{\text{Linearität}}{=}$
$\langle v - u, v - u + u'' \rangle + \langle u'', v - u + u'' \rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle v - u, v - u \rangle +$
$\underbrace{\langle v - u, u'' \rangle}_{0} + \underbrace{\langle u'', v - u \rangle}_{0} + \langle u'', u'' \rangle = \langle v - u, v - u \rangle + \langle u'', u'' \rangle$.
Da $\langle u'', u'' \rangle > 0$ nach Definition von Skalarprodukt weil $u'' \neq \vec{0}$ ist, ist
$\langle v - u', v - u' \rangle = \langle v - u, v - u \rangle + \text{etwas positives}$,
schließlich $\langle v - u', v - u' \rangle > \langle v - u, v - u \rangle$, $\square$

Wicht. Formel aus dem Beweis von Lemma 31:
$Proj_U(v) = \langle v, b_1\rangle b_1 + \langle v, b_2\rangle b_2 + ... + \langle v, b_m\rangle b_m$, wobei $(b_1, ..., b_m)$ eine orthonormierte Basis in U ist.

Geometrische Beschreibung des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens: Für $k \geq 2$ gilt
$b_k = a_k - Proj_{span(\{a_1,...,a_{k-1}\})}(a_k)$.

Tatsächlich, die Formel für b_k war
$b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i,a_k)}{\sigma(b_i,b_i)}\, b_i = a_k - Proj_{span(\{a_1,...,a_{k-1}\})}(a_k)$,
weil $\left\{ \frac{b_1}{\sqrt{\langle b_1, b_1\rangle}}, ..., \frac{b_{k-1}}{\sqrt{\langle b_{k-1}, b_{k-1}\rangle}} \right\}$ eine orthonormalen Basis in $span(\{a_1, ..., a_{k-1}\})$ ist.

Bsp.

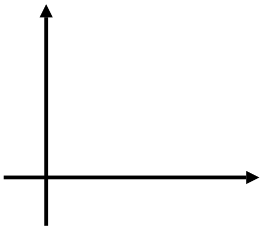
Wir betrachten die Vektoren

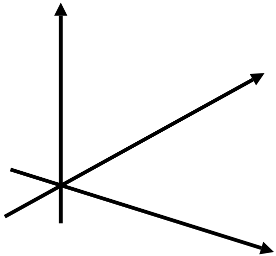
$$\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

und projizieren den Vektor b orthogonal auf $span(a)$.
Dann gilt: $\langle a, a \rangle = \frac{1}{3}(1^2 + 1^2 + 1^2) = 1$, also ist die Basis (a) in $span(a)$ bereits orthonormiert.
$\langle a, b \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 7 \cdot 1) = \frac{8}{\sqrt{3}}$.
Dann ist $Proj_{span(a)}(b) = \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot a = \frac{8}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Link zur Schulgeometrie

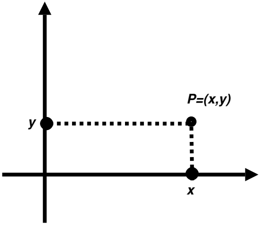
Schuldefinition Ein kartesisches (descartsches) Koordinatensystem in der Ebene besteht aus zwei orthogonalen orientierten Geraden. Ein kartesisches (descartsches) Koordinatensystem im Raum besteht aus drei paarweise orthogonalen orientierten Geraden, die alle einen gemeinsamen Punkt haben.

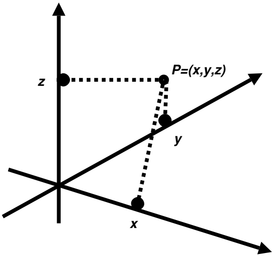




Link zur Schulgeometrie

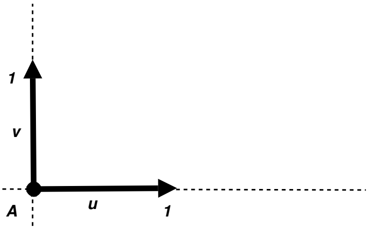
Die Koordinaten eines Punkts P sind die vorzeichenbehafteten Abstände zu den Fußpunkten der Lote des Punktes auf die Geraden. Das Vorzeichen ist „$+$“, falls das Lot auf der positiven Hälfte der Geraden liegt, und „$-$“, falls das Lot auf der negativen Hälfte der Geraden liegt



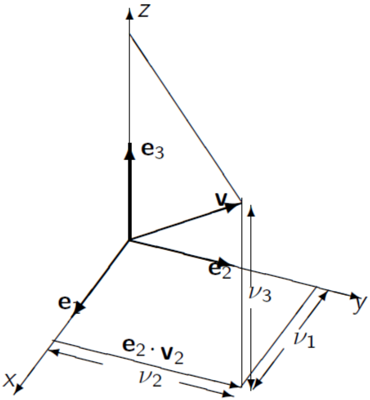


Kartesische Koordinaten als Koordinaten bzgl. einer Basis

Wir zeigen: Falls die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ orthogonal sind und deren Länge gleich 1 ist, dann sind die Koordinaten jedes Vektors in der Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ der Ebene gleich den kartesischen Koordinaten (bzgl. der Geraden, die von den Vektoren u und v erzeugt werden).
Nehmen wir einen Punkt A in der Ebene. Man betrachte zwei orthogonale Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ mit Anfang in A. Man betrachte die erzeugten (geordneten) Geraden (X-Achse und Y-Achse). Der Vektor $\vec{w}$ habe Koordinaten $\binom{x}{y}$ in der Basis $(\vec{u}, \vec{v})$, also $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$. Da die Länge des Vektors $x\vec{u}$ gleich $|x|$ ist, ist der Abstand zwischen der orthogonalen Projektion auf die X-Achse und A gleich x. Ähnlich ist der Abstand zwischen der orthogonalen Projektion auf die Y-Achse und A gleich y. Also sind die kartesische Koordinaten auch $\binom{x}{y}$.



Kartesische Koordinaten als Koordinaten bzgl. einer (orthonormalen) Basis in D3

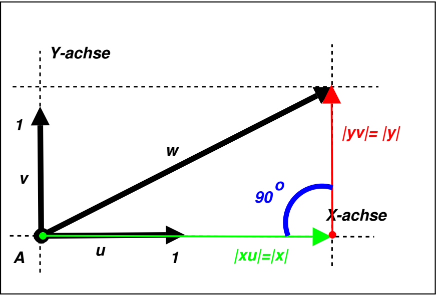


Die Länge

Def. *Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Für jeden Vektor $v \in V$ heißt die Zahl $\sqrt{\langle v, v\rangle}$ die* Länge *von v und wird $|v|$ bezeichnet.*

Bemerkung. Die Länge des Vektors ist wohldefiniert, da nach Definition des Skalarprodukts $\langle v, v\rangle \geq 0$ gilt. Ferner gilt: $|v| > 0$ für $v \neq \vec{0}$ und für $v = \vec{0}$ ist $|v| = 0$.

Bemerkung *Auf der Ebene bzw. im Raum ist die Länge eines Vektors im Sinne der Definition oben die „übliche" Länge.*



Tatsächlich, wir betrachten eine kartesische Basis (u, v) in der Ebene (die Vektoren u, v sind zueinander orthogonal und haben die Länge 1). Dann ist die Länge von $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ gegeben durch $|w|^2 \stackrel{\text{Def.}}{=} \langle w, w\rangle = \langle x\vec{u} + y\vec{v}, x\vec{u} + y\vec{v}\rangle \stackrel{\text{Bilinearität}}{=} \underbrace{\langle x\vec{u}, x\vec{u}\rangle}_{=x^2} + \underbrace{\langle x\vec{u}, y\vec{v}\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y\vec{v}, x\vec{u}\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y\vec{v}, y\vec{v}\rangle}_{=y^2}$ $= x^2 + y^2 \stackrel{\text{Pythagoras}}{=}$ Die „übliche" Länge (weil alle Winkel im Parallelogramm $\pi/2$ sind).

Rechnen Sie selbst: berechnen Sie die Länge von v in $(\mathbb{R}^2, \langle\ ,\ \rangle_{\text{standard}})$

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

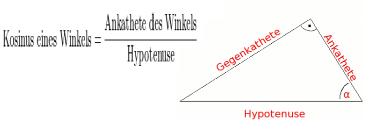
Antwort. $|v| = \sqrt{\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle} = \sqrt{3 \cdot 3 + 4 \cdot 4} = \sqrt{9 + 16} = 5.$

Der Winkel

Def. *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Für je zwei Vektoren* $u \neq \vec{0}, v \neq \vec{0}$ *heißt die Zahl* $\arccos\left(\frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|}\right) \in [0, \pi]$ *der Winkel zwischen* u *und* v.

Bemerkung *Um zu zeigen, dass der Winkel zwischen* u *und* v *wohldefiniert ist, werden wir gleich die Cauchy-Schwarz-Ungleichung zeigen:* $-1 \leq \frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|} \leq 1$, *d.h.* $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$.

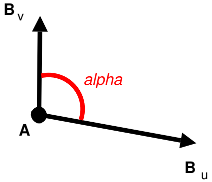
Um Winkel zu definieren, brauchen wir deswegen die Funktion cos. In der Schule haben wir aber cos mit Hilfe eines Winkels definiert; also befinden wir uns in einer logischen Schleife.



In der Analysis-Vorlesung wird die Funktion cos (und deswegen auch arccos) rein analytisch, also ohne Bezug zur Schulgeometrie eingeführt; so werden wir „die Schleife verlassen“

Bemerkung *In der Ebene/Im Raum ist der Winkel im Sinne der Definition oben der übliche Winkel*

Wiederholung – Schulgeometrie: In der Ebene/Im Raum ist $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(alpha)$. Also ist $\cos(alpha) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{u}||\vec{v}|}$.



Rechnen Sie bitte selbst:

Im $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt berechne man den Winkel zwischen den Vektoren
$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung. $\cos(\alpha) = \frac{\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}{\sqrt{\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \cdot \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}} = \frac{2}{\sqrt{4 \cdot 2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dann ist $\alpha = \arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 45^\circ$.

Rechnen Sie bitte selbst:

Im $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt berechne man den Winkel zwischen den Vektoren
$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Lösung. $\cos(\alpha) = \frac{\langle \binom{3}{4}, \binom{-4}{3} \rangle}{|u| \cdot |v|} = \frac{-3 \cdot 4 + 4 \cdot 3}{|u| \cdot |v|} = \frac{0}{|u| \cdot |v|} = 0.$
Dann ist $\alpha = \arccos(0) = 90^\circ$.

Bemerkung. Wie ich bereits angekündigt habe: die Vektoren sind genau dann orthogonal, d.h., Skalarprodukt davon gleich 0 ist, wenn der Winkel zwischen Vektoren gleich 90° ist.

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Lemma 32 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$. Ferner gilt: $|\langle u, v\rangle| = |u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren linear abhängig sind.

Beweis. Ist $v = \vec{0}$, so sind beide Seiten gleich Null. Sei $v \neq \vec{0}$. Sind die Vektoren linear abhängig, so ist $u = \lambda v$, und $|\langle u, v\rangle| = |\langle \lambda v, v\rangle| = |\lambda| \cdot |v|^2 = |\lambda v| \cdot |v|$.

Angenommen, die Vektoren sind linear unabhängig. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle u + tv, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle u, u + tv\rangle + t\langle v, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=}$$
$$\langle u, u\rangle + \underbrace{t\langle u, v\rangle + t\langle v, u\rangle}_{2t\langle u,v\rangle \text{ wegen Symmetrie}} + t^2\langle v, v\rangle = \underbrace{|u|^2}_{c} + \underbrace{2\langle u, v\rangle}_{b} t + t^2 \underbrace{|v|^2}_{a}.$$

Dies ist ein quadratisches Polynom in t. Es hat keine Nullstelle, da $\langle u + tv, u + tv\rangle$ gleich Null sein kann nur falls $u = -tv$, also falls u, v linear abhängig sind, was wir oben explizit ausgeschlossen haben. Da das Polynom keine Nullstelle hat, ist die Diskriminante negativ, also

$\mathcal{D} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = \langle u, v\rangle^2 - |v|^2|u|^2 < 0.$ Dann ist $|\langle u, v\rangle| < |v||u|$. $\square$

Orthogonale Matrizen

Def. Eine $n \times n$-reelle Matrix A heisst orthogonal, falls $A^t A = Id$ ist.
Lemma 33. *Man betrachte $\mathbb{R}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei $A \in Mat(n,n)$. Dann gilt: A ist genau dann orthogonal, falls $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\langle Av, Au\rangle = \langle v, u\rangle$.*

Bemerkung. Die Eigenschaft "$\forall u, v \in \mathbb{R}^n \ \langle Av, Au\rangle = \langle v, u\rangle$" heißt in Jargon: "$A$ erhält Skalarprodukt".)

Beweis $\Longrightarrow$: Angenommen $A^t A = Id$. Dann gilt:
$\langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t (Ay) = x^t A^t A y = x^t Id\, y = x^t y = \langle x, y\rangle$.
Beweis $\Longleftarrow$: Angenommmen $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^t Ay = x^t A^t A y = \sigma_{A^t A}(x, y)$. Da $(Ax)^t Ay = \langle x, y\rangle = \sigma_{Id}(x, y)$, ist $A^t A = Id$. $\square$

Lemma 33. *Man betrachte $\mathbb{R}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei $A \in Mat(n,n)$. Dann gilt: A ist genau dann orthogonal, falls $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\langle Av, Au\rangle = \langle v, u\rangle$.*

Folgerung A. *$A \in Mat(n,n)$ ist genau dann orthogonal, wenn das Standard-Skalarprodukt der $i-$ten Spalte mit der $j-$ten Spalte gleich* $\begin{cases} 1, & falls\ i = j \\ 0, & falls\ i \neq j \end{cases}$.

Beweis: Ausrechnen. Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ eine $n \times n$- Matrix. Dann ist $A^t A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$; die $(i,j)-$Eintrag davon ist dann Standard-Skalarprodukt von $\underbrace{i\text{-ten Spalte von } A}_{i\text{-ten Zeile von } A^t}$ und j-ten Spalte von A.

Ist $A^t A = Id$, so ist Standard-Skalarprodukt von i-ten Spalte von A und i-ten Spalte von A gleich 1, und von i-ten Spalte von A und j-ten Spalte für $i \neq j$ gleich 0 sein. $\square$

Folgerung A. *$A \in Mat(n,n)$ ist genau dann orthogonal, wenn das Standard-Skalarprodukt der $i-$ten Spalte mit der $j-$ten Spalte gleich* $\left\{\begin{array}{ll} 1, & falls\ i=j \\ 0, & falls\ i \neq j \end{array}\right.$.

Folgerung B. $A \in Mat(n,n)$ ist genau dann orthogonal, falls die Vektoren $Ae_1, ..., Ae_n$ (also, die Spalten von A) eine orthonormale Basis bzgl. Standard-Skalarprodukt bilden.

Beweis $\Longrightarrow$: Sei A orthogonal. Dann ist sie nichtausgeartet, deswegen bilden die Vektoren Ae_i, also die Spalten von A, eine Basis. Nach Folgerung A erfüllen die Vektoren Ae_i, die Eigenschaft $\langle Ae_i, Ae_j\rangle = \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ für } i=j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{array}\right.$,und dass ist die Bedienung, dass die Basis $(Ae_1, ..., Ae_n)$ orthonormal ist.

Beweis $\Longleftarrow$: Wenn die Basis $(Ae_1, ..., Ae_n)$ orthonormal ist, erfüllen die Vektoren Ae_i die Eigenschaft $\langle Ae_i, Ae_j\rangle = \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ für } i=j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{array}\right.$; nach Folgerung A ist dann die Matrix A orthogonal.

Diagonalisiereung symmetrischer Matrizen über $\mathbb{R}$

Wiederholung: A heißt symmetrisch, falls $A^t = A$.
Satz 37. *Ist A symmetrisch, so gibt es eine orthogonale Matrix O, sodass $O^{-1}AO$ diagonal ist. (Symmetrische Matrizen über $\mathbb{R}$ sind diagonalisierbar mit Hilfe von ortogonalen Transformationen.)*

Bemerkung Da $O^t = O^{-1}$, ist auch $O^t AO$ diagonal. Also sind Matrizen von symmetrischen Bilinearformen auf reellen Vektorräumen diagonalisierbar mit Hilfe eines Basiswechsels.

Hilfsaussage 1 *Sei O eine orthogonale Matrix und A eine symmetrische Matrix. Dann gilt: $O^{-1}AO$ ist symmetrisch.*

Beweis: $\left\{ \begin{array}{c} O^{-1} = O^t \\ A^t = A \end{array} \right. \implies (O^{-1}AO)^t = (O^tAO)^t = O^tA^t(O^t)^t = O^{-1}AO,$ $\square$

Hilfsaussage 2. *Jede symmetrische $(n \times n)$-Matrix $A \in Mat(n, n, \mathbb{R})$ hat mind. einen reellen Eigenwert.*

Diese Hilfsaussage ist in jede Dimension gültig. Allerdings braucht der Beweis die Einführen von komplexen Zahlen (Analysis I) sowie Haupsatz der Algebra (Analysis I order Analysis II), deswegen kann ich den Hilfsatz noch nicht beweisen. In dimension 2 ist der Hilfsatz allerdings elementar bewiesbar:

Beweis in Dim 2: Die Matrix sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\aleph_A(t) = \det \begin{pmatrix} a-t & b \\ b & c-t \end{pmatrix} = t^2 - (a+c)t + ac - b^2.$$

Die Nullstellen des Polynoms $t^2 - (a+c)t + ac - b^2$ sind durch pq-Formel gegeben, sie sind reel, wenn die Diskriminante nichtnegative ist, also wenn

$$(a+c)^2 - 4(ac - b^2) \geq 0.$$

Die linke Seite der Ungleichung oben ist aber $(a+c)^2 - 4(ac-b^2) = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + 4b^2 = (a-c)^2 + 4b^2$ und ist immer nichtnegativ. Also sind die Eigenwerte reel.

Beweis von Satz 37: Nach HA 2 gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$, mit $Av = \lambda_1 v$. OBdA ist $|v| = 1$, sonst $v \overset{\text{Ersetze}}{\to} \frac{v}{|v|}$. Wir betrachten eine orthogonale Matrix O, sodass $Oe_1 = v$.
(Existenz — Satz 35: Man kann eine orthonormierte Basis $o_1, ..., o_n$ finden sodass $o_1 = v$. Die Matrix O sodass $Oe_i = o_i$ (also s.d. die $i-$te Spalte o_i ist) für jedes i, ist orthogonal.)
Dann ist $O^{-1}AOe_1 = O^{-1}Av = \lambda_1 O^{-1}v = \lambda_1 e_1$, also $O^{-1}AO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ & A_{n-1} \end{pmatrix} \overset{\text{HA 1}}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix}$, wobei A_{n-1} eine symmetrische Matrix ist.
Wir wiederholen die Prozedur: Es gibt ein reellen Eigenvektor v von A_{n-1} und deswegen eine orthogonale $(n-1) \times (n-1)$-Matrix O_{n-1}, sodass $O_{n-1}^{-1}A_{n-1}O_{n-1} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & \\ & A_{n-2} \end{pmatrix}$, wobei A_{n-2} symmetrisch ist. Dann gilt $\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & A_{n-2} \end{pmatrix}$, also
$\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1}^{-1} \end{pmatrix} O^{-1}AO \begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & A_{n-2} \end{pmatrix}$, u.s.w. (Da O_{n-1} orthogonal ist, sind $\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1}^{-1} \end{pmatrix}$ auch orthogonal, und deswegen auch $\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix} O$, $\left(\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix} O \right)^{-1}$. Nach $n-1$ Schritten bekommen wir die Aussage. $\square$

Wiederholung – Satz 37 *Ist A symmetrisch, so gibt es eine orthogonale Matrix O, sodass $O^{-1}AO$ diagonal ist.*

Folgerung *Ist A symmetrisch, so gibt es eine Matrix $B \in Mat(n,n)$ mit* $\det(B) \neq 0$, *sodass B^tAB die Form*

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

hat, wobei auf der Diagonale r mal „+1“ und s mal „-1“ steht.

Beweis der Folgerung. Nach Satz 37 gibt es eine orthogonale Matrix O sodass $O^{-1}AO \overset{\text{Weil } O^{-1}=O^t}{=} O^tAO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ist. OBdA können wir annehmen, dass $\lambda_1, ..., \lambda_r$ positiv und $\lambda_r, ..., \lambda_{r+s}$ negativ sind, und dass $\lambda_{r+s+1} = ... = \lambda_n = 0$: Wir zeigen, dass wir λ_i und λ_j vertauschen, wenn wir O durch ein geeignetes (orthogonales) O' ersetzen.

Tatsächlich, die Matrix $O' := OE_{ij}$ ist auch eine Orthogonalmatrix, weil

$$(OE_{ij})^t OE_{ij} = E_{ij}\underbrace{O^tO}_{Id}E_{ij} \overset{\text{Weil } (E_{ij})^2 = Id}{=} Id.$$

Dann ist $(O')^{-1}AO' \overset{\text{Weil } (O')^{-1}=(O')^t}{=} (O')^tAO' = (E_{ij})^tO^tAOE_{ij} =$

$$E_{ij}\begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \lambda_i & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_j & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}E_{ij} \overset{\text{Ausrechnen}}{=} \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \lambda_j & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_i & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Beispiel für „Ausrechnen“: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & \\ & \lambda_1 \end{pmatrix}$

$$\text{Also ist } O^tAO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & & \\ & & & \lambda_{r+1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_{r+s} & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} := \Lambda,$$

wobei $\lambda_1, ..., \lambda_r$ positiv und $\lambda_{r+1}, ..., \lambda_{r+s}$ negativ sind.
Wir „normieren“ alle λ_i: für die Matrix

$$N := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} & & & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{r+1}}} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{r+s}}} & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \in$$

$Mat(n, n)$ mit $\det \neq 0$
gilt $\underbrace{N^tO^t}_{T^t} A \underbrace{ON}_{T} = N^t\Lambda N = (*)$ □

Bemerkung $T = ON$ ist nichtausgeartet, da O und N nichtausgeartet

Zusammenfassung

Ziel war: Symmetrische Bilinearformen untersuchen.
Methode: Suchen einer Basis sodass die Matrix „einfach“ ist.
Methode umformuliert: In welche „einfachste“ Form kann man eine symmetrische Matrix A mit Hilfe der Transformation $A \mapsto T^t A T$, wobei T nichtausgeartet ist, bringen?

Satz 37 / Folgerung geben die Antwort: Man kann die Matrix A in die Form

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

bringen, wobei auf der Diagonale r mal „+1“ und s mal „-1“ steht.