Lineare Abbildungen

Def. *Es seien* $(V_1, +, \cdot)$ *und* $(V_2, +, \cdot)$ *zwei Vektorräume. Eine Abbildung* $f : V_1 \to V_2$ *heißt linear, falls für alle Vektoren* $u, v \in V_1$ *und für jedes* $\lambda \in \mathbb{R}$ *gilt:*

- $f(u + v) = f(u) + f(v)$,
- $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Bsp. Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist linear, weil $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}\right) =$
$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right),$

$$f\left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

Bsp. Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist die Streckung $f : V \to V$, $f(v) := \alpha \cdot v$ linear.
Tatsächlich,

$$f(v_1 + v_2) = \alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2 = f(v_1) + f(v_2),$$

$$f(\lambda v_1) = \alpha(\lambda v_1) = (\alpha\lambda)v_1 = (\lambda\alpha)v_1 = \lambda(\alpha v_1) = \lambda f(v_1).$$

Bsp. Ist die Abbildung $f : V_1 \to V_2$, $f(v) := \vec{0}$ eine lineare Abbildung?
Ja! Weil $f(v_1) + f(v_2) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ und $f(\lambda v_1) = \vec{0} = \lambda\vec{0} = \lambda f(v_1)$.
(Falls $V_1 = V_2 = V$ ist, ist f auch die Abbildung aus dem „Streckungs"-Bsp. vorher, mit $\alpha = 0$.)

Bitte üben: zeigen Sie, dass die folgende Abbildung linear ist

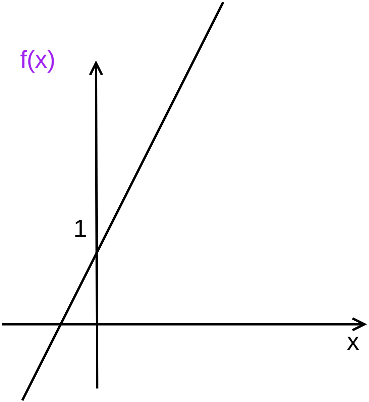
Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}.$$

Diese Abbildung ist linear:

Bitte üben.

Frage. Ist die folgende Abbildung linear?
$f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1, \quad f(x) = (2x + 1).$



(0) (1)

$(2 \cdot 0 + 1)$ $(2 \cdot 1 + 1)$

Lemma 10 $(v_1, ..., v_n)$ *sei eine Basis in* $(V, +, \cdot)$. *Wir betrachten die Koordinatenabbildung* $C : V \to \mathbb{R}^n$, *die den Vektor* v *auf seinen Koordinatenvektor* $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *abbildet. Dann gilt: die Abbildung* C *ist linear.*

Beweis. Z.z.: Für beliebigen Vektoren u, $w \in V$ mit Koordianten $C(u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $C(w) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ gilt:

(a) Der Koordinatenvektor des Vektors $u + w$ ist $\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$,

(b) für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ist der Koordinatenvektor des Vektors λu der Vektor $\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$

Der Vektor u hat die Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} u = \sum_{i=1}^n x_i v_i$.

Der Vektor w hat die Koordinaten $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} w = \sum_{i=1}^n y_i v_i$.

Dann sind $u + w$ und λu

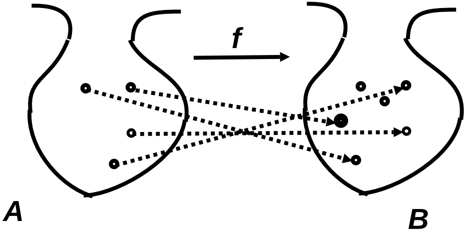
$$u + w = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i + \sum_{i=1}^{n} y_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) v_i. \Longleftrightarrow C(u + w) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda u = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i v_i \Longleftrightarrow C(\lambda u) = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

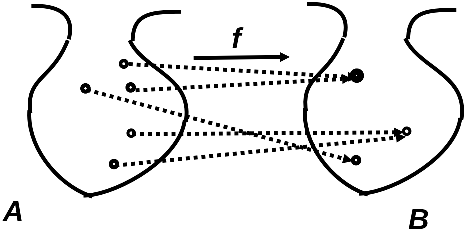
$\square$

Exkurs in die Mengenlehre: Surjektion, Injektion und Bijektion

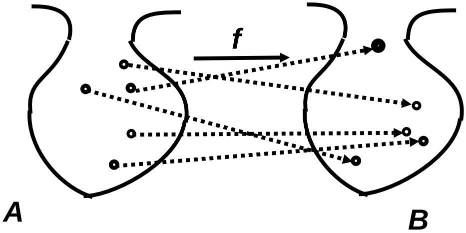
Es seien A, B zwei Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung:
Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt Injektion (oder eine injektive Abbildung), falls für jedes $x \neq y \in A$ gilt: $f(x) \neq f(y)$.
(Oder: $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$).



Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt Surjektion (oder eine surjektive Abbildung), falls für jedes $x \in B$ mind. ein $y \in A$ existiert, so dass $f(y) = x$.
(Oder: $Bild_f := \{b \in B \text{ s.d. } \exists a \in A \text{ mit } f(a) = b\} = B$)



Bijektion



Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt Bijektion (oder eine bijektive Abbildung), falls sie eine Injektion und eine Surjektion ist.

Die drei Bilder zusammen

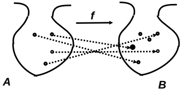


Abbildung : Injektion (Abbildung in)

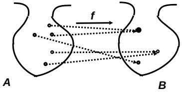


Abbildung : Surjektion (Abbildung auf)

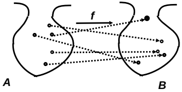


Abbildung : Bijektion = Surjektion und Injektion

Wichtige Bezeichnung von der vorherigen Folien:

$$Bild_f := \{b \in B \text{ s.d. } \exists a \in A \text{ mit } f(a) = b\}$$

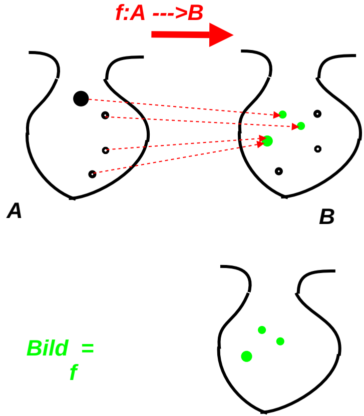


Abbildung : **Bsp:** $Bild_f$

Def. Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung, wobei $(V, +, \cdot)$ und $(U, +, \cdot)$ Vektorräume sind. Der Kern von f ist die Menge
$Kern_f := Urbild_f(\{\vec{0}\}) := \{v \in V \mid f(v) = \vec{0}\}$

Lemma 11 *$f : V \to U$ sei eine lineare Abbildung. Dann gilt:*

(a) $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

(b) $\forall v \in V$ *gilt* $f(-v) = -f(v)$

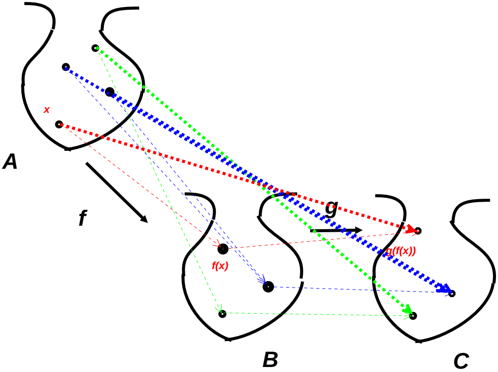
(c) $Kern_f = \{\vec{0}\} \iff f$ *injektiv.*

Beweis.
(a) $f(\vec{0}) = f(0v) \overset{\text{Def.}}{=} 0 \cdot f(v) = \vec{0}$.
(b) $f(-v) = f((-1) \cdot v) = (-1) \cdot f(v) = -f(v)$
(c) $\Longrightarrow$ Sei $Kern_f = \{\vec{0}\}$. Z.z.: f ist injektiv, d.h.
$f(v_1) = f(v_2) \Longrightarrow v_1 = v_2$.
$f(v_1) = f(v_2) \iff f(v_1) - f(v_2) = \vec{0} \iff f(v_1 - v_2) = \vec{0}$.
Da $Kern_f = \{\vec{0}\}$, gibt es nur einen Vektor, der auf $\vec{0}$ abgebildet wird, nämlich $\vec{0}$. Dann ist $v_1 - v_2 = \vec{0}$, also $v_1 = v_2$.
(c) $\Longleftarrow$ Sei f injektiv. Dann folgt aus $f(u) = f(v)$, dass $u = v$. Wir setzen $u := \vec{0}$.Wir erhalten, dass aus $\underbrace{f(\vec{0})}_{=\vec{0} \text{ nach (a)}} = f(v)$ folgt, dass $v = \vec{0}$.

Also $Kern_f := \{v \in V \mid f(v) = \vec{0}\} = \{\vec{0}\}$. □

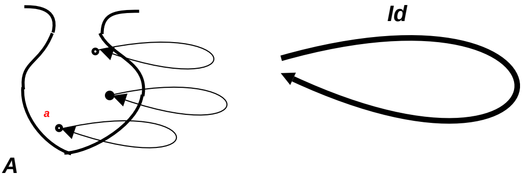
Verkettung von Abbildungen

A, B, C seien die Mengen, $f : A \to B$, $g : B \to C$ seien Abbildungen.
Die Verkettung (Komposition, Superposition, Hintereinanderausführung) von Abildungen g und f ist die Abbildung $g \circ f : A \to C$,
$g \circ f(x) := g(f(x))$.
Bsp: $A = B = C = \mathbb{R}$, $f(x) := x^3$, $g(x) := \cos(x)$. Dann ist die Verkettung $g \circ f(x) = \cos(x^3)$.



Inverse Abbildung

Bezeichnung: Für jede Menge A definieren wir $Id_A : A \to A$, $Id(a) = a$ $(\forall a \in A)$.



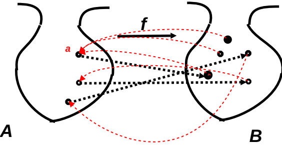
Wicht. Bsp: $\forall\ f : A \to B$ gilt:
$f \circ Id_A = f$ (weil $\forall a \in A\ f \circ Id_A(a) = f(Id_A(a)) = f(a)$)
$Id_B \circ f = f$ (weil $\forall a \in A\ Id_B \circ f(a) = Id_B(f((a))) = f(a)$)

Def. *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \to A$ heißt eine links- (bzw. rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Lemma 12 *$f : A \to B$ sei eine Abbildung und $A \neq \varnothing$. Dann gilt:*

1. *f ist injektiv $\iff$ f hat eine Linksinverse.*
2. *f ist surjektiv $\iff$ f hat eine Rechtsinverse.*

Beweis:



(1) $\Rightarrow$: f sei als injektiv vorausgesetzt. Sei $a \in A$. Die gesuchte linksinverse Abbildung $g : B \to A$ wird nun definiert durch $g(y) := x$, falls y in der Bildmenge von f liegt, und $f(x) = y$ ist (da Es f injektiv ist, ergibt sich x eindeutig aus y) und $g(y) := a$, falls y nicht in der Bildmenge von f liegt.

gilt: $g \circ f(x) \overset{Def.}{=} g(f(x)) \overset{y:=f(x)}{=} g(y) \overset{g(y)=x}{=} x = Id_A(x)$.

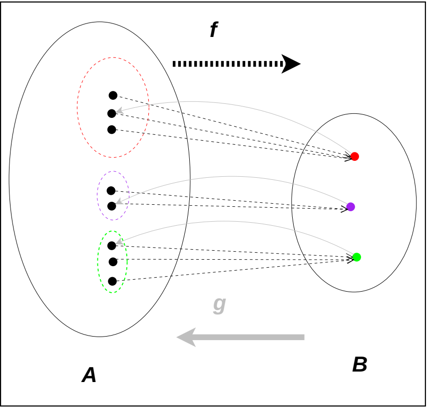
Bemerkung Die Linksinverse ist nicht immer eindeutig – das Element a können wir beliebig auswählen.

Beweis (1) $\Leftarrow$:

Es gelte $g \circ f = \mathrm{Id}_A$. Nun seien $x, y \in A$ mit $f(x) = f(y)$ gegeben. Wir müssen $x = y$ zeigen. Dazu wird g auf die Gleichung $f(x) = f(y)$ angewendet, was $g(f(x)) = g(f(y))$ ergibt. Mit der Eigenschaft der Linksinversen haben wir $\mathrm{Id}_A(x) = \mathrm{Id}_A(y)$, also $x = y$.

Beweis (2): f ist surjektiv $\iff$ f hat eine Rechtsinverse.

$\Longrightarrow$: $f : A \to B$ werde als surjektiv vorausgesetzt. Für jedes Element $y \in B$ gibt es also mindestens ein $x \in A$ mit $f(x) = y$.



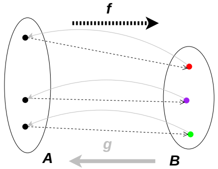
$g\colon B \to A$ sei eine Abbildung, die jedem $y \in B$ ein Urbild zuweist. Dann gilt für jedes $y \in B$:
$f \circ g(y) = f(g(y)) = f(x) = y = \mathrm{Id}_B(y)$.

$\Longleftarrow$: Es gelte $f \circ g = \mathrm{Id}_B$. Nun sei $y \in B$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass $y \in Bild_f$ ist, also ein $x \in A$ mit $f(x) = y$ angeben.
Die Festlegung $x := g(y)$ leistet das Verlangte, denn
$f(x) = f(g(y)) = f \circ g(y) = \mathrm{Id}_B(y) = y$. $\square$

Lemma 13 *Sei $f : A \to B$. Dann gilt:*

$$f \text{ ist Bijektion} \iff \begin{array}{l} \exists g : B \to A \\ \text{s.d. } g \circ f = Id_A \text{ und } f \circ g = Id_B. \end{array}$$

Ferner gilt: Solches g ist eindeutig



Beweis: „$\Longleftarrow$“: Nach Lemma 12 ist f injektiv und surjektiv, also bijektiv.

„$\Longrightarrow$“: Zuerst **Existenz**. f sei surjektiv und injektiv. Nach Lemma 12 $\exists g_1$ und g_2 mit $g_1 \circ f = Id_A$, $f \circ g_2 = Id_B$. Z.z.: $g_1 = g_2$.

Für beliebiges $b \in B$ gilt:

$$g_1(b) = g_1(Id_B(b)) = g_1(f(g_2(b))) = g_1(f(g_2(b))) = Id_A(g_2(b)) = g_2(b). \quad (*)$$

Also $\forall b \in B$ gilt $g_1(b) = g_2(b)$, also $g_1 = g_2$.
Dann hat $g := g_1 = g_2$ die Eigenschaft $g \circ f = Id_A$ und $f \circ g = Id_B$.

Eindeutigkeit: Angenommen, zwei Abbildungen g_1 und g_2 haben die gewünschte Eigenschaft: $g_i \circ f = Id_A$, $f \circ g_i = Id_B$ $(i = 1, 2)$. Dann ist g_1 eine Linksinverse (also $g_1 \circ f = Id_A$) und g_2 eine Rechtsinverse ($f \circ g_2 = Id_B$), weil beide sowohl Links- als auch Rechtsinverse sind. Wie wir in $(*)$ gezeigt haben, ist dann $g_1 = g_2$. $\square$

Bezeichnung. *Ein solches g werden wir mit f^{-1} bezeichnen und die Inverse nennen.*

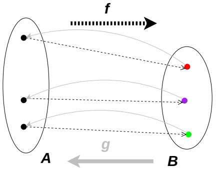
Definition eines Isomorphismus

Seien $(V, +, \cdot)$ und $(U, +, \cdot)$ Vektorräume. Eine bijektive lineare Abbildung $f : V \to U$ heißt ein Isomorphismus. Wenn ein Isomorphismus $f : V \to U$ existiert, dann heißen die Räume V und U isomorph.

Wiederholung – Lemma 13 *Sei $f : A \to B$. Dann gilt:*

$$f \text{ ist Bijektion} \iff \begin{array}{l} \exists g : B \to A \\ \text{s.d. } g \circ f = Id_A \text{ und } f \circ g = Id_B. \end{array}$$

Ferner gilt: Solches g ist eindeutig



Sei $f : V \to U$ ein Isomorphismus. Dann ist f bijektiv, also existiert f^{-1}. Ist sie auch ein Isomoprhimus? – Ja, siehe Lemma 14

Die Inverse Abbildung zu einem Isomorphismus ist ebenfalls ein Isomorphismus

Lemma 14. Sei $f : V \to U$ ein Isomorphismus. Dann ist $f^{-1} : U \to V$ auch ein Isomorphismus.

Bemerkung. Die Existenz von f^{-1} folgt aus Lemma 13, weil ein Isomorphismus nach Definition bijektiv ist.

Beweis. Z.z.: f^{-1} ist (a) linear, (b) bijektiv.
(a) Additivität:

$$\begin{aligned}
f^{-1}(u+v) &= f^{-1}\left(f \circ f^{-1}(u) + f \circ f^{-1}(v)\right) && \text{weil } f \circ f^{-1} = Id_U \\
&= f^{-1}\left(f\left(f^{-1}(u) + f^{-1}(v)\right)\right) && \text{weil } f \text{ linear ist} \\
&= f^{-1} \circ f\left(f^{-1}(u) + f^{-1}(v)\right) && \text{Definition von „}\circ\text{“} \\
&= f^{-1}(u) + f^{-1}(v) && \text{weil } f^{-1} \circ f = Id_V
\end{aligned}$$

Abg. bzgl. Multiplikation zeigt man analog.
(b) Bijektivität. Da $f \circ f^{-1} = Id_U$, hat f^{-1} eine Linksinverse. Da $f^{-1} \circ f = Id_V$, hat f^{-1} auch eine Rechtsinverse. Dann ist f^{-1} eine Bijektion nach Lemma 13. □

Wiederholung: lineare Abbildungen

Def. *Es seien* $(V, +, \cdot)$ *und* $(U, +, \cdot)$ *zwei Vektorräume. Eine Abbildung* $f : V \to U$ *heißt linear, falls für alle Vektoren* $v_1, v_2 \in V$ *und für jedes* $\lambda \in \mathbb{R}$ *gilt:*

(a) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$,

(b) $f(\lambda\, v_1) = \lambda f(v_1)$.

Übung. *Sei* $f : V \to U$ *linear. Dann gilt:*
$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)$.

In der Tat,

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \overset{(a)}{=} f(\lambda_1 v_1) + f(\lambda_2 v_2) \overset{(b)}{=} \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2).$$

Übung. *Sei* $f : V \to U$ *linear. Dann gilt:*
$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \lambda_3 f(v_3)$.

In der Tat, $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3) \overset{(a)}{=} f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) + f(\lambda_3 v_3) \overset{(a)}{=}$
$f(\lambda_1 v_1) + f(\lambda_2 v_2) + f(\lambda_3 v_3) \overset{(b)}{=} \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \lambda_3 f(v_3)$.

Analog. Es gilt: $f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_n f(v_n)$
(mehrmals das Trick anwenden)

Definition von Isomorphismus noch einmal

Def $(V, +, \cdot)$, $(U, +, \cdot)$ *seien Vektorräume. Eine lineare Abbildung* $f : V \to U$ *heißt*

Monomorphismus	*falls injektiv*	
Epimorphismus	*falls surjektiv*	
Isomorphismus	*falls bijektiv*	$\longleftarrow$ *heute benutzen*
Endomorphismus	*falls* $V = U$	$\longleftarrow$ *heute besprochen*

Die Vektorräume V *und* U *heißen Isomorph, falls ein Isomorphismus* $f : V \to U$ *existiert.*

Logic des Abschnitts „Vektorraum“: synthetische Aufbau

- Definition — in Vorl. 3 gegeben — durch Eingenschaften (= „Axiomen“)
- Einige Eigenschaften, die man aus Axiomen durch logischen Schlussfolgerungen bekommt — alle Vorlesungen bis jetzt — und eine grosse Familie von Beispiele $\mathbb{R}^n$ – in Vorl. 3, 4 eingeführt
- Eine Aussage, dass alle Vektorräumen den Vektorräumen aus der Familie von Beispiele „gleich sind“

Frage: Was soll man hier unter „gleich sind“ verstehen?

Antwort: Isomorph.

Haupsatz der linearen Algebra

Satz 11(Hauptsatz der linearen Algebra) *Zwei endlichdimensionalen Vektorräume sind genau dann isomorph, wenn sie gleiche Dimension haben.*

Satz 11'(Hauptsatz der linearen Algebra) – einfachere Version *Jeder Vektorraum der Dimension n ist zu $\mathbb{R}^n$ isomorph.*
Bemerkung. Die Satze 11, 11' sind äquivalent. Die Richtung Satz 11 $\Longrightarrow$ Satz 11' ist einfach: weil $dim(\mathbb{R}^n) = n$, ist nach Satz 11 ein Vektorraum der Dimension n zu $\mathbb{R}^n$ isomorph. Die (andere) Richtung „$\Longleftarrow$“ ist ein bisschen aufwendige; wir werden sie später beweisen.

Beweis $\Longrightarrow$ (für Satz 11 und Satz 11')

Z.z.: Sind V und U Isomorph, so ist $dim(U) = dim(V)$. Sei $f : V \to U$ ein Isomorphismus. Sei $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis in V. Wir zeigen, dass die $n-$elementige Menge $\{f(v_1), ..., f(v_n)\} \subseteq U$ eine Basis in $Bild_f \subseteq U$ ist, d.h., es ist linearunabhängig und erzeugend.

Bemerkung. Da ein Isomorphismus nach der Definition injektiv ist, sind die Vektoren $f(v_1), ..., f(v_n)$ verschieden; die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ ist deswegen tatsächlich $n-$elementig.

Linearunabhängigkeit: Sei $\lambda_1 \cdot f(v_1) + ... + \lambda_n \cdot f(v_n) = \vec{0}$. Um Linearunabhängigkeit von $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ zu zeigen, müssen wir zeigen, dass alle λ's gleich 0 sind.

Da f linear ist, ist $\lambda_1 \cdot f(v_1) + ... + \lambda_n \cdot f(v_n) = f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n)$; also $f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) = \vec{0}$.

Da f ein Isomorphismus ist, ist f injektiv, deswegen ist $\mathrm{Kern}_f \stackrel{\text{Lemma 11}}{=} \{\vec{0}\}$, deswegen aus $f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) = \vec{0}$ folgt $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = \vec{0}$ (weil $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n \in \mathrm{Kern}_f$ und $\mathrm{Kern}_f = \{\vec{0}\}$ ist).

Da $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis ist, ist sie linearunabhängig. Dann aus $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = \vec{0}$ folgt $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$, was unseres Ziel war.

$\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ ist erzeugend:

Z.z.: jedes $u \in U$ kann man als Linearkombination von $f(v_1), ..., f(v_n)$ bekommen.

Da die Abbildung f surjektiv ist, ist jeder Vektor von U das Bild eines Vektors aus V, also $\exists v \in V$ mit $f(v) = u$. Da $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis ist, kann man ein beliebiges Element von V als Linearkombination von $\{v_1, ..., v_n\}$ bekommen, also $\exists \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = v$.

Dann gilt:
$u = f(v) = f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) \overset{\text{Linearität}}{=} \lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_n f(v_n)$.
Also, u ist tatsächlich Linearkombination von Elementen aus $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$, $\square$

Da der Satz 11 (oder 11') sehr wichtig ist, werde ich separat die Satze 11, 11' in der Richtung „$\Longleftarrow$“ beweisen. Ich werde zuerst Satz 11' beweisen, d.h., ich werde zeigen, dass jeder $(V, +, \cdot)$ von Dimension n zu $\mathbb{R}^n$ isomorph ist.

Beweis von Satz 11' in der Richtung „$\Longleftarrow$". Wir mussen beweisen dass, jeder Vektorraum $(V,+,\cdot)$ der Dimension n zu $\mathbb{R}^n$ isomorph ist. $(V,+,\cdot)$ sei $n-$Dimensional, sei $B=(v_1,...,v_n)$ ein Basis-Tupel in $(V,+,\cdot)$. Wir betrachten die Koordinatenabbildung $C_B:V\to\mathbb{R}^n$. Nach Definition von Koordinatenabbildung gilt: $C_B(\lambda_1 v_1+...+\lambda_n v_n):=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$. Wir zeigen, dass C_B ein Isomorphismus ist, d.h., C_B linear, injektiv und surjektiv ist.

- Linearität: Lemma 10. (Sagt, dass die Koordinatenabbildung linear ist)
- Injektivität: Nach Lemma 11c genugend es zu zeigen, dass $Kern_{C_B}=\{\vec{0}\}$.
  D.h., wir mussen zeigen, dass $C_B(v)=\vec{0} \implies v=\vec{0}$.
  D.h., wir mussen zeigen, dass $0\cdot v_1+\cdots+0\cdot v_n=\vec{0}$, was offensichtlich ist.
- Surjektivität: Wir mussen zeigen, dass jedes $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$ Bild eines $v\in V$ ist. Aber $C_{B(\lambda_1\cdot v_1+...+\lambda_n\cdot v_n)}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$.

Warum war Beweis so einfach? Weil wir Vorarbeit vorher gemacht haben.

Vor Beweis des Satzes 11 in „$\Longleftarrow$“ Richtung brauchen wir Vorarbeit.
Üben vor dem Beweis: **Frage** $f : V \to \mathbb{R}^2$ sei eine lineare Abbildung.

Für die Vektoren v_1, $v_2 \in V$ gelte: $f(v_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Was ist $f(v_1 + v_2)$?

Frage Was ist $f(2v_1 - 3v_2)$?

Wir haben gesehen, dass (in den Beispiele oben) Bilde von Vektoren bestimmen die Bilde deren Linearkombinationen eindeutig. Wir werden jetzt eine Veralgemeinerung dieser Aussage als Lemma formulieren und beweisen.

Lemma 15 $(V,+,\cdot)$ *und* $(U,+,\cdot)$ *seien* $n-$*dimensionale Vektorräume,* $(v_1,...,v_n)$ sei ein Basis-Tupel in V und $(u_1,...,u_n)$ sei ein $n-$Tupel der Vektoren aus U. Dann gilt: Es existiert genau eine lineare Abbildung $f: V \to U$ so dass $f(v_i) = u_i$ für alle $i = 1,...,n$.

Bsp. Sei $V = U = \mathbb{R}^3$, als (v_1,v_2,v_3) nehmen wir die Standardbasis $\left(v_1 := \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, und als (u_1,u_2,u_3) nehmen wir $\left(u_1 := \begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}, u_2 := \begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}, u_3 := \begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}\right)$.

Lass uns die Formel für die lineare Abbildung f, die $v_1 \longmapsto u_1$, $v_2 \longmapsto u_2$, $v_3 \longmapsto u_3$, finden (ähnlich wie in Fragen–Antworten oben).

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = f\left(x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) =$$

$$f\left(x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) + f\left(y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) + f\left(z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = x\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+2y+3z\\4x+5y+6z\\7x+8y+9z\end{pmatrix}$$

Die Abbildung ist linear (Hausaufgabe 2d Blatt 4) und hat die Eigenschaft $f(v_i) = u_i$ (i=1,2,3).

Beweis von Lemma 15. Zuerst Existenz.

Wir werden diese Abbildung kostruieren, die Methode ist analog zu Fragen-Antworten oben und Bsp. nach Lemma 15. Sei $w \in V$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ seien Koordinaten von w in der Basis $(v_1, ..., v_n)$, d.h. $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n = \sum_{i=1}^n x_i v_i$

Wir setzen

$$f(w) := x_1 u_1 + x_2 u_2 + ... + x_n u_n = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i. \qquad (\star)$$

Zu zeigen: (i) $f(v_i) = u_i$ und (ii) f ist linear.

Wir zeigen (i): Der Koordinatenvektor von v_i in der Basis $(v_1, ..., v_n)$ ist

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{–te Zeile} \quad \text{, weil } v_i = 0 \cdot v_1 + ... + \underbrace{1 v_i}_{i\text{–te Stelle}} + ... + 0 \cdot v_n, \text{ also}$$

$f(v_i) \overset{(\star)}{=} 0 \cdot u_1 + ... + 1 \cdot u_i + ... + 0 \cdot u_n = u_i$ wie behauptet.

Wir zeigen (ii): f ist linear

$w, u \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Nach Lemma 10, die Koordinaten von $w + u$ sind $\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$. Also,

$f(w+u) \overset{Lemma\ 10}{=} f(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) v_i) \overset{(\star)}{=} \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) u_i =$
$\sum_{i=1}^n x_i u_i + \sum_{i=1}^n y_i u_i \overset{(\star)}{=} f(w) + f(v)$.

Ähnlich, nach Lemma 10, die Koordinaten von λw sind $\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$. Also,

$f(\lambda w) = \sum_{i=1}^n \lambda x_i u_i = \lambda \sum_{i=1}^n x_i u_i = \lambda f(w)$.

Eindeutigkeit

Die Abbildung $\tilde{f} : V \to U$ erfülle die Voraussetzungen von Lemma 15, d.h., $\tilde{f}$ sei linear und $\tilde{f}(v_i) = u_i$ für $i = 1, ..., n$. Wir müssen zeigen, dass $\forall w \in V \quad \tilde{f}(w) = f(w)$, wobei f die die oben in $(\star)$ konstruierte Abbildung ist.

$w \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, d.h. $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n$. Wir haben

$$\tilde{f}(w) = \tilde{f}(x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n) \overset{\text{Linearität}}{=} \tilde{f}(x_1 v_1) + \tilde{f}(x_2 v_2) + ... + \tilde{f}(x_n v_n) \overset{\text{Linearität}}{=} x_1 \tilde{f}(v_1) + x_2 \tilde{f}(v_2) + ... + x_n \tilde{f}(v_n) \overset{\text{Voraussetz.}}{=} x_1 u_1 + x_2 u_2 + ... + x_n u_n \overset{\text{Def. von } f}{=} f(w)$$

$\square$

Beweis von Satz 11 in „$\Longleftarrow$“ Richtung

Seien $(V, +, \cdot)$ und $(U, +, \cdot)$ $n-$dimensionale Vektorraume mit Basen jeweils $(v_1, ..., v_n)$ und $(u_1, ..., u_n)$. Das Ziel ist zu zeigen, dass es einen Isomorphismus $f : V \to U$ existiert; wir werden den Isomorphismus mit Hilfe von Lemma 15 konstruieren.

Nämlich, wir betrachten die lineare Abbildung $f : V \to U$ sodass $f(v_i) = u_i$; $i = 1, ..., n$. Solche Abbildung existiert (und ist eindeutig) nach Lemma 15. Wir zeigen jetzt, dass f ein Isomprphismus ist; d.h.; wir zeigen dass f injektiv und surjektiv ist.

Injektivität: Angenommen, $f(v) = f(\tilde{v})$. Z.z.: $v = \tilde{v}$.
Die Vektoren v und $\tilde{v}$ habe jeweils die Koordinatenvektore $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\lambda}_n \end{pmatrix}$. Dann gilt

$f(v) = f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) \overset{\text{Linearität}}{=} \lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_n f(v_n) \overset{\text{Konstr. von } f}{=} \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n$,

also $f(v)$ hat den Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ in der Basis $(u_1, ..., u_n)$.

Analog gilt:

$f(\tilde{v}) = f(\tilde{\lambda}_1 v_1 + ... + \tilde{\lambda}_n v_n) \overset{\text{Linearität}}{=} \tilde{\lambda}_1 f(v_1) + ... + \tilde{\lambda}_n f(v_n) \overset{\text{Konstr. von } f}{=} \tilde{\lambda}_1 u_1 + ... + \tilde{\lambda}_n u_n$.

Also auch $f(\tilde{v})$ hat den Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\lambda}_n \end{pmatrix}$ in der Basis $(u_1, ..., u_n)$.

Da nach Voraussetzungen $f(\tilde{v}) = f(v)$ ist, sind die Koordinatenvektoren von $f(\tilde{v})$ und $f(v)$ auch gleich, also ist $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\lambda}_n \end{pmatrix}$. Dann sind

$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_i v_i = \tilde{v}$. Die Abbildung f ist also injektiv.

Die Abbildung f ist surjektiv

Sei $u \in U$ ein beliebiger Vektor. Wir mussen zeigen, dass $\exists v \in V$ mit $f(v) = u$.

Der Vektor u habe den Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ in der Basis $(u_1, ..., u_n)$, d.h., $u = \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n$. Wir setzen $v := \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n \in V$.

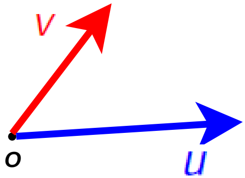
Es gilt: $f(v) = f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) \overset{\text{Linearität}}{=} \lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_n f(v_n) \overset{\text{Konstr. von } f}{=} \lambda_1 u_1 + ... \lambda_n u_n = u$.
Wir haben gesehen, dass ein beliebiger Vektor u das Bild eines Vektors $v \in V$ ist; Surjektivität von f ist damit bewiesen.

Also, die Abbildung $f : V \to U$ ist linear und $\underbrace{\text{surjektiv und injektiv}}_{\text{bijektiv}}$, ist deswegen ein Isomorphismus. Die Vektorraume V und U sind deswegen isomorph, $\square$

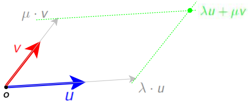
Bsp: geometrische Ebene ist isomorph zu $\mathbb{R}^2$

Wiederholung: Sei E eine Ebene, $O \in E$ und V die Menge $V := \{\text{gerichtete Strecken mit Anfangspunkt } O \text{ und Endpunkt auf } E\}$ mit „Vektoraddition" als Addition und Streckung/Stauchung als Multiplikation.

Wir haben gezeigt, dass eine Basis von $(V, +, \cdot)$ aus zwei beliebigen Vektoren $u, v \in V$ besteht mit $u \neq \vec{0} \neq v$ und $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \lambda u \neq v$



Also ist V zu $\mathbb{R}^2$ isomorph nach Satz 11'. Außerdem haben wir in Beweis von Satz 11 den Isomorphismus direkt konstruiert: $f : \mathbb{R}^2 \to V$ bildet $\binom{\lambda}{\mu} \in \mathbb{R}^2$ auf $\lambda \cdot u + \mu \cdot v$ ab.



Bemerkung. Die Abbildung f ist eigentlich die inverse Abbldung zur im Beweis von Satz 11' konstruierten Isomorphismus.

Ein bisschen Philosophie

Geometrie ist das Studium von mathematischen Modellen des Raumes, der uns auf Grund der Anschauung vertraut ist.

Die Geometrie gehört zu den ältesten Wissenschaften überhaupt. Bemerkenswertes geometrisches Wissen finden wir bereits in den orientalischen Hochkulturen des 5.–3. Jahrhunderts vor unserer Zeitrechnung. Praktische Probleme aus der Messkunde, der Baukunst, der Astronomie und der Navigation wurden abstrahiert und führten zu geometrischen Regeln. Mit Hilfe von Logic kann man aus diesen Regeln neue Aussagen bekommen, und anwenden.

Schematisch könnte man es wie folgt vorstellen:

E m i p i r i s c h e   W i s s e n s c h a f t   - - - - >   F o r m a l - l o g i s c h e   T h e o r i e

Empirische Wissenschaft	**Formal-logische Theorie**
Erfahrungswissenschaft wie die Physik	Keine Begründung durch Erfahrung, keine anschaulichen Argumente
Experimente, Beobachtungen Aussagen über die Natur	Formale Ableitung von Sätzen nach Regeln der Logik aus Axiomen (nicht weiter begründetes System von Grundtatsachen) Anschauung nur als *Hinweis* auf Beweisführungen
Deutung der Theorie in der Welt	Grundlage für Theorien der Physik
Schule Alltag Technik	Hochschulmathematik Vermittlung der Idee des Beweisens auch in der Schule (so genanntes lokales Ordnen)

Was haben wir bis jetzt gemacht?

Wir haben die Eigenschaften genommen, die in Physik öfter vorkommen und empirisch nachgewiesen wurde – die Eigenschaften I–VIII des Vektorraums.

Dann haben wir alle mögliche (endlichdimensionale) Vektoräumen geschrieben — Satz 11 — alle sind zu $\mathbb{R}^n$ isomorph.

In anderen Worten, wir haben vollständig die alle mögliche „mathematischen Modellen des Raumes“ verstanden, in welchen die Axiomen I – VIII erfüllt sind.

Außerdem kann man die mathematischen Methode, Ideen und Tricks aus Theorie von Vektorräumen auch in anderen Branchen der Mathematik, vor allen in Analysis benutzen – Sie werden es während des Studiums mehrmals sehen.