Lemma 6 – verbesserte Version. Für jedes v gilt: Es gibt genau einen Vektor $-v$ (mit der Eigenschaft $-v + v = \vec{0}$), und zwar $-1 \cdot v = -v$.

Letztes Mal: wir haben bewiesen, dass $-1 \cdot v + v = \vec{0}$. Heute beweisen wir die Eindeutigkeit: Angenommen die Vektoren u, w haben die Eigenschaft IV bzg. des Vektors v, d.h. $u + v = \vec{0}$ und $w + v = \vec{0}$. Wir müssen zeigen, dass $u = w$. Nach Eigenschaft I gilt

$$w + (u + v) \overset{\mathrm{I}}{=} (w + u) + v \qquad (**)$$

Auf der linken Seite von $(**)$ steht

$$w + (u + v) \overset{\text{Annahme}}{=} w + \vec{0} \overset{\mathrm{II}}{=} \vec{0} + w \overset{\mathrm{III}}{=} w.$$

Auf der rechten Seite von $(**)$ steht

$$(w + u) + v \overset{II}{=} (u + w) + v \overset{I}{=} u + (w + v) = u + \vec{0} = \vec{0} + u = u.$$

Wir haben also $u = w$ bekommen $\square$

Wiederholung: Vektoräume und Rechenregeln

Ein Vektorraum ist eine Menge V
mit einer Abbildung $+ : V \times V \to V$
und einer Abbildung $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$
s.d. bestimmte Eigenschaften (I — VIII) (siehe Vorl. 3) erfüllt sind.

Rechenregeln: (Lemma 3 – Lemma 7)

- $0v = \vec{0}$
- $\lambda\vec{0} = \vec{0}$
- Ist $\lambda v = \vec{0}$, so ist $\lambda = 0$ oder $v = \vec{0}$
- $-1 \cdot v = -v$ (wobei $-v$ das inverse Element zu v ist)
- Ist $\lambda v = \mu v$ für ein $v \neq \vec{0}$, so ist $\lambda = \mu$.

$\mathbb{R}^n$ als Hauptbeispiel (letztes Mal: $\mathbb{R}^2$)

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ Stück}} := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$

Addition im $\mathbb{R}^n$ (wie im $\mathbb{R}^2$) : $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$

Bsp in $\mathbb{R}^3$**:** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 \\ 2+5 \\ 3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}.$

Multiplikation $\cdot$ von Elementen von $\mathbb{R}$ und von $\mathbb{R}^n$ (wie im $\mathbb{R}^2$):

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

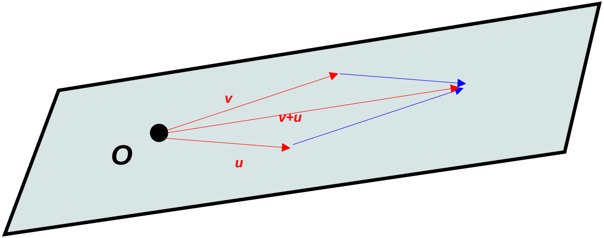
Bsp: $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix},$

Wie wir letztes Mal für $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ bewiesen haben, kann man beweisen, dass $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ein Vektorraum ist.

Def – Wiederholung. Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein Untervektorraum, falls $\forall u, v \in U$ und $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ die Elemente $v + u$ und λv auch in U liegen.

Geometrisches Beispiel eines Untervektorraums

O liege auf einer Ebene im 3-d-Raum. U bestehe aus Vektoren, deren Anfangspunkt O ist, und Endpunkt auch auf der Ebene liegt.



Die Menge U ist abgeschlossen bzgl. Addition und Multiplikation mit Skalaren $\in \mathbb{R}$.

Satz 3 Für die Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$, wobei $a_i \in \mathbb{R}$, ist die Lösungsmenge $L := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \right\}$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$.

Beweis: Die Teilmenge $L \neq \emptyset$, weil $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in L$. In der Tat,

$a_1 \cdot 0 + ... + a_n \cdot 0 = 0$.

Z.z.: Die Lösungsmenge ist abgeschlossen bzgl.

(i) Addition und (ii) Multiplikation.

(i) Seien $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in L$, d.h. $\begin{array}{llll} a_1x_1 + & \cdots & +a_nx_n & = 0 \\ a_1y_1 + & \cdots & +a_ny_n & = 0 \end{array}$. Dann ist

$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_1y_1 + \cdots + a_ny_n = 0 + 0 = 0$, also

$a_1(x_1 + y_1) + \cdots + a_n(x_n + y_n) = 0$, also $\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \in L$.

(ii) Analog. $\square$

Bemerkung. Es ist wichtig, dass auf der rechten Seite der Gleichung 0 steht: wenn dort etwas anderes steht (z.B., 1), ist die Lösungsmenge kein Untervektorraum. In der Tat, wenn $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in L$ sind, also wenn

$$\begin{matrix} a_1x_1+ & \cdots & +a_nx_n & = 1 \\ a_1y_1+ & \cdots & +a_ny_n & = 1 \end{matrix},$$

dann ist $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_1y_1 + \cdots + a_ny_n = 1 + 1 = 2$, also $a_1(x_1 + y_1) + \cdots + a_n(x_n + y_n) = 2 \neq 1$, also $\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \notin L$.

Bemerkung: Den Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aus dem vorangegangenen Bsp.,

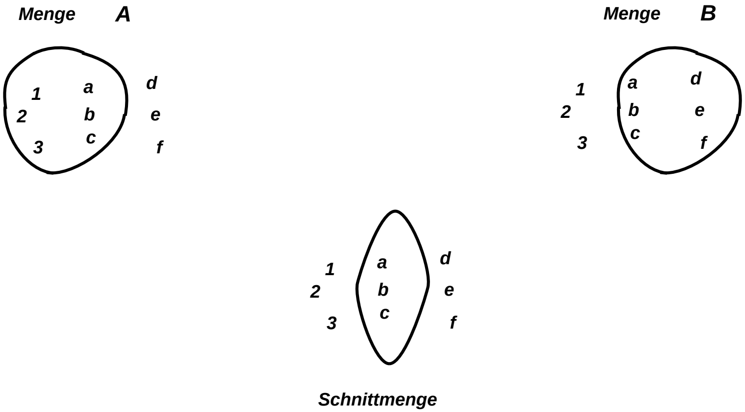
$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \right\},$$

kann man mit Hilfe von Satz 3 bekommen:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{0}_{a_1} \cdot x + \underbrace{1}_{a_2} \cdot y = 0 \right\}.$$

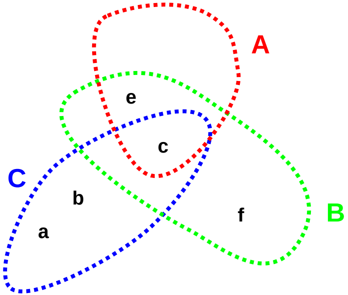
Exkurs in die Mengenlehre: Schnittmenge

A, B seien Mengen. Der Durchschnitt von A und B (Bezeichnung: $A \cap B$) ist die Menge aller Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind: $\quad A \cap B := \{x \mid \ x \in A \text{ und } x \in B\}$.



Schnittmenge von mehreren Mengen

Gegeben sei eine Menge $\mathbb{M}$ von Mengen. Die Schnittmenge von $\mathbb{M}$ ist die Menge $\bigcap_{M \in \mathbb{M}} M$ der Elemente, die in jedem Element von $\mathbb{M}$ enthalten sind: $\bigcap_{M \in \mathbb{M}} M := \{x \mid \forall M \in \mathbb{M} \text{ gilt } x \in M.\}$



$A = \{e, c\}$ $B = \{e, c, f\}$ $C = \{a, b, c\}$ Falls $\mathbb{M} := \{A, B, C\}$ $= \{\{e, c\}, \{e, c, f\}, \{a, b, c\}\}$, ist $\bigcap_{M \in \mathbb{M}} M = \{c\}$

Bsp. Wir betrachten $M_i \subseteq \mathbb{Z}$, $M_i := \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq i\}$. (Z.B. $M_1 = \mathbb{N}$), und $\mathbb{M} := \{M_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt: $\bigcap_{M \in \mathbb{M}} M = \varnothing$.

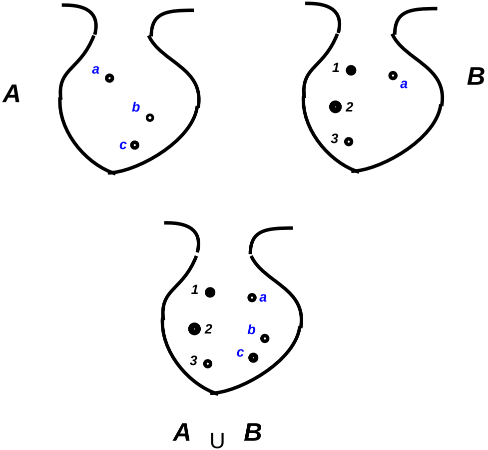
Bemerkung. Man kann die Schnittmenge oben wie folgt schreiben:

$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} M_i = \varnothing$

Vereinigung von Mengen

A, B seien Mengen. Die Vereinigung von A und B (Bezeichnung: $A \cup B$) ist die Menge aller Elemente, die in A oder in B enthalten sind.
Bemerkung. „Oder" ist mathematisch gemeint.

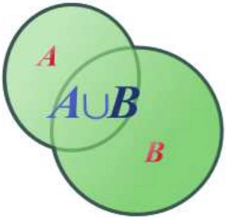
$$A \cup B := \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

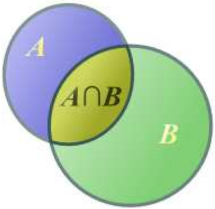


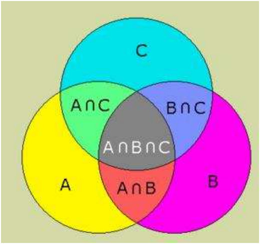
Analog kann man die Vereinigung von mehreren Mengen definieren: Falls $\mathbb{M}$ eine Menge von Mengen ist, dann ist

$$\bigcup_{M \in \mathbb{M}} M := \{x \mid \exists M \in \mathbb{M} \ \text{ sodass } x \in M\}.$$

Mengendiagramm: ein Hilfsmittel (es lohnt sich, eines zu zeichnen)

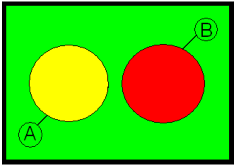


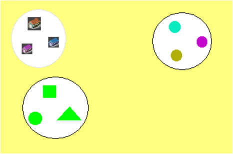




Disjunkte Mengen

Zwei Mengen A und B heißt disjunkt, wenn $A \cap B = \varnothing$. Die Definition kann man für mehrere Mengen verallgemeinern: Die Mengen A, B, C sind disjunkt, wenn $A \cap B = B \cap C = C \cap A = \varnothing$.





Satz 4 *$\mathbb{U}$ sei eine Menge von Untervektoräumen des Vektorraums $(V, +, \cdot)$. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch ein Untervektoraum.

Beweis. Z.z.: (für alle Vektoren u, v und Skalare λ gilt)

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow u + v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow \quad \lambda u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$ ist nicht leer, weil $\vec{0}$ in jedem Untervektorraum U liegt. Tatsächlich, U enhält mind. ein Element (z.B. w), und deswegen auch das Element $0w \overset{\text{Lemma 3}}{=} \vec{0}$.
(b): Angenommen $u, v \in U \in \mathbb{U} \Rightarrow \; u + v \in U$ (Abgeschlossenheit von U bzg. „$+$“). Also liegt $u + v$ in jedem Element von $\mathbb{U}$, also $u + v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.
(c): Angenommen $u \in U \in \mathbb{U}$, $\lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lambda u \in U$ (Abgeschlossenheit von U bzg. „$\cdot$“). Also liegt λu in jedem Element von $\mathbb{U}$, also $\lambda u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$, $\square$

Wir betrachten ein homogenes lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & 0. \end{cases}$$

(Das Wort „homogen“ bedeutet in diesem Kontext, dass die rechte Seite gleich Null ist). Sei L die Lösungsmenge davon, also

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, ..., m\}\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0 \right\}.$$

Folgerung *Die Lösungmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems ist ein Untervektorraum.*

Beweis. Für jedes $i \in \{1, ..., m\}$ betrachten wir

$$L_i := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0 \right\}.$$

Dann ist $L = \bigcap_{i\in\{1,...,m\}} L_i$, weil ein $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ genau dann in L liegt, wenn es alle Gleichungen $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0$ erfüllt, also wenn es in allen L_i liegt.

Nach Satz 3 sind L_i Untervektorräume. Dann ist L auch Untervektorraum nach Satz 4. $\square$

Einschränkung einer Abbildung

Sei $f : A \to B$, $A_1 \subseteq A$. f eingeschränkt auf A_1 (bez: $f_{|A_1}$) ist die Abbildung
$f : A_1 \to B$, $f_{|A_1}(x) := f(x) \quad (\forall x \in A_1)$.

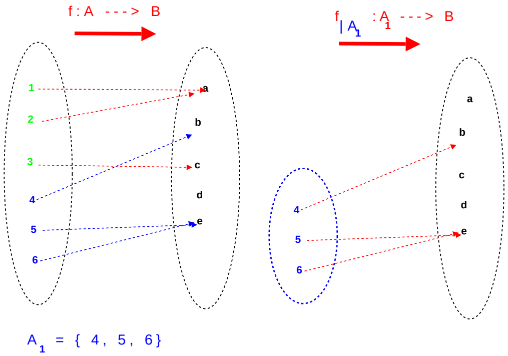


Abbildung : **Bsp:** $A_1 \subseteq A$ und $f_{|A_1} : A_1 \to B$

Einschränkung der Operationen $+$ und $\cdot$

Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum. Addition von Vektoren und Multiplikation von Skalaren und Vektoren sind auch Abbildungen (nach Def. des Vektorraums):

$+ : V \times V \to V \qquad \cdot : \mathbb{R} \times V \to V$

Dann kann man für eine Teilmenge $U \subseteq V$ die Operationen auf U einschränken (weil die Operationen Abbildungen sind)

$+_U : U \times U \to V$ ist wie folgt definiert: $\forall u_1, u_2 \in U$ ist $u_1 +_U u_2 := u_1 + u_2 \in V$.

$\cdot_U : \mathbb{R} \times U \to V$ ist wie folgt definiert: $\forall u \in U\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ist $\lambda \cdot_U u := \lambda u \in V$.

Vorsicht: wenn U eine beliebige Teilmenge ist, könnte es sein, dass $u_1 + u_2 \notin U$, oder $\lambda \cdot u \notin U$.

Wir sagen, dass die Einschränkung von $+$ und $\cdot$ auf $U \subseteq V$ wohldefiniert ist, falls $\forall u_1, u_2 \in U\ u_1 +_U u_2 \in U$ ist und $\forall u \in U\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\ \lambda \cdot_U u \in U$ ist.

Wenn die Einschränkung von $+$ und $\cdot$ auf $U \subseteq V$ wohldefiniert ist, sind $+_U$ und $\cdot_U$ Operationen auf U:

$+_U : U \times U \to U$ und $\cdot_U : \mathbb{R} \times U \to U$.

Ein Untervektorraum eines Vektorraums ist ein Vektorraum bzgl. induzierter Operationen

Satz 5. *Sei U ein Untervektorraum eines Vektorraums $(V, +, \cdot)$. Dann ist $(U, +_U, \cdot_U)$ ist ein Vektorraum.*

Beweis. Die Operationen $+_U$ und $\cdot_U$ sind wohldefiniert nach Definition eines Untervektorraums, weil ($\forall u_1, u_2, u \in U$ und $\forall \lambda \in \mathbb{R}$) gilt $u_1 + u_1 \in U$; $\lambda u \in U$; also $+_U : U \times U \to U$ und $\cdot_U : \mathbb{R} \times U \to U$ wie wir in der Definition eines Vektorraum verlangen.

Um zu zeigen, dass $(U, +_U, \cdot_U)$ ein Vektorraum ist, müssen wir die Eigenschaften I — VIII nachweisen.

Eigenschaft I: $\forall u_1, u_2, u_3 \in U$ gilt $(u_1 +_U u_2) +_U u_3 = u_1 +_U (u_2 +_U u_3)$

Beweis von I: Nach Definition von $+_U$ ist

$(u_1 +_U u_2) +_U u_3 = (u_1 + u_2) + u_3$ und

$u_1 +_U (u_2 +_U u_3) = u_1 + (u_2 + u_3)$; da V ein Vektorraum ist, ist

$(u_1 + u_2) + u_3 = u_1 + (u_2 + u_3)$, deswegen

$(u_1 +_U u_2) +_U u_3 = u_1 +_U (u_2 +_U u_3)$.

Analog: **Beweis von II**: Für alle $u_1, u_2 \in V$ gilt $u_1 +_U u_2 = u_2 +_U u_1$ (die Operation $+$ auf V hat diese Eigenschaft, und die Operation $+_U$ fällt auf der Menge, auf der sie definiert ist, mit $+$ zusammen.)

Beweis von III: Es existiert ein $\vec{0} \in U$, so dass für alle $u \in U$ $\vec{0} + u = u$ gilt.
Der Vektor $\vec{0}$ hat die Eigenschaft $\vec{0} + u = u$, wir müssen deswegen nur beweisen, dass $\vec{0} \in U$ ist.
Nach Definition eines Untervektorraums ist $U \neq \emptyset$, also $\exists u \in U$. Wir betrachten $0 \cdot u$. Nach Definition eines Untervektorraums ist $0 \cdot u \in U$. Nach Lemma 3 ist $0 \cdot u = \vec{0}$. Also $\vec{0} \in U$.
Beweis von IV: Für jedes $u \in U$ existiert ein $-u \in U$, so dass gilt $-u + u = \vec{0}$.
Analog zum Beweis von III. Der Vektor $-1 \cdot u$ liegt in U, nach Definition eines Untervektorraums, und hat die Eigenschaft $-1 \cdot u + u = \vec{0}$ nach Lemma 6.
Beweis von V — VIII: ist Analog zum Beweis I, II: die Operationen $+$ und $\cdot$ auf V haben die Eigenschaften V — VIII und die Operationen $+_U$, $\cdot_U$ fallen auf der Menge, auf der sie definiert sind, mit $+$ und $\cdot$ zusammen.
Satz 5 ist bewiesen.

Die $\sum$– Bezeichnung für die Summe

In einem Vektorraum ist die Addition assoziativ und kommutativ (Eigenschaften I und II). Deswegen hängt das Ergebnis

$$((v_{13} + ((v_2 + v_{31})) + ... + ((v_{m-1} + v_{m-1}))) \qquad (*)$$

weder von der Reihenfolge der Addition (also, von Klammern) noch von der Reihenfolge der Elemente (also von den Plätzen, wo sie stehen) ab.

Ab Jetzt werden wir die Klammern womöglich weglassen.

Bezeichnung: Statt der Summe von mehreren Elementen werden wir das Zeichen $\sum$ verwenden:
z.B. $(*) = \sum_{i=1}^{m} v_i$
z.B. $\sum_{i=2}^{4} A_i := A_2 + A_3 + A_4$

Linearkombinationen

Def. *Es sei* $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ *und* $v_1, ..., v_k \in V$.
Die Linearkombination von $v_1, ..., v_k$ *mit Koeffizienten* $\lambda_1, ..., \lambda_k$ *ist der Vektor*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$$

Bsp: *Die Linearkombination von* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *mit Koeffizieten* $-2,\ 1$ *ist* $-2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Def. *Man sagt, dass ein Vektor* v *eine Linearkombination der Vektoren* $v_1, ..., v_m$ *ist, falls es* $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$ *gibt so dass*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = v$$

Bsp. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *ist eine Linearkombination von* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lineare Hülle

Def. *A sei eine nichtleere Teilmenge des Vektorraums $(V, +, \cdot)$. Die lineare Hülle von A (Bezeichung: $\mathrm{span}(A)$) ist die Menge aller Linearkombinationen der Elemente aus A.*

$$\mathrm{span}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \quad : \quad \text{so dass } k \in \mathbb{N}, \ \lambda_i \in \mathbb{R} \ \text{ und } \ v_i \in A \right\}.$$

Bemerkung: Auch wenn die Menge A unendlich ist, besteht die lineare Hülle nur aus endlichen Linearkombinationen.

Wenn die Menge A endlich ist, z.B. $A = \{v_1, ..., v_k\}$, kann man sich immer denken, dass alle Elemente in der Linearkombination anwesen sind, also:
$\mathrm{span}(\{v_1, ..., v_k\}) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \quad : \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \ \text{ und } \ v_i \in A \right\}$. In der Tat, die „fehlenden“ v_i kann man mit $0-$Koeffizient $\lambda_i = 0$ addieren.

Einfaches Bsp in $\mathbb{R}^3$

$$\mathrm{span}\left(\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\right)=\left\{\begin{pmatrix}0\\x\\y\end{pmatrix} : \text{wobei } x,y\in\mathbb{R}\right\}$$

Wie zeigt man dass zwei Mengen A und B, in unserem Fall A=span$\left(\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\right)$ und B=$\left\{\begin{pmatrix}0\\x\\y\end{pmatrix} : \text{wobei } x,y\in\mathbb{R}\right\}$, gleich sind?

Nach Definition (Vorl. 2) $A=B \iff (A\subseteq B \text{ und } B\subseteq A)$.

Wir zeigen $A\subseteq B$: Wir zeigen, dass jede Linearkombination von $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ in B liegt, d.h., die Form $\begin{pmatrix}0\\x\\y\end{pmatrix}$ hat:

$$\lambda_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix}\in B.$$

Wir zeigen jetzt $B\subseteq A$: Jedes Element der Form $\begin{pmatrix}0\\x\\y\end{pmatrix}$ ist eine Linearkombination der Vektoren $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix}0\\x\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$