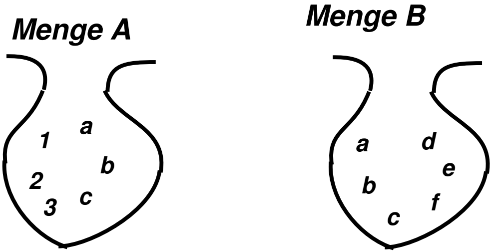
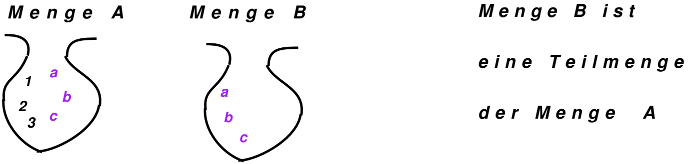
Exkurs in die Mengenlehre: Grundbegriffe

Der Begriff „Menge“ wird nicht formal definiert. Die intuitive Vorstellung: ein Sack, der gewisse Dinge enthält. Diese Dinge heißen Elemente. Deren Eigenschaft: die Elemente sind verschieden.



Bsp: Die Menge der Wochentage, an denen diese Vorlesung stattfindet ist $\{Dienstag, Donnerstag\}$.
Bsp: Die Menge der natürlichen Zahlen ist $\{1, 2, 3, 4, ...\}$ und wird $\mathbb{N}$ bezeichnet. Die Menge der ganzen Zahlen wird $\mathbb{Z}$ bezeichnet; $\mathbb{Z} = \{..., -1, 0, 1, ...\}$.
Reihenfolge spielt keine Rolle:
$\{Dienstag, Donnerstag\} = \{Donnerstag, Dienstag\}$.

Bsp: Die Menge von reellen Zahlen wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.
Bsp: Die Menge, die keine Elemente enthält, heißt leere Menge und wird mit $\varnothing$ bezeichnet.
Sei A eine Menge. Liegt ein Element a in A, so schreiben wir $a \in A$ bzw. $A \ni a$.
Bsp: $1 \in \mathbb{N}$, $1/2 \notin \mathbb{N}$, $1/2 \in \mathbb{R}$.
Seien A, B Mengen. Falls jedes Element von B in A liegt, sagen wir, dass B eine Teilmenge (oder Untermenge) von A ist, und schreiben $A \supseteq B$ oder $B \subseteq A$.



Ist gleichzeitig $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$, so sind die Mengen gleich: $A = B$.
Bsp: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, $\{1\} \subseteq \mathbb{N}$, für jede Menge A gilt $A \supseteq \varnothing$.
Bemerkung. Wenn $A \subseteq B$ ist, aber $A \neq B$ ist, schreibt man oft $A \subset B$. Ich werde diese Bezeichnung zuerst meiden.

Zur Sprache der Mathematik: Abkürzende logische Symbole

Übliche Sprache + Fachausdrücke + mathematische Symbole
$A \Longrightarrow B$ bedeutet „aus Aussage A folgt Aussage B“.
Bsp: $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow x^2 \geq 0$.
Andere sprachliche Formen: „A impliziert B“ oder „A ist hinreichend für B“ oder „B ist notwendig für A“
$A \Longleftrightarrow B$ bedeutet $A \Longrightarrow B$ und $B \Longrightarrow A$.
Andere sprachliche Formen: „A und B sind äquivalent“ oder “A gilt genau dann, wenn B gilt“.
$\exists$ steht für „Es existiert (mindestens) ein ...“
Bsp: „$\exists x \in \mathbb{R}$: $x^2 = 2$ steht für „Es existiert ein $x \in \mathbb{R}$, so daß $x^2 = 2$ gilt“ (nämlich $x = \sqrt{2}$ oder $x = -\sqrt{2}$).
$\forall$ steht für „Für alle ...“
Bsp: $\forall x \in \mathbb{R} \;\; x^2 \geq 0$ steht für “Für alle reellen Zahlen x gilt: $x^2 \geq 0$“.

„oder“ ist nicht ausschließend (im Gegensatz zu „entweder ... oder“).
Bsp: Die Aussage „Es gilt $1 + 1 = 2$ oder es gilt $1 - 1 = 0$ oder es gilt $1 + 1 = 0$ “ ist wahr.
Statt „oder“ werden wir auch das Zeichen $\vee$ benutzen:
Die Aussage $1 + 1 = 2 \;\vee\; 1 - 1 = 0 \;\vee\; 1 + 1 = 0$ ist wahr.

Satz 1/Folgerung 1 in der neuen Sprache

Def. 1 Lösungsmenge eines System (S) ist die Menge aller Lösungen.
Vergleichen Sie:
Satz 1 *Ist* $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ *eine Lösung des Systems* (S)*, so ist* $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ *eine Lösung der Systeme* $(S1)$*,* $(S2)$ *und* $(S3)$*.*
Folgerung 1 *Ist* $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ *eine Lösung eines der Systeme* $(S1)$*,* $(S2)$ *oder* $(S3)$*, so ist* $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ *auch eine Lösung des Systems* (S) *(und deswegen nach Satz 1 auch der Systeme (S1), (S2), und (S3)).*

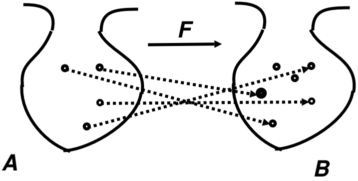
UND

Satz 1' *Die Lösungemengen der Systeme (S), (S1), (S2), (S3) sind gleich.*

Bsp –Def: Seien A, B zwei Mengen. Das Produkt von Mengen A, B (bezeichnet $A \times B$) ist die Mengen aller geordneten Paare (a, b), wobei $a \in A$, $b \in B$ ist. z.B. Ist $A = \{1, 2\}$, $B = \{+, -\}$ so ist $A \times B = \big\{(1, +), (1, -), (2, +), (2, -)\big\}$.
Bemerkung: Man kann Produkt iterieren: $A \times B \times C$ ist die Menge aller geordneten Tripel (a, b, c), wobei $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ ist, usw.
Frage: Was ist $\varnothing \times A$?
Antwort: $\varnothing \times A = \varnothing$.
Bsp: Sei A eine Menge. Die Menge aller Teilmengen von A wird 2^A bezeichnet.
Bsp: Sei $A = \{1, 2\}$. Dann ist $2^A = \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\big\}$.
Sei $A = \{1, 2, 3\}$. Dann ist
$2^A = \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{1, 2, 3\}\big\}$.

Abbildungen

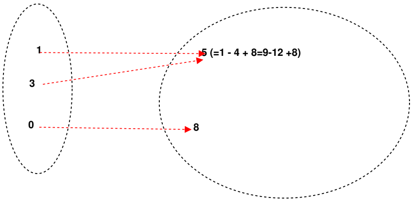
Seien A, B zwei Mengen.
Intuitive Vorstellung: Eine Abbildung von A nach B ist eine Regel, die jedem Element der Menge A genau ein Element der Menge B zuweist.



Bezeichnung:
$F : A \to B$.

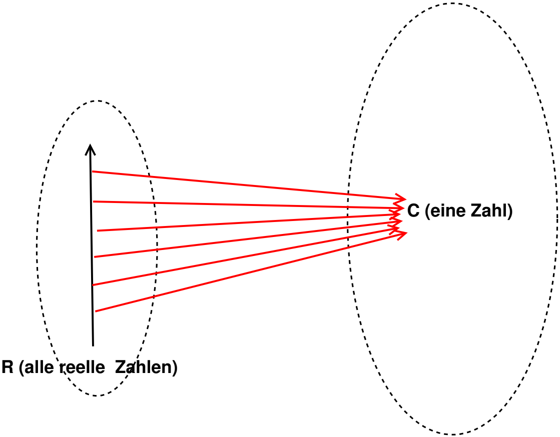
Bsp: Ein Polynom (z.B. $P(x) = x^2 - 4x + 8$) ist eine Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$: $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Als "Regel" ist die Polynom-Abbildung
$P(x) = x^2 - 4x + 8$ wie folgt gegeben: die Mengen $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$,
und P weist dem Element (Zahl) a das Element (Zahl) $a^2 - 4 \cdot a + 8$ zu



Bsp: konstante Abbildung.

$C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \;\; C(x) := C$ ist eine (konstante) Abbildung,



Wie aus dem Bild ersichtlich ist, müssen nicht alle Elemente aus B als Bild eines Elementes aus A auftreten und ein Element aus B darf auch Bild mehrerer Elemente aus A sein. Es muss allerdings für jedes Element aus A ein eindeutiges Bild geben, das heißt von jedem a muss genau ein Pfeil ausgehen.

Was bedeutet: zu zeigen, dass eine Abbildung woldefiniert ist?

Das Wort “wohldefiniert” wird häufig in der mathematischen Jargon (=Umgangssprache) benutzt:
Man sagt, dass eine Regel, die Elementen der Menge A Elemente der Menge B zuweist, eine wohldefinierte Abbildung ist, wenn sie eine Abbilding in Sinne der Definition oben ist: d.h.:

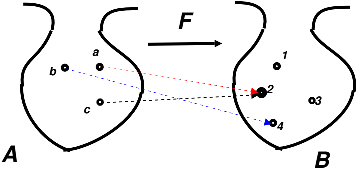
- Die Regel jedem Element von A genau einen Element von B zuweist.

Frage an Euch: Ist die Abbildung unten wohldefiniert?

$F : \underbrace{[-1,1]}_{A} \to \underbrace{[-1,1]}_{B}$, $F(x) := x + 1$ ist KEINE Abbildung, weil $F(1)$ nicht auf $[1,-1]$ liegt, und deswegen F weist nicht allen Elemente von A Elemente von B zu.

$F : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $F(x) := x + 1$ ist doch eine Abbildung.

Mathematisch sauberere Definition: Eine Abbildung ist einer Teilmenge $R \subseteq A \times B$,
so dass es zu jedem Element a von A genau ein Element b von B gibt (geschrieben $F(a)$), so dass das Paar (a, b) Element von R ist.
Für die Abbildung



ist $R = \{(a, 2), (b, 4), (c, 2)\}$.

Bsp: Ein Polynom (z.B. $P(x) = x^2 + 3x + 13$), betrachtet als eine Abbildung, ist dann $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, gegeben durch
$R = \{(x, x^2 + 3x + 13) \mid \text{wobei } x \in \mathbb{R}\}$. Z.B. ist $(1, \underbrace{1^2 + 3 + 13}_{17}) \in R$,

$(0, 13) \in R$; aber $(2, 0) \notin R$, weil $2^2 + 3 \cdot 2 + 13 \neq 0$.

Die konstante Abbildung $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $C(x) = C$ ist gegeben durch
$R = \{(x, C) \mid \text{wobei } x \in \mathbb{R}\}$.

Arithmetische Operationen als Abbildungen

Man kann sie als Abbildungen darstellen, z.B. Addition
$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $+(a, b) := a + b$

In der Sprache von Teilmengen sieht das entsprechende R so aus:

$$R = \{(\underbrace{(a, b)}_{\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}}, a + b) \mid \text{wobei } a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq (\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}_{A}) \times \underbrace{\mathbb{R}}_{B}.$$

(z.B. $((1, -2), -1) \in R$), weil $1 + (-2) = -1$.