Neues (nichtriviales) Thema: Vektorräume

Logik des Abschnitts „synthetischer Aufbau“

- Definition
- Einige Eigenschaften und eine grosse Familie von Beispielen ($\mathbb{R}^n$)
- Eine Aussage, dass alle Vektorräume die Vektorräume aus der Familie von Beispielen „sind“

Hauptdefinition der Vorlesung: Eine Menge V
mit einer Abbildung $+ : V \times V \to V$
(genannt: Addition, statt $+(v_1, v_2)$ werden wir $v_1 + v_2$ schreiben)
und einer Abbildung $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$
(genannt: Multiplikation, statt $\cdot(\lambda, v)$ werden wir λv oder $\lambda \cdot v$ schreiben)
heißt ein Vektorraum, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

- I Für alle $u, v, w \in V$ gilt $(u + v) + w = u + (v + w)$
- II Für alle $u, v \in V$ gilt $u + v = v + u$
- III Es existiert ein $\vec{0} \in V$, so dass für alle $v \in V$ gilt $\vec{0} + v = v$
- IV Für jedes $v \in V$ existiert ein $-v \in V$, so dass gilt $-v + v = \vec{0}$
- V Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $v \in V$ gilt $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
- VI Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $v \in V$ gilt $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
- VII Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $u, v \in V$ gilt $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
- VIII Für alle v gilt $1 \cdot v = v$

Vektorraum $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

Wir haben die Definition eines Vektorraums gegeben.
Vielleicht existiert kein Vektorraum? Vielleicht widersprechen die Eigenschaften I — VIII einander? Das nächste Ziel ist, einen Vektorraum zu konstruieren.
Um einen Vektorraum zu konstruieren, sollen wir:
• Die Menge V angeben: In unserem Bsp. ist $V := \mathbb{R} \times \mathbb{R} =: \mathbb{R}^2$. Aus kosmetischen Gründen werden die Elemente von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ senkrecht geschrieben:
$\mathbb{R} \times \mathbb{R} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$.
• Die Operationen „$+$“ und “$\cdot$“ angeben
und sicherheitshalber prüfen, dass die Operationen „$+$“ und „$\cdot$“ tatsächlich Abbildungen sind (Jargon: „wohldefiniert sind“)
In unserem Fall bedeutet das, dass wir prüfen sollen, ob
$\forall v, u \in V$ und $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $v + u \in V$, $\lambda v \in V$.

Wir definieren Addition:

Angenommen $u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Dann setze

$u + v = \begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Das ist eine Abbildung von $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$.

Bsp. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Frage an Euch

Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 25 \\ 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

Eigenschaften der Addition

I. Addition von Vektoren ist **assoziativ**

Z.z.: Für alle u, v, w gilt $(u+v)+w = u+(v+w)$.

Tatsächlich,

$$\left(\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_u + x_v) + x_w \\ (y_u + y_v) + y_w \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x_u + x_v) + x_w \\ (y_u + y_v) + y_w \end{pmatrix} =$$

$$\left[\begin{array}{c} \text{Die } x_u,\ x_v,\ \dots \text{ sind übliche reelle Zahlen} \\ \text{und die Addition ist die übliche Addition in } \mathbb{R} \end{array}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} x_u + x_v + x_w \\ y_u + y_v + y_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u + (x_v + x_w) \\ y_u + (y_v + y_w) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \end{pmatrix}\right)$$

Bsp. $\left(\binom{1}{2} + \binom{3}{4}\right) + \binom{5}{6} = \binom{1+3}{2+4} + \binom{5}{6} = \begin{pmatrix} \underbrace{1+3+5}_{9} \\ \underbrace{2+4+6}_{12} \end{pmatrix} = \binom{1}{2} + \left(\binom{3}{4} + \binom{5}{6}\right)$

Eigenschaften von Addition

II. Addition von Vektoren ist kommutativ: $u + v = v + u$.

Tatsächlich, $\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \end{pmatrix} =$

$\left[\begin{array}{c} \text{Die } x_u,\ x_v,\ \dots \text{ sind übliche reelle Zahlen} \\ \text{und die Addition von } x_u \text{ und } x_v \text{ ist die übliche Addition in } \mathbb{R} \end{array} \right]$

$= \begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_v + x_u \\ y_v + y_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$

III. Existenz eines neutralen Vektors:

Für den Vektor $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und für jeden Vektor v gilt:

$\vec{0} + v = v$, weil $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + x_v \\ 0 + y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$

IV. Existenz eines inversen Vektors:

Für den Vektor $v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$ ist die Summe dieses Vektors mit dem Vektor $-v := \begin{pmatrix} -x_v \\ -y_v \end{pmatrix}$ gleich $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Skalare und Vektoren multiplizieren

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Skalar.
Sei $v \in \mathbb{R}^2$, $v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$.
Wir setzen $\lambda v = \lambda \cdot v := \begin{pmatrix} \lambda x_v \\ \lambda y_v \end{pmatrix}$.
Bsp. $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.
Multiplikation von Skalaren und Vektoren ist wohldefiniert (als Abbildung von $\mathbb{R} \times V$ nach V, weil $\begin{pmatrix} \lambda x_v \\ \lambda y_v \end{pmatrix} \in V = \mathbb{R}^2$ ist).

Eigenschaften der Multiplikation von Vektoren und Skalaren:

V: Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und für jeden Vektor $v \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gilt $\lambda(\mu\, v) = (\lambda\mu)v$.

Tatsächlich, $\lambda(\mu v)$

$$= \lambda \left(\mu \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} \right) = \lambda \begin{pmatrix} \mu x_v \\ \mu y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(\mu x_v) \\ \lambda(\mu y_v) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\lambda\mu) x_v \\ (\lambda\mu) y_v \end{pmatrix} = (\lambda\mu) \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = (\lambda\mu)v$$

Bsp. mit Zahlen: $\lambda = 2; \mu = 3,\ v = \binom{1}{4}$

$$2 \cdot \left(3 \cdot \binom{1}{4} \right) = 2 \cdot \binom{3 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \binom{2 \cdot 3 \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \binom{6 \cdot 1}{6 \cdot 4} = 6 \cdot \binom{1}{4}.$$

Weitere Eigenschaften der Multiplikation von Vektoren und Skalaren:

VI: Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ **und für jeden Vektor** $v \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ **gilt**
$(\lambda + \mu)\, v = \lambda v + \mu v$.
Tatsächlich, $(\lambda + \mu) v =$

$$(\lambda + \mu) \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu) x_v \\ (\lambda + \mu) y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_v + \mu x_v \\ \lambda y_v + \mu y_v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda x_v \\ \lambda y_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu x_v \\ \mu y_v \end{pmatrix} = \lambda v + \mu v$$

Weitere Eigenschaften der Multiplikation von Vektoren und Skalaren:

VII: Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ und für alle Vektoren $u, v \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gilt
$\lambda\,(u + v) = \lambda u + \mu v.$
Tatsächlich, $\lambda(u + v)$=

$$\lambda \left(\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} \right) = \lambda \begin{pmatrix} x_u + x_v \\ x_u + y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_u + \lambda x_v \\ \lambda y_u + \lambda y_v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda x_u \\ \lambda y_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda x_v \\ \lambda y_v \end{pmatrix} = \lambda u + \lambda v$$

VIII: Für jeden Vektor v gilt $\quad 1\,v = v$

Tatsächlich, $1\,v = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,x_v \\ 1\,y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = v$

Alles zusammen

1. Wir haben die Operationen $+ : V \times V \to V$, wobei $V = \mathbb{R}^2$, und $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ definiert.
2. Wir haben geprüft, dass die Operationen wohldefiniert sind.
3. Wir haben die Eigenschaften I—VIII gezeigt.

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ist deswegen ein Vektorraum.

Einfachste Folgerungen aus der Definition

Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum.
Kann V leer sein? Nein! Weil das der Eigenschaft III widerspricht:

III Es existiert ein $\vec{0} \in V$, so dass für alle $v \in V$ gilt $\vec{0} + v = v$

Kann V aus einem Element bestehen? Ja!

Beispiele von Vektorräumen: trivialer Vektorraum

Ein Vektorraum besteht aus einer Menge und zwei Operationen (Abbildungen $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$).
Um einen Vektorraum anzugeben, muss man
• eine Menge und die Operationen $+$ und $\cdot$ auf der Menge beschreiben (Wohldefiniertheit nicht vergessen)
• und dann beweisen, dass die Eigenschaften I—VIII erfüllt sind.

Trivialer Vektorraum (besteht aus einem Punkt).

Ein trivialer Vektorraum bestehet aus einem Element $\vec{0}$ (also $V = \{\vec{0}\}$).
Die Operationen sind wie folgt:
Die Operation $+ : \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$. (Wohldefiniert!)
Die Operation $\cdot$: Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. (Wohldefiniert!)
Wir haben die Menge und die Operationen beschrieben.
Um zu beweisen, dass V ein Vektorraum ist, müssen wir zeigen, dass alle 8 Eigenschaften I— VIII erfüllt sind.

Eigenschaft I: Z.z.: $(u + v) + w = u + (v + w)$. Es gibt aber nur eine Möglichkeit für u, v, w, nähmlich $u = \vec{0}$, $v = \vec{0}$, $w = \vec{0}$. Also wir müssen zeigen, dass $\underbrace{(\vec{0} + \vec{0})}_{\vec{0}} + \vec{0} = \vec{0} = \vec{0} + (\vec{0} + \vec{0})$, was offensichtlich richtig ist.

II. $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{0}$ erfüllt usw.

Eine freiwillige Übung: Kann V aus 2 Elementen bestehen?

Lemma 1. *Es gibt genau einen Vektor* $\vec{0}$ *mit der Eigenschaft III.*

Beweis: Angenommen v hat die Eigenschaft III. Dann gilt
(a) $\vec{0} + v = \vec{0}$, weil für alle Vektoren u gilt $\vec{0} + u = u$, und
(b) $\vec{0} + v = v$, weil für alle Vektoren u gilt $u + v = v + u = u$.
Also $v = \vec{0}$. $\square$

Lemma 2. *Ist* $u + v = v$, *so ist* $u = \vec{0}$

Beweis: Betrachten wir die Gleichung $u + v = v$
und addieren den Vektor $-v$, der nach IV existiert, zu beiden Seiten.
Wir bekommen $-v + (u + v) = -v + v$.
Unter Benutzung von I und II bekommen wir $(-v + v) + u = \vec{0}$.
Dann ist $\vec{0} + u = \vec{0}$, also $u = \vec{0}$. $\square$

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In den Lemmata $3, 4, 5$ und später sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 3 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{R}^2$ ist das Lemma trivial: $0 \cdot \binom{x}{y} = \binom{0 \cdot x}{0 \cdot y} = \binom{0}{0} = \vec{0}$.

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$. Nach VI gilt $(0 + 0)v = 0v + 0v$. Also gilt $0v = 0v + 0v$. Addieren von $-0v$ ergibt $\vec{0} = 0v$. □

Lemma 4 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. **(In $\mathbb{R}^2$ ist das Lemma trivial)**

Beweis. $\lambda\vec{0} \overset{III}{=} \lambda(\vec{0} + \vec{0}) \overset{VI}{=} \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0}$. Addieren von $-\lambda\vec{0}$ ergibt $\vec{0} = \lambda\vec{0}$. □

Umkehrung der Lemmata 3,4.

Lemma 5 Ist $\lambda v = \vec{0}$, so ist $\lambda = 0$ oder $v = \vec{0}$.

Beweis. Angenommen $\lambda \neq 0$. Z.z.: $v = \vec{0}$. Wir betrachten den Skalar $\frac{1}{\lambda}$.

Dann gilt: $\vec{0} \overset{\text{Lem. } 4}{=} \frac{1}{\lambda}\vec{0} = \frac{1}{\lambda}(\lambda v) \overset{V}{=} 1 \cdot v \overset{VIII}{=} v$. □

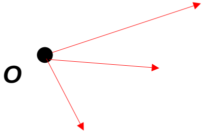
Lemma 6. Für jedes v gilt: $-1 \cdot v = -v$. (wobei $-v$ das inverse Element zu v in $(V, +, \cdot)$ ist)
In $\mathbb{R}^2$ ist das Lemma trivial: $-1 \cdot \binom{x_1}{x_2} = \binom{-1 \cdot x_1}{-1 \cdot x_2} = \binom{-x_1}{-x_2} = -\binom{x_1}{x_2}$.

Beweis. $-1 \cdot v + v \stackrel{VIII}{=} -1 \cdot v + 1 \cdot v \stackrel{VI}{=} (-1+1) \cdot v = 0 \cdot v \stackrel{\text{Lem. 3}}{=} \vec{0}$. $\square$

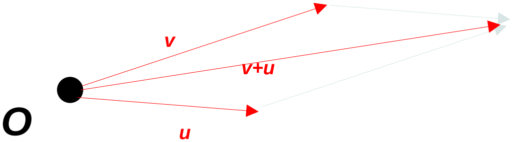
Lemma 7 Für jedes $v \in V$ s.d. $v \neq \vec{0}$ gilt:
ist $\lambda v = \mu v$, so ist $\lambda = \mu$.
Beweis. Wir addieren $(-\mu) \cdot v$ zu der beiden Seiten der Gleichung $\lambda v = \mu v$. Links bekommen wir $\lambda \cdot v + (-\mu) \cdot v = (\lambda - \mu)v$. Rechts bekommen wir $(-\mu + \mu)v = 0 \cdot v \stackrel{\text{Lem. 3}}{=} \vec{0}$. Also, $(\lambda - \mu)v = \vec{0}$. Nach Lemma 5 ist $\lambda - \mu = 0$, also $\lambda = \mu$, $\square$.

Geometrische Vektoren bilden einen Vektorraum

Sei O ein Punkt in der Ebene. (Geometrische) Vektoren (mit Anfangspunkt O) sind gerichtete Strecken mit Anfangspunkt O.

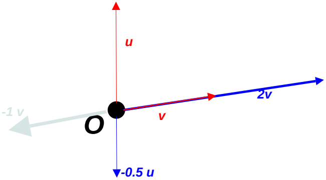


Begegnet sind Ihnen Vektoren in der Geometrie und in der Physik, wo z.B. Kraft, elektrische Feldstärke, Geschwindigkeit und Beschleunigung durch Vektoren beschrieben werden.



Addition von Vektoren:Parallelogrammregel.

Multiplikation $\cdot$ von Skalaren $\in \mathbb{R}$ und Vektoren: Streckungen/Stauchungen.



Axiome I – VIII : geometrische Überlegungen (die nicht offensichtlich sind und deswegen erst viel später gemacht werden).

Def. Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein Untervektorraum, falls $\forall u, v \in U$ und $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ die Elemente $v + u$ und λv auch in U liegen.
Umgangsprachlich: Falls $\forall u, v \in U$ und $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $v + u \in U$ und $\lambda v \in U$ sind, heißt die Teilmenge U abgeschlossen bezüglich „$+$“ und „$\cdot$“.
Triviale Beispiele: $\{\vec{0}\}$ und V sind Untervektorräume.

Bsp. von einem nichttrivialen Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$

Bsp. Die Teilmenge $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ ist ein Untervektorraum (des $\mathbb{R}^2$).

Warum ist U ein Untervektorraum? Um das zu zeigen, muss man Eigenschaften von U mit Eigenschaften, die in der Definition des Untervektorraums verlangt sind, vergleichen.

> **Def.** Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum. $\underbrace{\text{Eine nichtleere Teilmenge } U \subseteq V}_{(a)}$ heißt ein Untervektorraum, falls
> (b) $\forall u, v \in U$ gilt $v + u \in U$ und
> (c) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda v \in U$.

(a) $U \subseteq \mathbb{R}^2$; $U \neq \varnothing$ — dies ist erfüllt.

(b) Dies ist auch erfüllt: Tatsächlich, für beliebige Elemente $u = \begin{pmatrix} x_u \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} x_v \\ 0 \end{pmatrix}$ (aus U) gilt $u + v = \begin{pmatrix} x_u \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u + x_v \\ 0 \end{pmatrix} \in U$.

(c) Auch dies ist erfüllt: Tatsächlich, für beliebiges Element $u = \begin{pmatrix} x_u \\ 0 \end{pmatrix}$ und für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $\lambda u = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_u \\ 0 \end{pmatrix} \in U$.

Nichtbeispiel

Bsp. Der Kreis $K_1 := \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ist KEIN Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

Warum ist ein Kreis kein Vektorraum? Um das zu zeigen, muss man Eigenschaften von U mit Eigenschaften, die in Definition des Untervektorraums verlangt sind, vergleichen.

Def. Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum. $\underbrace{\text{Eine nichtleere Teilmenge } U \subseteq V}_{(a)}$ heißt ein Untervektorraum, falls
(b) $\forall u, v \in U$ gilt $v + u \in U$ und
(c) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda v \in U$.

(a) $U \subseteq V$; $U \neq \varnothing$ — dies ist erfüllt.

(b) Dies ist NICHT erfüllt. Um zu zeigen, dass eine Aussage, die für alle $u, v \in U$ erfüllt sein soll, nicht erfüllt ist, finden wir ein Beispiel von 2 Vektoren aus K_1 so dass die Summe davon nicht in K_1 liegt: wir nehmen $u = \binom{1}{0} \in K_1$ und $v = \binom{-1}{0} \in K_1$.

Die Summe davon ist $\binom{1}{0} + \binom{-1}{0} = \binom{0}{0} \notin K_1$.

Also, die Bedingung (b) ist nicht erfüllt; daher ist K_1 kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$

Fragen an Euch

(1) Ist $K_0 := \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$?