Definition der Basis

Def. Es sei $(V, +, \cdot)$ ein nichttrivialer Vektorraum. Die Menge $A \subseteq V$ heißt eine Basis-Menge, falls sie

(a) linear unabhängig ist und

(b) $\mathrm{span}(A) = V$.

Satz 7. *A sei eine nichtleere Teilmenge des nichttrivialen Vektorraums $(V, +, \cdot)$. Dann sind die folgende Aussagen äquivalent.*

(a) *A ist eine Basis.*

(b) *Jedes $v \in V$ lass sich in eindeutiger Weise als eine Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A darstellen.*

(c) *A ist linear unabhängig und für jedes $v \in V$, $v \notin A$ ist die Vereinigungsmenge $A \cup \{v\}$ linear abhängig.*

Schema des Beweises: (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a)

(a) $\Rightarrow$ (b)

Sei A eine Basis. Z.z.:

(1) Jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination der Elemente aus A,

(2) die Darstellung von v als Linearkombination ist eindeutig.

Die Aussage (1) folgt direkt aus der Definition einer Basis: $\mathrm{span(A)} \overset{\text{Def.}}{=} V$, und deswegen ist jedes $v \in V$ eine Linearkombination der Vektoren aus A.

(a) $\Rightarrow$ (b)

Wir beweisen Aussage (2): Die Darstellung von v als Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A ist eindeutig.
Angennommen
$\sum_{i=1}^{k_1} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k_2} \mu_i u_i$, wobei v_i paarweise verschieden sind und u_i paarweise verschieden sind. OBdA könnnen wir annehmen, dass $k_1 = k_2 (= k)$ und $v_i = u_i$, weil wir die fehlende Vektoren mit $0-$Koeffizient addieren können. Also

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i, \tag{$*$}$$

wobei $v_i \in A$ paarweise verschieden sind.
Z.z.: Für jedes $i \in \{1, ..., k\}$ gilt $\lambda_i = \mu_i$.

Wir addieren $(-1)\sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i$ zu beiden Seiten der Gleichung $(*)$:

$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + (-1)\sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i = \vec{0}.$

Nach dem Distributivsgesetz (Eigenschaft VII) ist dann
$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \mu_i) v_i = \vec{0}.$

Da A eine Basis und deswegen eine linear unabhängige Menge ist, ist die Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \mu_i) v_i$ trivial, also $\lambda_i - \mu_i = 0$, also $\lambda_i = \mu_i$.
Also (a) $\Rightarrow$ (b).

(b) $\Rightarrow$ (c)

Angenommen jedes $v \in V$ lässt sich in eindeutiger Weise als eine Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A darstellen. Z.z.:

(1) A ist linear unabhängig und

(2) für jedes $v \notin A$ ist die Vereinigungsmenge $A \cup \{v\}$ linear abhängig.

Beweis für (1): Ist die Darstellung jedes Elements eindeutig, so ist die Darstellung von $\vec{0}$ auch eindeutig, also kann man $\vec{0}$ nur als die triviale Linearkombination darstellen, d.h. A ist linear unabhängig.

(b) $\Rightarrow$ (c)

Widerspruchsbeweis für (2): Angenommen, es gibt $v \in V$, $v \notin A$, s.d. $A \cup \{v\}$ linear unabhängig ist.
Nach Voraussetzungen ist $\mathrm{span}(A) = V$, also

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k,$$

wobei $v_i \in A$ und $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\vec{0} = (-1)v + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k \qquad (**)$$

und deswegen kann man $\vec{0}$ als zwei verschiedene Linearkombinationen der Elemente $v, v_1, \ldots, v_k$ darstellen:
wie in $(**)$
und als die triviale Linearkombination
$\vec{0} = 0v + 0v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_k$.
Der Widerspruch zeigt, dass (b)   (c) impliziert.

(c) $\Rightarrow$ (a)

$$(\mathrm{c}) = \begin{cases} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{für } v \notin A \text{ ist } A \cup \{v\} \text{ nicht linear unabhängig} \end{cases}$$

$$(\mathrm{a}) = \begin{cases} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{jedes } v \in V \text{ ist eine Linearkombination der Elemente aus } A \end{cases}$$

Angenommen (c). Wir müssen zeigen, dass $v \in V$ eine Linearkombination der Elemente aus A ist.
Fall 1. $v \in A$. Dann ist v schon eine Linearkombination von Elementen aus A, weil $v = 1v$.

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichttriviale Linearkombination von Elementen aus $A \cup \{v\}$, die Null ist:

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination kommt v mit von Null verschiedenem Koeffizient vor. (Sonst ist $(***)$ eine Linearkombination von Elementen nur aus A und muß trivial sein.) Also, für irgendein j ist $v_j = v$ und $\lambda_j \neq 0$. Wir multiplizieren $(***)$ mit $-\frac{1}{\lambda_j}$

$$\vec{0} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_j} v_2 - \ldots - 1 v_j - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda_j} v_k$$

und addieren v zu beiden Seiten. Wir bekommen

$$v = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i \ .$$

Also ist v eine Linearkombination der Elemente aus A. $\square$

Noch einmal zum Schema des Beweises: Wir mussten zeigen, dass die Aussagen (a), (b), (c) äquivalent sind.
Wir haben gezeigt, dass

- falls (a) erfüllt ist, (b) auch erfüllt ist. (Schritt (a) $\Rightarrow$ (b))
- falls (b) erfüllt ist, (c) auch erfüllt ist. (Schritt (b) $\Rightarrow$ (c))
- falls (c) erfüllt ist, (a) auch erfüllt ist. (Schritt (c) $\Rightarrow$ (a))

Also falls eine der Aussagen (a), (b), (c) erfüllt ist, dann sind die zwei anderen Aussagen auch erfüllt.
Und falls eine der Aussagen (a), (b), (c) nicht erfüllt ist, dann sind die zwei anderen Aussagen auch nicht erfüllt.

Def. *Ein Vektorraum* $(V, +, \cdot)$ *heißt* *endlich erzeugt, falls es eine endliche Teilmenge* $A \subseteq V$ *gibt so dass* $\mathrm{span}(A) = V$.

Bsp. $\mathbb{R}^3$ ist endlich erzeugt: Wie wir letztes Mal gezeigt haben, ist jeder Vektor

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

eine Linearkombination der Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Bsp. Der Vektorraum der Funktionen auf $\mathbb{R}$ (Anwesenheitsaufgabe) ist nicht endlich erzeugt.

Satz 8 *Sei* $(V, +, \cdot)$ *ein endlich erzeugter Vektorraum, d.h.* $\mathrm{span}(A) = V$ *für eine endliche Menge* A*. Dann gibt es eine Basis* $A' \subseteq A$ *von* V*.*
Bemerkung Die Basis A' ist automatisch endlich.

Frage. Ist die Basis eindeutig? Nein! Wir haben in Vorl. 5 bewiesen, dass die Menge $A' := \left\{ \binom{1}{2}, \binom{3}{4} \right\}$ eine Basis-Menge in $\mathbb{R}^2$ ist. Die Standard-Basis $A'' := \left\{ \binom{1}{0}, \binom{0}{1} \right\}$ ist ebenfalls eine Basis-Menge.
Also die Menge
$A := A' \cup A'' = \left\{ \binom{1}{2}, \binom{3}{4}, \binom{1}{0}, \binom{0}{1} \right\}$
hat (mind.) zwei Teilmengen, die Basen sind.

Beweis des Satzes: Angennomen $\mathrm{span}(A) = V$, wobei $A \subseteq V$ endlich ist. Falls V ein trivialer Vektroraum ist, stimmt die Aussage offensichtlich. Ferner werden wir annehmen, das unser Vektorraum nichttrivial ist.

Induktion nach der Anzahl der Elemente in der Menge A. Schema:

1. InduktionsAnfang

   Wir zeigen, dass für eine Teilmenge aus $m = 1$ Elementen die Aussage erfüllt ist.

2. InduktionsVoraussetzung

   Wir nehmen an, dass die Aussage für jede Teilmenge aus $m - 1$ Elementen erfüllt ist.

3. InduktionsSchritt

   Wir beweisen, dass falls die I.V. erfüllt ist, die Aussage auch für jede Teilmenge aus m Elementen erfüllt ist.

I.A.

Angenommen $V = span(A)$, wobei $A = \{v\}$. Ist $v = \vec{0}$, dann ist V ein trivialer Vektorraum und die Aussage ist erfüllt, da nach Definition die Basis von V gleich $\varnothing$ ist, und $\varnothing \subseteq A$.
Ist $v \neq \vec{0}$, so ist, wie wir in Vorlesung 5 bewiesen haben (im Bsp. nach der Definition der linearen Unabhängigkeit), $\{v\}$ linear unabhängig und deswegen eine Basis. (In diesem Fall ist $A' = A$).

I.V. und I.S.

I.V.: Wir nehmen an, dass wenn es in $(V, +, \cdot)$ eine Teilmenge A gibt,

- die aus $m - 1$ Elementen besteht und
- $\mathrm{span}(A) = V$ erfüllt,

es dann auch eine Basis $A' \subseteq A$ gibt.

I.S.: Wir müssen zeigen, dass falls es in $(V, +, \cdot)$ eine Teilmenge A gibt

- die aus m Elementen besteht und
- $\mathrm{span}(A) = V$ erfüllt,

es dann auch eine Basis $A' \subseteq A$ gibt.

Fall 1.A ist linear unabhängig. Dann ist A eine Basis.

I.S., Fall 2

Fall 2. A ist linear abhängig. Dann gibt es eine nichttriviale Linearkombination der Elemente aus A, die gleich $\vec{0}$ ist:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_m v_m = \vec{0},$$

wobei $v_i \in A$ und nicht alle λ_i gleich 0.
Sei $\lambda_j \neq 0$. Dann multiplizieren wir wie im Beweis des Satzes 7 beide Seiten mit $-\frac{1}{\lambda_j}$ und addieren v_j: Nach Umbenennung $v_j \mapsto v$

$$v = - \sum_{\substack{i = 1 \\ i \neq j}}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i \ . \qquad (*)$$

Betrachten wir dei Menge $A' \subseteq A$, die aus allen Elementen von A besteht mit Ausnahme von v. (Also A' ist A ohne v).
Für A' alle Induktionsvoraussetzungen erfüllt sind: A' enthält genau $m - 1$ Elemente.

Z.z.: $\mathrm{span}(A') = V$,
d.h. jedes $u \in V$ ist eine Linearkombination der Elemente aus A'.
Nach Voraussetzung ist $\mathrm{span}(A) = V$, also gibt es für jedes $u \in V$ Elemente $u_1, ..., u_k \in A$ so, dass

$$u = \sum_{i=1}^{k} \mu_i u_i \ . \qquad (**)$$

Liegt v nicht in der Menge $\{u_1, ..., u_k\}$, so ist jedes u_i ein Element von A' und deswegen ist u eine Linearkombination von Elementen aus A'.
Wir nehmen an, dass v in der Menge $\{u_1, ..., u_k\}$ liegt, d.h. $v = u_j$ für irgendein j. Wir haben

$$u = \Big(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \mu_i u_i \Big) + \mu_j u_j \overset{(*)}{=} \Big(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \mu_i u_i \Big) - \mu_j \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i$$

was eine Linearkombination von Elementen aus A' ist. $\square$

Satz 8 - Wiederholung *Sei $(V, +, \cdot)$ ein endlich erzeugter Vektorraum, d.h.* $\mathrm{span}(A) = V$ *für eine endliche Menge A. Dann gibt es eine endliche Basis $A' \subseteq A$ von V.*

Folgerung. Sei $(V, +, \cdot)$ NICHT endlich erzeugt. Dann $\forall n \in \mathbb{N}$ gibts es eine $n-$elementige linearunabhängige Teilmenge von V.

Induktionsbeweis. I.A.: Z.z.: Es gibt eine 1-elementige linear unabhängige Menge.

Der Vektorraum V ist nichttivial, da der trivialer Vektorraum endlich erzeugt ist. Dann $\exists v_1 \in V$ mit $v_1 \neq \vec{0}$. Wie wir vorher bewiesen haben, ist die Menge $A_1 := \{v_1\}$ linearunabhängig.

I.V.: Es existiert eine linearunabhängige $A_n = \{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$.
I.S.: Z.z.: Es existiert eine linearunabhängige $A_{n+1} \subseteq V$, die aus $n+1$ Elementen besteht.

I.S.

Wir nehmen eine linearunabhängige $A_n = \{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$, die nach I.V. existiert.
Offensichtlich, $span(A_n) \neq V$. In der Tat, sonst ist A_n eine (endliche) erzeugende Menge, was Voraussetzungen widerspricht.

Dann gibt es einen Vektor $v_{n+1} \in V$ mit $v_{n+1} \notin span(A_n)$. Wir zeigen, dass $A_{n+1} := A_n \cup \{v_{n+1}\} = \{v_1, ...v_{n+1}\}$ linearunabhängig ist.

Angenommen,

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_{n+1} v_{n+1} = \vec{0}. \qquad (*)$

Wir müssen zeigen, dass $\lambda_1 = ... = \lambda_{n+1} = 0$.

Fallunterscheidung. Ist $\lambda_{n+1} = 0$, so ist $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = \vec{0}$. Dann ist $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$, weil A_n lienarunabhängig ist. Also sind alle λ's gleich 0. **Fall 2.** Ist $\lambda_{n+1} \neq 0$, so können wir, ähnlich wie wir im Beweis von Satz 7 und Satz 8 gemacht haben, $(*)$ mit $-\frac{1}{\lambda_{n+1}}$ zu multiplizieren und v_{n+1} zu beiden Seiten der Gleichung zu addieren. Wir bekommen $v_{n+1} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}} v_1 - ... - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} v_n$. Dann ist v_{n+1} eine Linearkombination von Vektoren aus A_n, was unsere Wahl von v_{n+1} widerspricht. Also, $(*)$ impliziert dass alle λ's gleich 0 ist. Schließlich ist A_{n+1} linearunabhängig, was unseres Ziel war. $\square$

Dimension

Def. *Sei* $(V, +, \cdot)$ *ein endlich erzeugter Vektorraum. Dann heißt die Anzahl der Elemente in einer Basis die Dimension des Vektorraums* V.

Satz 9 *Die Dimension eines (endlich erzeugten) Vektorraums hängt nicht von der Wahl der Basis ab.*

D.h. besteht eine Basis aus n Vektoren, so besteht jede Basis aus n Vektoren.

Der Beweis von Satz 9 ist kompliziert. Wir werden zuerst zwei Hilfsaussagen beweisen: Das Austauschlemma von Steinitz (Lemma 8) und den Austauschsatz von Steinitz (Lemma 9).

Lemma 8 (Austauschlemma von Steinitz (1871–1928))
$B = \{v_1, ..., v_n\}$ sei eine Basis,
$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. Ist $\lambda_k \neq 0$, so ist
$B' := \{v_1, ..., v_{k-1}, w, v_{k+1}, ..., v_n\}$ auch eine Basis.

D.h. wir können (unter den Voraussetztungen in Lem. 8) das Element v_k gegen w austauschen und die Menge bleibt trotzdem eine Basis.

Bsp. Wir nehmen die Standard-Basis $\{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\}$ in $\mathbb{R}^2$ und den Vektor $\binom{2}{3}$. Wir haben
$\binom{2}{3} = 2 \cdot \binom{1}{0} + 3 \cdot \binom{0}{1}$.
Wir sehen, dass beide Koeffizienten ungleich 0 sind. Dann sind nach Lemma 8 die Mengen $\{\binom{2}{3}, \binom{0}{1}\}$ und $\{\binom{1}{0}, \binom{2}{3}\}$ Basen in $\mathbb{R}^2$.

Bsp. Wir nehmen wieder die Standard-Basis $\{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\}$ in $\mathbb{R}^2$ und den Vektor $\binom{2}{0}$. Wir haben
$\binom{2}{0} = 2 \cdot \binom{1}{0} + 0 \cdot \binom{0}{1}$.
Wir sehen, dass der zweite Koeffizienten ungleich 0 ist. Dann impliziert das Lemma 8 nicht, dass die Menge $\{\binom{1}{0}, \binom{2}{0}\}$ eine Basis in $\mathbb{R}^2$; und es ist tatsächlich so dass sie keine Basis ist, weil sie linear abhängig ist:
$1 \cdot \binom{1}{0} - 2 \cdot \binom{2}{0} = \vec{0}$. Die Menge $\{\binom{2}{0}, \binom{0}{1}\}$ ist jedoch eine Basis.

Beweis des Austauschlemmas

Lemma 8 (Austauschlemma von Steinitz (1871–1928)) *$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ sei eine Basis, $w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. Ist $\lambda_k \neq 0$, so ist $B' := \{v_1, \dots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ auch eine Basis.*

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $k = 1$, sonst umnummerieren. Also $\lambda_1 \neq 0$.
Z.z.: $B' := \{w, v_2, \dots, v_n\}$ ist eine Basis.
v_1 ist eine Linearkombination von $\{w, v_2, \dots, v_n\}$. Tatsächlich,

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n, \qquad (*)$$

wobei $\lambda_1 \neq 0$. Nach Multiplizieren mit $-\frac{1}{\lambda_1}$ und Addieren von $v_1 + \frac{1}{\lambda_1} w$ zu beiden Seiten der Gleichung bekommen wir

$$v_1 = \frac{1}{\lambda_1} w - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} v_3 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} v_n = \frac{1}{\lambda_1} w - \sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} v_i \qquad (**)$$

Wir zeigen: $\mathrm{span}(B') = V$. Sei $v \in V$. Dann gibt es $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ so dass

$$v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \mu_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i \overset{(**)}{=} \frac{\mu_1}{\lambda_1} w - \frac{\mu_1}{\lambda_1} \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i.$$

Also ist jedes v eine Linearkombination der Elemente aus B', d.h. $\mathrm{span}(B') = V$.

Wir zeigen: B' ist linear unabhängig. Z.z.: Aus der Gleichung

$$\vec{0} = \alpha w + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i$$

folgt, dass $\alpha = 0$ und alle $\alpha_i = 0$.
Wir setzen $(*)$ in diese Gleichung ein:

$$\vec{0} = \alpha w + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i \overset{(*)}{=} \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i = \alpha \lambda_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} (\alpha \lambda_i + \alpha_i) v_i$$

Da $\{v_1, \dots v_n\}$ linear unabhängig ist und $\lambda_1 \neq 0$, müssen alle Koeffizienten in dieser Linearkombination gleich 0 sein. Dann ist $\alpha = 0$ und alle $(\alpha \lambda_i + \alpha_i) = 0$. Dann sind auch alle $\alpha_i = 0$. $\square$

Lemma 9 (Austauschsatz von Steinitz) *Sei* $B = \{v_1, ..., v_n\}$ *eine Basis im Vektorraum* $(V, +, \cdot)$. *Sei* $A = \{w_1, ..., w_k\}$ *eine linear unabhängige Menge. Dann gilt*

(a) $k \leq n$ *und*

(b) *es gibt (paarweise verschiedene)* $i_1, ..., i_k \in \{1, ..., n\}$ *so dass der Austausch von allen* v_{i_j} *gegen* w_j *wieder eine Basis von* V *liefert*

Bsp. Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ und $B := \left\{ v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sei die Standardbasis. Wir betrachten die Menge $A := \left\{ w_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$. Die Menge ist linear unabhängig. (Wir haben vorher gezeigt, dass $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$ linear unabhängig ist.) Nach Lemma 9 kann man irgendwelche zwei Vektoren aus B gegen Vektoren aus A austauschen, sodass die Menge trotzdem eine Basis-Menge bleibt. In unserem Bsp. kann man $i_1 = 2, i_2 = 3$ wählen. Nach dem Austausch haben wir die Menge $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$, die auch eine Basis ist.

Bemerkung. Die „Nummern“ $i_1, i_2, ...$ sind nicht beliebig. Selbstverständlich kann man sie beliebig unstellen. Im Bsp. oben kann man z.B. $i_2 = 2$ und $i_1 = 3$ wählen. Im Bsp oben können wir aber nicht z.B. $i_1 = 1$, $i_2 = 2$ nehmen: Nach dem Austausch haben wir $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ und dies ist keine Basis: Den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ kann man nicht als Linearkombination von Vektoren aus B' erzeugen.

Wenn die Menge A einelementig ist, folgt der Austauschsatz aus dem Austauschlemma

$B = \{v_1, ..., v_n\}$ sei eine Basis, $A := \{w\}$ sei eine einelementige linear unabhängige Menge. Wie wir vorher in Vorlesung 5 bewiesen haben (im Bsp. nach der Definition der linearen Unabhängigkeit), ist $w \neq \vec{0}$.
Da B eine Basis ist, gibt es $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i. \qquad (*)$$

Da $w \neq \vec{0}$ und B linear unabhängig ist, ist die Linearkombination $(*)$ nichttrivial, also $\exists k \in \{1, ..., n\}$ mit $\lambda_k \neq 0$.
Wir sehen, dass alle Voraussetzungen des Austauschlemmas erfüllt sind.
Also kann man v_k gegen w austauschen (also $i_1 := k$), sodass die Menge $B' := \{v_1, ..., v_{k-1}, w, v_{k+1}, ..., v_n\}$ eine Basis ist.

Lemma 9 (Austauschsatz von Steinitz) *Sei* $B = \{v_1, ..., v_n\}$ *eine Basis im Vektorraum* $(V, +, \cdot)$*. Sei* $A = \{w_1, ..., w_k\}$ *eine linear unabhängige Menge. Dann gilt*

(a) $k \leq n$ *und*

(b) *es gibt (paarweise verschiedene)* $i_1, ..., i_k \in \{1, ..., n\}$ *so dass der Austausch von allen* v_{i_j} *gegen* w_j *wieder eine Basis von* V *liefert*

Induktionsbeweis über k.
I.A. Für $k = 0$ ist nichts zu zeigen.
I.V. Die Aussage ist für jede Teilmenge $A \subseteq V$ aus $k - 1$ Elementen gültig.

Induktionsschrit für (a)

I.S. Z.z.: Die Aussage ist auch für jede Teilmenge A aus k Elementen gültig.
Sei $\{w_1, ..., w_k\}$ linear unabhängig.
Wir zeigen zuerst (a): $k \leq n$. Nach I.V. ist $k - 1 \leq n$.
Widerspruchsbeweis. Angenommen, es wäre $k > n$. Dann ist $k - 1 \geq n$.
Da nach I.V. $k - 1 \leq n$, ist $k - 1 = n$. Da die Teilmenge $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$ linear unabhänging ist, gibt es nach I.V. (paarweise verschiedene) $i_1, ..., i_{k-1} \in \{1, ..., k - 1\}$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis von V liefert. Also ist $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$ eine Basis. Dann ist nach Satz 7(c) $A = \{w_1, ..., w_{k-1}, w_k\}$ linear abhängig. Nach Voraussetzungen ist aber A linear unabhängig. Widerspruch zeigt, dass $k \leq n$.

Induktionsschrit für (b)

Also $k \leq n$. Wir zeigen jetzt **(b)**: es gibt $i_1, i_2, ..., i_k$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. Betrachten wir die Menge $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$. Da sie linear unabhängig ist, gibt es nach I.V. (paarweise verschiedene) $i_1, i_2, ..., i_{k-1} \in \{1, ..., n\}$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $i_1 = 1, i_2 = 2, ..., i_{k-1} = k-1$, sonst umnumerieren. Also ist $A_{neu} := \{w_1, ..., w_{k-1}, v_k, ..., v_n\}$ eine Basis. Deswegen kann man w_k als Linearkombination darstellen:

$$w_k = \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i w_i + \sum_{i=k}^{n} \lambda_i v_i.$$

Einer der Koeffizienten λ_j ist nicht 0, da sonst $\vec{0} = -w_k + \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i w_i$ ist, was der linearen Unabhängigkeit von $\{w_1, ..., w_k\}$ widerspricht.

Also $\lambda_j \neq 0$. Nach dem Austauschlemma (Lemma 8) bekommen wir eine Basis, wenn wir den entsprechenden Vektor v_j gegen w_k austauchen. $\square$

Beweis von Satz 9

Satz 9 *Die Dimension eines (endlich erzeugten) Vektorraums hängt nicht von der Wahl der Basis ab.*

Beweis. Seien $\{v_1, ..., v_n\}$ und $\{w_1, ..., w_k\}$ Basen von $(V, +, \cdot)$. Z.z.: $k = n$.

$$\left\{\begin{array}{l}\{v_1, ..., v_n\} \text{ ist eine Basis} \\ \{w_1, ..., w_k\} \text{ ist linear unabhängig}\end{array}\right. \stackrel{\textit{Austauschsatz}(a)}{\Rightarrow} n \geq k.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\{w_1, ..., w_k\} \text{ ist eine Basis} \\ \{v_1, ..., v_n\} \text{ ist linear unabhängig}\end{array}\right. \stackrel{\textit{Austauschsatz}(a)}{\Rightarrow} k \geq n.$$

$\square$

Folgerung (a)

Es sei $\{v_1, ..., v_n\}$ eine linear unabhängige Teilmenge des Vektorraums $(V, +, \cdot)$ der Dimension n. Dann ist $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis.

Widerspruchsbeweis. Angenommen es gibt ein $w \in V$, $w \notin \mathrm{span}(\{v_1, ..., v_n\})$. Dann ist $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$ linear unabhängig. Tatsächlich, gilt für eine Linearkombination von (paarweise verschiedenen) Elementen aus $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$

$$\mu w + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \vec{0}, \qquad (*)$$

dann ist $\mu = 0$, da sonst $w = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu} v_i$.
Dann ist $(*)$ eine Linearkombination der Elemente aus $\{v_1, ..., v_n\}$ und deswegen trivial. Also ist $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$ linear unabhängig. Aber nach dem Austauschsatz muss die Anzahl der Elemente in $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\} \leq n$ sein. Widerspruch! $\square$

Anwendung: Wie Antwortet man auf die Frage „Ist eine explizit gegebene Teilmenge im $\mathbb{R}^n$ eine Basis?“

$\mathbb{R}^n$ ist n-dimensional, weil $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis ist. (Sie heißt Standardbasis von $\mathbb{R}^n$, wurde bereits erwähnt.)

Gegeben eine Teilmenge $A = \{v_1, \dots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$, wie kann mann verstehen ob diese Teilmenge eine Basis ist?

Falls $k \neq n$ ist, ist A keine Basis (Satz 9).

Angenommen $k = n$. Dann benutzt man Folgerung (a):

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = \vec{0}$$

ist ein System von n linearen Gleichungen für n Unbekannte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, welches man löst. Gibt es eine Lösung $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$, so ist A linear abhängig, also keine Basis. Gibt es genau eine Lösung $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$, so ist A linear unabhängig und nach Folgerung (a) eine Basis.

Um also zu prüfen, ob eine explizit gegebene Teilmenge eine Basis ist, genügent es, nur EIN lineares Gleichungssystem zu lösen, statt $n + 1$ wie in der letzten Vorlesung.

Bemerkung.

Das selbe gilt auch für alle Vektorräume mit bekannter Dimension – eine Basis ist eine linear unabhängige Teilmenge von V, so dass die Anzahl der Elemente gleich der Dimension von V ist (wobei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum ist).

Bsp. einer Anwendung

Frage *Ist die folgende Menge A eine Basis in* $\mathbb{R}^2$*?*

$A := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Antwort: Nein! Tatsächlich, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis im $\mathbb{R}^2$ (Standardbasis), also ist $\mathbb{R}^2$ zweidimensional, also (Satz 9) besteht jede Basis aus 2 Vektoren, was hier nicht der Fall ist.

Frage *Ist die folgende Menge A eine Basis im* $\mathbb{R}^2$*?*

$A := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

Antwort: Nein! Eine Basis im $\mathbb{R}^2$ besteht aus 2 Vektoren und A enthält 3.

Bsp. einer Anwendung

Frage *Ist die Teilmenge* $A := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ *eine Basis im* $\mathbb{R}^2$*?*

Ja! Tatsächlich, $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional. Wegen Folgerung (a) müssen wir nur zeigen, dass A linear unabhängig ist. D.h., dass nur die triviale Linearkombination gleich $\vec{0}$ ist. Die Linearkombination mit Koeffizienten λ, μ ist

$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda - \mu \end{pmatrix}$

Falls diese Linearkombination gleich $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist, muss

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases} \qquad +$$

Nach Addition der Gleichungen bekommen wir $2\lambda = 0$, also $\lambda = 0$. Nach einsetzen von $\lambda = 0$ in die erste Gleichung bekommen wir $\mu = 0$. Also ist diese Linearkombinaiton die triviale Linearkombination, d.h. A ist linear unabhängig.

Nach Folgerung (a) ist dann A eine Basis.

Folgerung (b) *Sei $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis im Vektorraum $(V, +, \cdot)$. Für $\{w_1, ..., w_n\}$ gelte: Jedes v_i ist eine Linearkombination von Elementen aus $\{w_1, ..., w_n\}$. Dann ist $\{w_1, ..., w_n\}$ eine Basis.*

Beweis. Wir zeigen: $\mathrm{span}\,(\{w_1, ..., w_n\}) = V$. D.h., jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination von Elementen w_i.
Da $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis ist, ist jedes v eine Linearkombination der Form
$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n$. $(*)$

Nach Voraussetzung ist jedes v_i eine Linearkombination der Elemente $w_1, ..., w_n$, d.h. $v_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} w_j$. Nach Einsetzen in $(*)$ bekommen wir

$$v = \lambda_1 \sum_{j=1}^{n} \mu_{1j} w_j + \lambda_2 \sum_{j=1}^{n} \mu_{2j} w_j + ... + \lambda_n \sum_{j=1}^{n} \mu_{nj} w_j = \sum_{i,\ j=1}^{n} \lambda_i \mu_{ij} w_j.$$

Also ist v eine Linearkombination der Elemente $w_1, ..., w_n$.
Z.z.: Die Menge $\{w_1, ..., w_n\}$ ist linear unabhängig. Angenommen sie ist nicht linear unabhängig. Wie wir eben bewiesen haben, ist $\mathrm{span}(\{w_1, ..., w_n\}) = V$. Dann kann man nach Satz 8 aus $\{w_1, ..., w_n\}$ eine Basis A' auswählen. Nach Satz 9 muss diese Teilmenge aus n Elementen bestehen, weil alle Basen die gleiche Anzahl von Elementen haben. Also ist $A' = \{w_1, ..., w_n\}$ und deswegen ist $\{w_1, ..., w_n\}$ eine Basis. $\square$

Folgerung (c) (Basisergänzungssatz) Sei $(V,+,\cdot)$ ein endlich erzeugter Vektorraum, sei $r = dim(V)$ und seien $\{w_1,\cdots,w_n\}$ linear unabhängig. Dann ist $n \leq r$ und existieren Vektoren $w_{n+1},\cdots w_r$, so dass $B = \{w_1,\cdots,w_n, w_{n+1},\cdots,w_r\}$ eine Basis von V ist.

Folgerung (c') (Basisergänzungssatz) Jede linear unabhängige Teilmenge eines endlich-dimensionalen Vektorraums $(V,+,\cdot)$ läßt sich zu einer Basis von V ergänzen.

Beweis: Sei $B = (v_1,\cdots,v_r)$ eine Basis von V. Dann gibt es nach dem Austauschsatz Vektoren $v_{i_1},...,v_{i_n}$, die gegen $w_1,...,w_n$ ausgetauscht werden können, so dass nach etwaigem Umnummerieren von Vektoren $B = (w_1,...,w_n,v_{n+1},...,v_r)$ eine Basis von V ist. $\square$

Folgerung (d) Untervektorraum U eines endlich erzeugten Vektorraums $(V, +, \cdot)$ ist auch endlich erzeugt. Ferner gilt: $dim(U) \leq dim(V)$.

Wiederschpuchsbeweis. Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum von $(V, +, \cdot)$. V sei $n-$dimensional mit der Basis $\{v_1, ... v_n\}$. Ist U nicht endlich erzeugt, dann existiert nach der Folgerung aus Satz 8 eine linearunabhängige Teilmenge $A = \{u_1, ..., u_{n+1}\} \subseteq U$ aus $n + 1$ Vektoren. Ist U endlich erzeugt und $dim(U) \geq n + 1$, dann existiert ebenfalls eine linearunabhängige Menge $A := \{u_1, ..., u_{n+1}\} \subseteq U$ aus $n + 1$ Vektoren – wir nehmen einfach die ersten $n + 1$ Vektoren einer Basis.

Nach Austauschsatz ist $n + 1 \leq n$, was falsch ist. Widerspruch! $\square$

Summe von Untervektorräumen

Def. *Seien* $(V, +, \cdot)$ *ein Vektorraum und* $E, F \subseteq V$ *Untervektorräume. Die Summe* $E + F$ *ist die Teilmenge von* V*, die aus allen möglichen Summen* $e + f$ *mit* $e \in E$ *und* $f \in F$ *besteht:*
$E + F := \{e + f \mid e \in E \text{ und } f \in F\} \subseteq V$*.*

Bsp. Sei $V = \mathbb{R}^2$, $E = \left\{ \binom{x}{0} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ und $F = \left\{ \binom{0}{y} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$. Dann ist $E + F = V$, weil man ein beliebiges Element $\binom{x}{y}$ bekommt als

$$\binom{x}{y} = \underbrace{\binom{x}{0}}_{e \in E} + \underbrace{\binom{0}{y}}_{f \in F}.$$

Satz 10 (Dimensionssatz) *Seien* E, F *Untervektorräume eines endlich erzeugten Vektorraums* $(V, +, \cdot)$*. Dann gilt:*
$E + F$ *ist ein Untervektorraum der Dimension*
$dim(E + F) = dim(E) + dim(F) - dim(E \cap F)$*.*

Beweis. Z.z.: (a) $E + F$ ist ein Untervektorraum.
(b) $E + F$ hat einer Basis aus $dim(E) + dim(F) - dim(E \cap F)$ Elementen.

Beweis (a) $E + F$ ist ein Untervektorraum

Z.z.: $\forall u_1, u_2 \in E + F$ ist $u_1 + u_2 \in E + F$.

Seien $u_1, u_2 \in E + F$, d.h. $u_1 = e_1 + f_1$ und $u_2 = e_2 + f_2$ für irgendwelche $e_i \in E, f_i \in F$. Dann gilt:

$$u_1 + u_2 = e_1 + f_1 + e_2 + f_2 = \underbrace{e_1 + e_2}_{\in E} + \underbrace{f_1 + f_2}_{\in F} \in E + F.$$

Abgeschlossenheit bzgl. „$\cdot$“ zeigt man analog.

Beweis (b): Konstruktion der Basis in $E + F$

Zunächst ist nach dem Satz 4 $E \cap F$ ein Untervektorraum. Nach dem Basisergänzugssatz (Folg. (c)) ist $E \cap F$ endlichdimensional. Es sei $\{a_1, ..., a_m\}$ eine Basis von $E \cap F$.
Diese lässt sich nach dem Basisergänzugssatz zu einer Basis $\{a_1, ..., a_m, e_1, ..., e_n\}$ von E und zu einer Basis $\{a_1, ..., a_m, f_1, ..., f_r\}$ von F erweitern. (Ist $dim(E \cap F) = 0$, dann lässt man die a's weg und setzt $m := 0$.)

Wir wollen jetzt zeigen, dass $B := \{a_1, ..., a_m, e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_r\}$ eine Basis von $E + F$ ist. (Offensichtlich besteht B aus $m + n + r = (m + n) + (m + r) - m = dim(E) + dim(F) - dim(E \cap F)$ Elementen.)
Nach Definition lässt sich jeder Vektor $v \in E + F$ in der Form $v = e + f$ mit $e \in E$ und $f \in F$ darstellen. Diese Darstellung wird im Allgemeinen nicht eindeutig sein, aber jedenfalls lässt sich e als Linearkombination der $\{a_1, ..., a_m, e_1, ..., e_n\}$ und f als Linearkombination der $\{a_1, ..., a_m, f_1, ..., f_r\}$ darstellen. Damit ist v Linearkombination der Vektoren aus B, also $span(B) \supseteq E + F$. Da $B \subseteq E + F$, und $E + F$ ein Untervektorraum ist, ist $span(B) \subseteq E + F$, also $span(B) = E + F$.

Lineare Unabhängigkeit von B

Wir müssen noch nachweisen, dass B linear unabhängig ist. Es sei dazu
$\vec{0} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i + \sum_{i=1}^{r} \nu_i f_i.$ $\qquad (*)$
Dann gilt (wir addieren $-\sum_{i=1}^{r} \nu_i f_i$ zu beiden Seiten):

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i}_{\in E,\text{weil } a_i,\, e_i \in E} = \underbrace{\sum_{i=1}^{r} -\nu_i f_i}_{\in F,\text{weil } f_i \in F} := v.$$

Also liegt der Vektor v in E und in F und deswegen in $E \cap F$. Dann kann man v als Linearkombination der a_i darstellen: $v = \sum_{i=1}^{m} \eta_i a_i$.
Wir wissen aber nach Satz 7(b), dass die Darstellung eines Elements als Linearkombination von paarweise verschiedenen Basisvektoren eindeutig ist. Für den Vektor v haben wir die folgenden Darstellungen:
$v = \sum_{i=1}^{m} \eta_i a_i$ und $v = \sum_{i=1}^{r} -\nu_i f_i$. Also alle $\nu_i = 0$.
Analog, für den Vektor v haben wir die folgende Darstellungen:
$v = \sum_{i=1}^{m} \eta_i a_i$ und $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$. Also alle $\mu_i = 0$.
Da $\mu_i = \nu_i = 0$, ist $(*)$ äquivalent zu $\vec{0} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$. Da $\{a_1, ..., a_m\}$ eine Basis in $E \cap F$ ist, sind alle λ_i ebenfalls gleich 0.
Wir haben also bewiesen, dass eine Linearkombination von Elementen aus B genau dann $\vec{0}$ ergibt, wenn sie trivial ist. D.h. wir haben bewiesen, dass die Menge B linear unabhängig ist. $\square$

Koordinaten in einer Basis

Def. *$B := (v_1, ..., v_n)$ sei ein Basis-Tupel im Vektorraum $(V, +, \cdot)$, $w \in V$. Der Koordinatenvektor des Vektors w in dieser Basis ist das n-Tupel von Skalaren* $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ *so dass $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = w$.*

(Die Skalare heißen dann die Koordinaten.)

Bemerkung Nach der Definition von Basis gibt es solche Skalare λ_i (weil $span(v_1, ..., v_n) = V$ ist, also jedes Element von V eine Linearkombination der $v_1, ..., v_n$ ist). Nach Satz 7(b) sind die Zahlen λ_i eindeutig.

Def— Fortsetzung Die Abbildung $C_B : V \to \mathbb{R}^n$,

$C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ heißt die Koordinatenabbildung.

Bsp. Betrachte $\mathbb{R}^2$ mit der Standardbasis. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Dann ist der Koordinatenvektor eines Vektors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ das Paar $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, weil

$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Bemerkung

In der Definition einer Basis haben wir Basis-Menge und Basis-Tupel (also, „geordnete“ Menge) definiert und das Wort Basis für beide Objekte verwendet. Hier ist die erste Stelle, wo wir tatsächlich Basen als Tupel verstehen sollen: Falls wir die Vektoren in einem Basis-Tupel umordnen, werden die entsprechende Koordinaten entsprechend umgeordnet.

Bsp. Betrachte $\mathbb{R}^2$ mit der umgeordneten Standardbasis:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Dann sind die Koordinaten eines Vektors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ das Paar $\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$, weil

$$y\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1} + x\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Bsp. Man betrachte die Basis

$$A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Welche Koordinaten hat der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in dieser Basis?

Antwort: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, weil $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Wie findet man die Koordinaten eines Vektors in einer Basis (z.B. im $\mathbb{R}^n$)?

Z.B. nach Definition:
Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis im $\mathbb{R}^n$, u sei ein Vektor. Alle Vektoren $v_1, ..., v_n$, u seien explizit gegeben:

$$v_1 := \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix}, ..., v_n := \begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \\ \vdots \\ v_n^n \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix},$$

wobei alle v_i^j explizit gegebene Zahlen sind.
Nach Definition sind die Koordinaten des Vektors u die Zahlen $\lambda_1, ..., \lambda_n$ so dass $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = u$:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix} + ... + \lambda_n \begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \\ \vdots \\ v_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \\ \vdots \\ v_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}$$

Und das ist das System

$$\begin{cases} \lambda_1 v_1^1 + \ldots + \lambda_n v_n^1 & = & u^1 \\ \lambda_1 v_1^2 + \ldots + \lambda_n v_n^2 & = & u^2 \\ & \vdots & \\ \lambda_1 v_1^n + \ldots + \lambda_n v_n^n & = & u^n \end{cases}$$

von n Gleichungen für die Unbekannten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. (Die v_i^j und u^j sind gegeben.) Die Lösung existiert, ist eindeutig (Satz 7(b)) und ergibt die Koordinten des Vektors u in der Basis $(v_1, \ldots, v_n)$.

Aufgabe: Finde die Koordinaten des Vektors $u := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ in der Basis

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Koordinaten sind die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ so dass

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nach der Vektoraddition bekommen wir

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das ist ein System von drei Gleichungen:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 2 & & Eq_1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 & = & -2 & & Eq_2 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & 2 & & Eq_3 \end{cases}$$

Wir lösen das System.

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 2 & & Eq_1 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 & = & -4 & & Eq_2 - Eq_1 \\ \lambda_2 - \lambda_3 & = & -2 & & Eq_3 - 2Eq_1 \end{cases}$$

Die letzte Gleichungen minus die vorletzte gibt $2\lambda_3 = 2$, also $\lambda_3 = 1$. Nach Einsetzen von $\lambda_3 = 1$ in die letzte Gleichung bekommen wir $\lambda_2 - 1 = -2$, also $\lambda_2 = -1$. Nach Einsetzen von $\lambda_3 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ in die erste Gleichung bekommen wir $\lambda_1 - 1 + 2 = 2$, also $\lambda_1 = 1$.

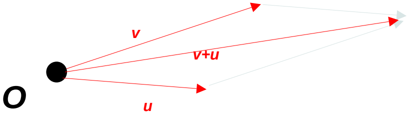
Antwort: Vektor $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat Koordinaten $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in der Basis

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

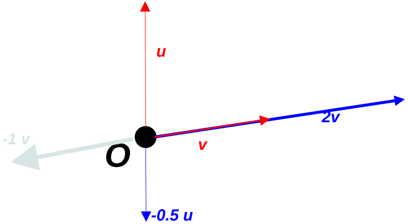
Basis in der (geometrischen) Ebene

Wiederholung: Sei E eine Ebene, $O \in E$ und V die Menge $V := \{\text{gerichtete Strecken mit Anfangspunkt } O \text{ und Endpunkt auf } E\}$.

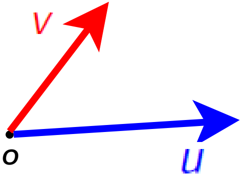
Addition von Vektoren: Parallelogrammregel.



Multiplikation $\cdot$ von Skalaren $\in \mathbb{R}$ und Vektoren: Streckungen/Stauchungen.

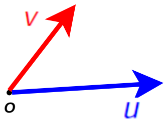


Behauptung: V **ist zweidimensional. Zwei beliebige Vektoren** $u, v \in V$ **mit** $u \neq \vec{0} \neq v$ **und** $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \lambda u \neq v$ **bilden eine Basis**



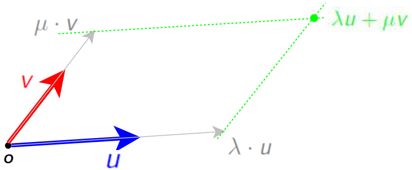
Beweis der Behauptung.

Wir betrachten zwei Vektoren u, v mit $u \neq \vec{0} \neq v$ und $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \lambda u \neq v$. Wir müssen zeigen:



(a) $\{u, v\}$ ist linear unabhängig, d.h. $\lambda u + \mu v = \vec{0} \iff \lambda = 0 = \mu$
(b) $\{u, v\}$ ist erzeugend, d.h. jeden Vektor $w \in V$ kann man als Linearkombination $\lambda u + \mu v$ von u und v bekommen.
(mit Quantoren ausgedrückt: $\forall w \in V\ \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sodass $\lambda u + \mu v = w$).

Beweis (a) Wenn $\lambda \neq 0 \neq \mu$ ist, ist der Endpunkt des Vektors $\lambda u + \mu v$ nach Definition der den Punkt O gegenüberliegenden Punkt des Parallelograms auf dem Bild – die Seiten sind $\lambda \cdot u$ und $\mu \cdot v$.
Offensichtlich ist der Punkt nicht O, also wenn $\lambda \neq 0 \neq \mu$, ist $\lambda u + \mu v \neq \vec{0}$, wie behauptet.

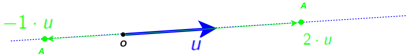


Wenn $\lambda \neq 0$ und $\mu = 0$ ist, ist der Vektor $\lambda u + \mu v = \lambda u$, und ist auch nicht $\vec{0}$ (nach Lemma 5). Der Fall $\lambda = 0$ und $\mu \neq 0$ ist ähnlich.

Beweis (b)

Z.z.: Ein beliebiger Vektor $w = \overrightarrow{OA}$ (mit Endpunkt A) ist Linearkombination von u, v.

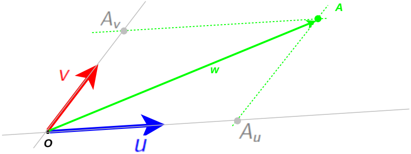
Fall 1. Wenn A auf der Gerade liegt, die durch O und Endpunkt von u geht, ist $w = \lambda u$ mit $\lambda = \pm \frac{\text{Länge von } w}{\text{Länge von } u}$.



Fall 2 — wenn A auf der Gerade liegt, die durch O und Endpunkt von v geht – analog.

Fall 3. A (=Endpunkt von w) liege jetzt weder auf der Gerade durch O und den Endpunkt von u, noch auf der der Gerade durch O und den Endpunkt von v.

Wir betrachten die Geraden durch A, die zu u und v parallel sind. Sie schneiden die Gerade durch O und den Endpunkt von u und die Gerade durch O und den Endpunkt von v. Die Schnittpunkte bezeichnen wir mit A_u und A_v .



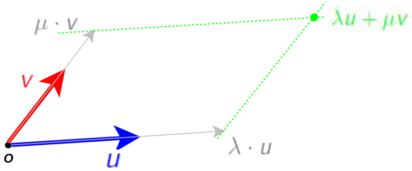
Die Vektoren $\overrightarrow{OA_u}$ und $\overrightarrow{OA_v}$ sind proportional zu u bzw. v. Also ist $\overrightarrow{OA_u} = \lambda u$ und $\overrightarrow{OA_v} = \mu v$ für irgendwelche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann ist $w = \lambda u + \mu v$, also auch in Fall 3 haben wir einen beliebigen Vektor w als Linearkombination von u und v erzeugt.

Bemerkung. Man kann λ und μ berechnen wie im Fall 1.

In der Tat, $|\lambda| := \frac{\text{Länge von } OA_u}{\text{Länge von } u}$ und das Vorzeichen von λ ist „+“, wenn A_u und der Endpunkt von u auf der gleichen Seite von O liegen, und sonst „−“. Analog, $|\mu| := \frac{\text{Länge von } OA_v}{\text{Länge von } v}$ und das Vorzeichen von μ ist „+“, wenn A_v und der Endpunkt von v auf der gleichen Seite von O liegen und sonst „−“.

Koordinaten eines Vektors w auf der Ebene (geometrisches Beispiel)

Wir betrachten die Basis (u, v) auf der geometrischen Ebene.
Nach Definition sind die Koordinaten die Zahlen λ, μ sodass $w = \lambda u + \mu v$:



Wir betrachten die Punkte A_u, A_v wie vorher. Dann gilt $\lambda := \pm \frac{\text{Länge von } OA_u}{\text{Länge von } u}$ und $\mu := \pm \frac{\text{Länge von } OA_v}{\text{Länge von } v}$, wobei das Vorzeichen davon abhängt, auf welcher Seite von O die Punkte A_u und Endpunkt von u bzw. die Punkte A_v und der Endpunkt von v liegen.