

Lernziele der 12. Woche

Die Studierenden sollen:

- ▶ die Definitionen von Bilinearformen, symmetrischen Bilinearformen und Skalarprodukten kennen und anwenden können.
- ▶ bilineare Formen mithilfe der Grammschen Matrix darstellen und beweisen können, dass jede Bilinearform auf diese Weise dargestellt werden kann und dass die Grammsche Matrix eindeutig ist.
- ▶ die Transformationsregel für Grammsche Matrizen kennen und herleiten können.
- ▶ zeigen können, dass jedes Skalarprodukt in einer Basis (genannt orthonormale Basis) als Standard-Skalarprodukt dargestellt werden kann.
- ▶ eine orthonormale Basis mithilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens bestimmen können.

Abschnitt: (symmetrische) Bilinearformen

Def. Es seien $(V, +, \cdot)$ ein \mathbb{K} -Vektorraum, u, u', u'', v, v', v'' beliebige Vektoren aus V und $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{K}$ beliebige Skalare. Eine **Bilinearform** auf V ist eine Abbildung $\sigma : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ mit der Eigenschaft

(Bilinearität) $\sigma(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = \lambda' \sigma(u', v) + \lambda'' \sigma(u'', v)$,
 $\sigma(u, \lambda' v' + \lambda'' v'') = \lambda' \sigma(u, v') + \lambda'' \sigma(u, v'')$.

(Symmetrie) Eine Bilinearform σ heißt **symmetrisch**, falls $\forall u, v \in V$ gilt $\sigma(u, v) = \sigma(v, u)$.

Bemerkung $\sigma(\vec{0}, v) = \sigma(u, \vec{0}) = 0$. Tatsächlich,
 $\sigma(\vec{0}, v) = \sigma(0 \cdot \vec{0}, v) \stackrel{\text{Linearität}}{=} 0 \cdot \sigma(\vec{0}, v) = 0$.

Bsp. (Standard-Skalarprodukt) auf \mathbb{R}^n (oder \mathbb{K}^n). Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ setze } \sigma(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Das ist eine symmetrische Bilinearform

Symmetrie ist offensichtlich (weil $x_i y_i = y_i x_i$).

Bilinearität:

$$\begin{aligned} \sigma(\lambda' x' + \lambda'' x'', y) &= (\lambda' x'_1 + \lambda'' x''_1) y_1 + \dots + (\lambda' x'_n + \lambda'' x''_n) y_n = \\ &= \lambda' x'_1 y_1 + \dots + \lambda' x'_n y_n + \lambda'' x''_1 y_1 + \dots + \lambda'' x''_n y_n = \\ &= \lambda' \sigma(x', y) + \lambda'' \sigma(x'', y). \end{aligned}$$

Linearität bzgl. 2tem Eintrag zeigt man analog.

Bsp. $\sigma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei wie folgt definiert:

Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ setzen wir

$$\sigma(x, y) := x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Das ist eine Bilinearform: **Linearität** zeigt man wie im Beispiel oben:

$$\sigma(\lambda' \cdot x' + \lambda'' \cdot x'', y) := \underbrace{\lambda' \cdot x'_1 y_2 - \lambda' \cdot x'_2 y_1}_{\lambda' \cdot \sigma(x', y)} + \underbrace{\lambda'' \cdot x''_1 y_2 - \lambda'' \cdot x''_2 y_1}_{\lambda'' \cdot \sigma(x'', y)}.$$

Die Bilinearform σ ist aber nicht symmetrisch:

Nach Definition ist $\sigma(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$ und

$$\sigma(y, x) = y_1 x_2 - y_2 x_1 = -(x_1 y_2 - x_2 y_1) = -\sigma(x, y).$$

$$\text{Also } \sigma\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 \neq \sigma\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1,$$

was zeigt, dass σ nicht symmetrisch ist.

Bemerkung. Die Bilinearformen mit Eigenschaft $\sigma(u, v) = -\sigma(v, u)$ heißen **anti-** oder **skew-** oder **schiefssymmetrisch**.

Hauptbeispiel:

Sei $B := (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis in V . Sei $A \in \text{Mat}(n, n, \mathbb{K})$. Wir identifizieren $\text{Mat}(n, 1, \mathbb{K})$ mit \mathbb{K}^n und $\text{Mat}(1, 1, \mathbb{K})$ mit \mathbb{K} und definieren $\sigma_A : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ wie folgt: Für die Vektoren u, v mit Koordinaten

$$C_B(u) := x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \text{ bzw. } C_B(v) := y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \text{ setze}$$

$$\sigma_A(u, v) = x^t A y = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \text{Mat}(1, 1, \mathbb{K}) \equiv \mathbb{K}.$$

(In einer Formel: $\sigma_A(u, v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$.)

Bsp. Für $V = \mathbb{R}^2$ mit der Standard-Basis (e_1, e_2) und $A = Id$ ist

$$\sigma_A \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 y_1 + x_2 y_2) \text{ (Dies ist das Standard-Skalarprodukt in } \mathbb{R}^2 \text{).}$$

Die Form σ_A ist bilinear: Tatsächlich,

$$\sigma_A(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = (\lambda' x' + \lambda'' x'')^t A y = (\lambda' x'^t + \lambda'' x''^t) A y = \lambda' x'^t A y + \lambda'' x''^t A y = \lambda' \sigma_A(u', v) + \lambda'' \sigma_A(u'', v).$$

Linearität bzgl. zweiter Variable ist ähnlich.

Noch einmal: wir brauchen die folgenden Daten für σ_A : eine Matrix A und eine Basis.

Berechnen Sie bitte selbst: $\sigma_A(x, y)$

wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (alles ist über \mathbb{R}).

Antwort: $(1 \ 2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = (3 \ -1) \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = (-6)$.

Bsp. Wir betrachten das Bilinearprodukt aus dem anderen Beispiel oben:

$$\sigma(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Diese Bilinearform kann man auch wie im Hauptbeispiel darstellen. Die entsprechende Matrix ist $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (und die entsprechende Basis ist die Standardbasis):

$$(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1 = \sigma(x, y).$$

Lemma 29 Die Bilinearform σ_A ist symmetrisch $\iff A^t = A$. (Solche Matrizen heißen *symmetrische* Matrizen)

Bsp: symmetrische Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 22 & 2 & 7 \\ 2 & 14 & 5 \\ 7 & 5 & 71 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

Bsp. Wir haben gesehen, dass das Standard-Skalarprodukt, also die Bilinearform

$$\sigma \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = (x_1 \ \dots \ x_n) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

symmetrisch ist. Die Matrix Id ist offensichtlich auch symmetrisch.

Bsp. Wir haben gesehen, dass die Bilinearform $\sigma(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$ nicht symmetrisch ist.

Die Matrix A für diese Bilinearform haben wir ebenfalls konstruiert:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; diese Matrix ist NICHT symmetrisch, weil $A^t = -A \neq A$.

Beweis in „ \Leftarrow “

Lemma 29 Die Bilinearform σ_A ist symmetrisch $\iff A^t = A$. (Solche Matrizen heißen *symmetrische Matrizen*)

Wiederholung — (Rechenregel für das Produkt transponierter Matrizen) :
 $(AB)^t = B^t A^t$.

Beweis in „ \Leftarrow “. Angenommen, $A^t = A$. Setzen wir $\sigma_A(u, v) = \alpha$. Z.z.:
 $\sigma_A(v, u) = \alpha$. Seien $x = C(u) \in \mathbb{R}^n$ und $y = C(v) \in \mathbb{R}^n$ die Koordinatenvektoren von u und v . Nach Definition ist

$$\text{Mat}(1, 1) \ni (\alpha) \stackrel{\text{Def.}}{=} x^t A y \quad (*)$$

Wir transponieren die beiden Seiten der Gleichung (*). Da $(\alpha)^t = (\alpha)$,

$$(\alpha) = (x^t A y)^t \stackrel{\text{Rechenregel}}{=} y^t A^t (x^t)^t \stackrel{\text{weil } (x^t)^t = x \text{ und } A^t = A \text{ ist}}{=} y^t A x = \sigma_A(v, u).$$

Also $\sigma_A(u, v) = \alpha = \sigma_A(v, u)$ und σ_A ist daher symmetrisch.

Beweis in „ \implies “

Wicht. Frage vor dem Beweis: Was ist $\sigma_A(b_i, b_j)$?

Antwort: Wir wissen, dass $C(b_j) = e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Platz } j \text{ ist. Dann}$

gilt:

$$\sigma_A(b_i, b_j) = (0 \dots \underbrace{1}_{\text{Platz } i} \dots 0) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Platz } j$$

$$= (0 \dots \underbrace{1}_{\text{Platz } i} \dots 0) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_{ij}.$$

Beweis von \implies in Lemmas 29: Angenommen, σ_A ist symmetrisch. Dann ist $\sigma_A(b_i, b_j) = \sigma_A(b_j, b_i)$. Dann ist $a_{ij} = a_{ji}$, und deswegen $A^t = A$. \square

Jede Bilinearform ist wie in HauptBsp.

Satz 33. Sei (b_1, \dots, b_n) eine Basis in einem \mathbb{K} -Vektorraum V . Dann gilt: für jede Bilinearform σ auf V gibt es genau ein $A \in \text{Mat}(n, n)$, so dass $\sigma = \sigma_A$. Ferner gilt: das Element (i, j) der Matrix A ist gleich $\sigma(b_i, b_j)$.

Die Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt **die Matrix der Bilinearform** oder **Gramsche Matrix**.

Bsp. Wir haben gesehen, dass die Gramsche Matrix des Standard-Skalarprodukts bzgl. der Standardbasis, $\sigma(x, y) := x_1y_1 + \dots + x_ny_n$, gleich Id ist

$$\text{(weil } x^t Id y = (x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1y_1 + \dots + x_ny_n)$$

Man kann Sie auch mit der im Satz vorgeschlagenen Regel konstruieren: (i, j) -Element ist

$$\begin{cases} \text{für } i = j & \sigma(e_i, e_i) = 0 \cdot 0 + \dots + 1 \cdot 1 + \dots + 0 \cdot 0 = 1 \\ \text{für } i \neq j & \sigma(e_i, e_j) = 0 \cdot 0 + \dots + 1 \cdot 0 + \dots + 0 \cdot 1 + \dots + 0 \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

wie in der Einheitsmatrix.

Satz 33. Sei (b_1, \dots, b_n) eine Basis in einem \mathbb{K} -Vektorraum V . Dann gilt: für jede Bilinearform σ auf V gibt es genau ein $A \in \text{Mat}(n, n)$, so dass $\sigma = \sigma_A$. Ferner gilt: das Element (i, j) der Matrix A ist gleich $\sigma(b_j, b_j)$.

Bsp. Wir haben gesehen, dass die Gramsche Matrix der Bilinearform $\sigma(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$ bzgl. der Standardbasis gleich $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist.

Man kann diese Matrix auch mit Satz 33 ausrechnen:

(1, 1)–Eintrag davon ist $\sigma(e_1, e_1) = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 1 = 0$,

(1, 2)–Eintrag davon ist $\sigma(e_1, e_2) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$ u.s.w.

Beweis von Satz 33: zuerst Konstruktion und Eindeutigkeit.

Angenommen $\sigma_A(u, v) = \sigma_B(u, v)$ für alle $u, v \in V$. Dann ist $\sigma_A(b_i, b_j) = \sigma_B(b_i, b_j)$.

Da $\sigma_A(b_i, b_j)$ gleich dem Element (i, j) von A ist (siehe **Wicht. Bsp.** in Beweis von Lemma 29) und $\sigma_B(b_i, b_j)$ gleich (i, j) -Element von B ist, sind die Matrizen gleich.

Eindeutigkeit ist bewiesen. Außerdem sehen wir, dass wenn $\sigma = \sigma_A$ für eine Matrix A ist, dann ist (i, j) -Eintrag von A gleich $\sigma(b_i, b_j)$.

BEWEIS DER EXISTENZ

Man betrachte die Matrix A mit $a_{ij} = \sigma(b_i, b_j)$. Man betrachte die Bilinearform $\sigma_0 : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $\sigma_0(u, v) := \sigma(u, v) - \sigma_A(u, v)$.

Z.z.: $\sigma_0(u, v) = 0$. Nach Konstruktion ist

$$\sigma_0(b_i, b_j) = \underbrace{\sigma(b_i, b_j)}_{a_{ij}} - \underbrace{a_{ij}}_{\text{Wicht. Bsp}} = 0. \quad (*)$$

Seien $u = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$ und $v = y_1 b_1 + \dots + y_n b_n$. Dann ist

$$\begin{aligned} \sigma_0(u, v) &= \sigma_0(x_1 b_1 + \dots + x_n b_n, y_1 b_1 + \dots + y_n b_n) = \\ &= x_1 \sigma_0(b_1, y_1 b_1 + \dots + y_n b_n) + \dots + x_n \sigma_0(b_n, y_1 b_1 + \dots + y_n b_n) = \\ &= x_1 \left(y_1 \underbrace{\sigma_0(b_1, b_1)}_{0 \text{ nach } (*)} + \dots + y_n \underbrace{\sigma_0(b_1, b_n)}_{0 \text{ nach } (*)} \right) + \dots + x_n \left(y_1 \underbrace{\sigma_0(b_n, b_1)}_{0 \text{ nach } (*)} + \dots + y_n \underbrace{\sigma_0(b_n, b_n)}_{0 \text{ nach } (*)} \right). \end{aligned}$$

Da alle $\sigma_0(b_i, b_j) \stackrel{(*)}{=} 0$, ist die Summe oben gleich 0. □

Bemerkung. Es gibt eine klare Analogie zum Beweis von Satz 13 aus dem Abschnitt „Matrizen von linearen Abbildungen“: Wir haben gezeigt, dass wegen der Linearität die Werten der Bilinearform auf den Basisvektoren die Bilinearform bestimmen. Die Gramsche Matrix A ist so konstruiert, dass $\sigma(b_i, b_j) = \sigma_A(b_i, b_j)$ für beliebige Basisvektoren b_i, b_j ; daraus folgt dass $\sigma \equiv \sigma_A$.

Wie ändert sich die Gramsche Matrix, wenn wir die Basis wechseln?

Wiederholung: Gramsche Matrix zu σ bzgl. Basis B ist die Matrix A sodass $\sigma(u, v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$. (*)

Wiederholung — Satz 25 $\forall v$ gilt:

$$T C_{B'}(v) = C_B(v), \quad (**)$$

wobei T die Transformationsmatrix von B nach B' ist, d.h. die Spalten von T sind die Koordinaten von b'_i in der Basis B .

$$\text{Also ist } \sigma(u, v) \stackrel{(*)}{=} (C_B(u))^t A C_B(v) \stackrel{(**)}{=} (T C_{B'}(u))^t A T C_{B'}(v) \stackrel{\text{Rechenregel}}{=} \\ (C_{B'}(u))^t \underbrace{T^t A T}_{A'} C_{B'}(v).$$

Wir haben bewiesen:

Satz 34 (Transformationsregel für Gramsche Matrizen). Sei A die Gramsche Matrix der Bilinearform σ bzgl. der Basis B . Dann ist $A' := T^t A T$ die Gramsche Matrix von σ bzgl. der Basis B' , wobei T die Transformationsmatrix von B nach B' ist.

Kleine Übung: Ist A symmetrisch (d.h. $A^t = A$), so ist $T^t A T$ auch symmetrisch. In der Tat, $(T^t A T)^t \stackrel{\text{Rechenregel}}{=} T^t A^t (T^t)^t = T^t A T$.

Zielsetzung:

Ziel: Symmetrische Bilinearformen untersuchen.

Methode: Suchen eine Basis, sodass die Matrix „einfach“ ist.

Wiederholung – Satz 34 (Transformationsregel für Gramsche Matrizen). Nach Basiswechseln mit der Transformationsmatrix T wird die Gramsche Matrix A der Bilinearform σ wie folgt geändert:
 $A \mapsto T^t A T$.

Ziel umformuliert: In welche „einfachste“ Form kann man eine Matrix mit Hilfe der Transformation $A \mapsto T^t A T$ bringen (wobei $T \in \text{Mat}(n, n)$ nichtausgeartet ist)?

Das Problem kann man über beliebigen Körper stellen. Wir werden die vollständige Antwort nur für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ geben. Sie werden aber sehen, dass der Körper \mathbb{C} eine wichtige Rolle in der Antwort spielt.

Skalarprodukt:

Def. einer Bilinearform – Voraussetzung: Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Eine Bilinearform heißt **positiv definit**, falls

(Positive Definitheit) $\sigma(u, u) > 0$ für $u \neq \vec{0}$. (Ist sinnvoll nur in \mathbb{R})
Eine symmetrische positiv definite Bilinearform heißt ein **Skalarprodukt** (oder: **inneres Produkt**).

Bsp. Das Standard-Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n ,
$$\sigma(x, y) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$
 ist ein Skalarprodukt:

Bilinearität und Symmetrie haben wir bereits bewiesen.

Z.z.: (Positive Definitheit): $\sigma(x, x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 \stackrel{\text{für } x \neq \vec{0}}{>} 0$

Bsp.

Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Setze $\sigma(x, y) = \alpha_1 x_1 y_1 + \dots + \alpha_n x_n y_n$. Das ist eine symmetrische Bilinearform auf \mathbb{R}^n (beweis wie im Bsp. mit Standard-Skalarprodukt).

Frage: Ist sie positiv definit? **Frage umformuliert:** Ist $\sigma(x, x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \vec{0}$?

Antwort hängt von den α_i ab. Sind alle $\alpha_i > 0$, so ist

$\sigma(x, x) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2 \geq 0$ und dies ist nur für $x = \vec{0}$ gleich 0. Falls ein $\alpha_i \leq 0$ ist, dann ist

$\sigma(e_i, e_i) = \alpha_1 \cdot 0 + \dots + \underbrace{\alpha_i \cdot 1 \cdot 1}_{i\text{-te Summande}} + \dots + \alpha_n \cdot 0 = \alpha_i \leq 0$, also

gibt es (mind) ein $u \neq \vec{0}$, nämlich $u = e_i$, so dass $\sigma(u, u) \leq 0$ und die Bilinearform ist daher nicht positiv definit.

Frage: Was ist die Gramsche Matrix von σ ?

Antwort: $a_{ij} \stackrel{\text{Satz 33}}{=} \sigma(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ \alpha_i & \text{für } i = j \end{cases}$

Also ist die Gramsche Matrix $\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Orthogonale und orthonormale Basen

Def. Eine Basis (b_1, \dots, b_n) heißt **orthogonal** bzgl. einer Bilinearform σ , falls für alle $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ gilt: $\sigma(b_i, b_j) = 0$. Falls zusätzlich für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ $\sigma(b_i, b_i) = 1$ gilt, dann heißt die Basis **orthonormal**

Bsp. Die Standard-Basis in \mathbb{R}^n ist eine Orthogonalbasis für die Bilinearform $\sigma(x, y) := \alpha_1 x_1 y_1 + \dots + \alpha_n x_n y_n$.

(In der Tat, für $i < j$ gilt

$$\sigma(e_i, e_j) := 0 \cdot 0 + \dots + \underbrace{\alpha_i \cdot 1 \cdot 0}_{i\text{-te Summande}} + \dots + \underbrace{\alpha_j \cdot 0 \cdot 1}_{j\text{-te Summande}} + \dots + 0 \cdot 0 = 0.)$$

Außerdem ist jede Basis der Form $(\lambda_1 \cdot e_1, \dots, \lambda_n \cdot e_n)$ wobei $\lambda_i \neq 0$ orthogonal (d.h. alle Vektoren sind vielfache der Standard-Basisvektoren).

Bsp. Die Standard-Basis in \mathbb{R}^n ist eine Orthonormalbasis für das Standard-Skalarprodukt $\sigma(x, y) := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. In der Tat, wie wir oben bewiesen haben, ist sie orthogonal. Da zusätzlich

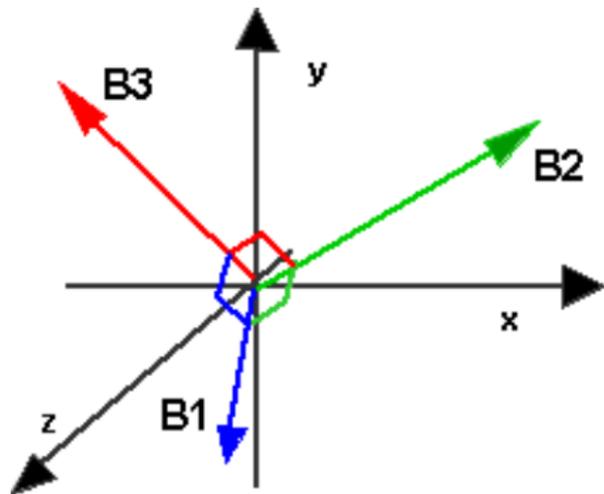
$$\sigma(e_i, e_i) := 0 + \dots + \underbrace{1 \cdot 1}_{i\text{-ter Summand}} + \dots + 0 = 1, \text{ ist sie orthonormal.}$$

Die Basis der Form $(\lambda_1 \cdot e_1, \dots, \lambda_n \cdot e_n)$ mit $\lambda_i \neq 0$ ist im Allgemeinen nicht mehr orthonormal: die Bedingung $\sigma(b_i, b_j) = 0$ für $i \neq j$ ist erfüllt, aber die Bedingung $\sigma(b_i, b_i) = 1$ ist nur dann erfüllt, wenn die $\lambda_i \in \{1, -1\}$ sind.

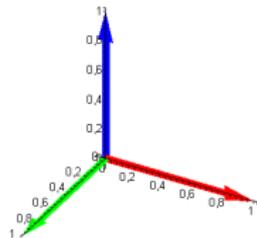
Geometrische Vorstellung

Wir werden später (in einem Vektorraum mit Skalarprodukt)
„Länge“ und „Winkel“ einführen.

Sie werden sehen, dass eine Basis g.d. orthogonal ist, wenn alle
Winkel zwischen den Basisvektoren rechte Winkel sind, und g.d.
orthonormal, wenn zusätzlich alle Basisvektoren die Länge 1 haben.



Orthogonale Basis



Orthonormale Basis

Lemma 30 Sei σ eine Bilinearform. Dann gilt:

Ist (b_1, \dots, b_n) eine orthogonale Basis, so ist die Gramsche Matrix von σ diagonal.

Ist (b_1, \dots, b_n) eine orthonormale Basis, so ist die Gramsche Matrix von σ gleich Id .

Beweis: Ausrechnen: nach Definition der Gramschen Matrix $A = (a_{ij})$

gilt $a_{ij} = \sigma(b_i, b_j) \stackrel{\text{Satz 33}}{=} \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ \sigma(b_i, b_i) := \alpha_i & \text{für } i = j \end{cases}$. Wir sehen, dass

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Ist außerdem die Basis orthonormal, dann sind die $\alpha_i := \sigma(b_i, b_i) \stackrel{\text{Def.}}{=} 1$, also ist die Matrix gleich Id . □

Folgerung: Es gilt:

(a) \exists eine orthogonale Basis \implies die Bilinearform ist symmetrisch.

(b) \exists eine orthonormale Basis \implies die Bilinearform ist symmetrisch und positiv definit (und ist deswegen ein Skalarprodukt).

Beweis: Die diagonalen Matrizen sind symmetrisch (d.h. sie erfüllen $A^t = A$) $\xrightarrow{\text{Lemma 29}}$ σ ist symmetrisch.

Gibt es eine orthonormale Basis, so ist die Gramsche Matrix gleich

Id , also gilt für $v \in V, v \neq \vec{0}$ mit Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, dass

$$\sigma(v, v) = (x_1 \ \cdots \ x_n) Id \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \ \cdots \ x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + \dots + x_n^2 > 0. \quad \square$$

Satz 35 σ sei eine Bilinearform auf einem Vektorraum V der Dimension n . Es gibt genau dann eine orthonormale Basis, wenn die Bilinearform ein Skalarprodukt ist.

Satz in Richtung \implies : Folgerung (b).

Beweis von \impliedby . Angenommen σ ist ein Skalarprodukt. Wir werden zuerst eine orthogonale und dann eine orthonormale Basis algorithmisch konstruieren; der Algorithmus heißt **Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren**.

Wir werden auch sehen, dass wir als ersten Vektor der orthonormalen Basis einen beliebigen Vektor v mit $\sigma(v, v) = 1$ wählen können.

Ferner gilt: wenn die Vektoren b_1, \dots, b_k die Bedingungen

$\sigma(b_i, b_j) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$ erfüllen, dann kann man das k -Tupel

(b_1, \dots, b_k) zu einer orthonormalen Basis vervollständigen.

Sei (a_1, \dots, a_n) eine Basis.

Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.

Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1, a_2)}{\sigma(b_1, b_1)} b_1$. Das ist wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0$ ist.

Eigenschaften von b_2 : (i) $\sigma(b_1, b_2) = 0$ und (ii) $b_2 \neq \vec{0}$.

Beweis (i): $\sigma(b_1, b_2) = \sigma\left(b_1, a_2 - \frac{\sigma(b_1, a_2)}{\sigma(b_1, b_1)} b_1\right)$

$\stackrel{\text{Linearität}}{=} \sigma(b_1, a_2) - \frac{\sigma(b_1, a_2)}{\sigma(b_1, b_1)} \sigma(b_1, b_1) = \sigma(b_1, a_2) - \sigma(b_1, a_2) = 0$.

Beweis (ii): Da b_2 eine nichttriviale Linearkombination der Elemente der linear unabhängigen Menge $\{a_1, a_2\}$ ist, ist $b_2 \neq \vec{0}$.

Bsp. Im \mathbb{R}^3 versehen mit dem Standardskalarprodukt betrachten wir das Basistupel $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ und führen den ersten Schritt des G-S-Orthogonalisierungsverfahrens durch.

$$b_1 := a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$b_2 := a_2 - \frac{\sigma(b_1, a_2)}{\sigma(b_1, b_1)} b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0}{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen, dass b_1 und b_2 nicht zueinander proportional sind. Außerdem sehen wir, dass $\sigma(b_1, b_2) = 0$ ist, weil

$$\sigma\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 0 \cdot 1 = 0 \text{ wie wir wollten.}$$

Schritt 3. Setze $b_3 = a_3 - \frac{\sigma(b_1, a_3)}{\sigma(b_1, b_1)} b_1 - \frac{\sigma(b_2, a_3)}{\sigma(b_2, b_2)} b_2$. Das ist wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0 \neq \sigma(b_2, b_2)$ ist.

Eigenschaften von b_3 : (i) $\sigma(b_1, b_3) = \sigma(b_2, b_3) = 0$ und (ii) $b_3 \neq \vec{0}$.

Beweis (i): $\sigma(b_1, b_3) = \sigma\left(b_1, a_3 - \frac{\sigma(b_1, a_3)}{\sigma(b_1, b_1)} b_1 - \frac{\sigma(b_2, a_3)}{\sigma(b_2, b_2)} b_2\right)$

$$\begin{aligned} \stackrel{\text{Linearität}}{=} & \sigma(b_1, a_3) - \frac{\sigma(b_1, a_3)}{\sigma(b_1, b_1)} \sigma(b_1, b_1) - \frac{\sigma(b_2, a_3)}{\sigma(b_2, b_2)} \sigma(b_1, b_2) \\ & = \sigma(b_1, a_3) - \sigma(b_1, a_3) - 0 = 0. \end{aligned}$$

Ähnlich zeigt man $\sigma(b_2, b_3) = 0$:

$$\sigma(b_2, b_3) = \sigma\left(b_2, a_3 - \frac{\sigma(b_1, a_3)}{\sigma(b_1, b_1)} b_1 - \frac{\sigma(b_2, a_3)}{\sigma(b_2, b_2)} b_2\right)$$

$$\begin{aligned} \stackrel{\text{Linearität}}{=} & \sigma(b_2, a_3) - \frac{\sigma(b_1, a_3)}{\sigma(b_1, b_1)} \sigma(b_2, b_1) - \frac{\sigma(b_2, a_3)}{\sigma(b_2, b_2)} \sigma(b_2, b_2) \\ & = \sigma(b_2, a_3) - 0 - \sigma(b_2, a_3) = 0. \end{aligned}$$

Beweis (ii): Da b_3 eine nichttriviale Linearkombination der Elemente der linear unabhängigen Menge $\{a_1, a_2, a_3\}$ ist, ist $b_3 \neq \vec{0}$.

Rechnen Sie bitte selbst:

Führen Sie den zweiten Schritt des G-S-Verfahrens für die Basis $(a_1, a_2, a_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ durch. Den ersten Schritt haben wir bereits gemacht:

$$b_1 = a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; b_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung.

$$b_3 = a_3 - \frac{\sigma(b_1, a_3)}{\sigma(b_1, b_1)} b_1 - \frac{\sigma(b_2, a_3)}{\sigma(b_2, b_2)} b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\sigma\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}{\sigma\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} -$$

$$\frac{\sigma\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}{\sigma\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \vec{0} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Haben wir uns verrechnet? Unwahrscheinlich, da $\sigma(b_1, b_3) = \sigma(b_2, b_3) = 0$, was unser Ziel war.

Schritt k. Schritt $k - 1$ liefert $k - 1$ Vektoren b_1, \dots, b_{k-1} , die nichttriviale Linearkombinationen der $\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$ sind, sodass (ii) jedes $b_i \neq \vec{0}$ und sodass (i) $\sigma(b_i, b_j) = 0$ für $i \neq j$.

Setze $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i$.

Wir zeigen: (i) für $j < k$ gilt $\sigma(b_j, b_k) = 0$ und (ii) $b_k \neq \vec{0}$.

Beweis (i): $\sigma(b_j, b_k) = \sigma(b_j, a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i)$

$$\stackrel{\text{Linearität}}{=} \sigma(b_j, a_k) - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} \sigma(b_j, b_i)}_{\text{nur } \sigma(b_j, b_j) \neq 0 \text{ nach (i)}} = \sigma(b_j, a_k) - \sigma(b_j, a_k) = 0.$$

Beweis (ii): Da b_k eine nichttriviale Linearkombination der Elemente der linear unabhängigen Menge $\{a_1, \dots, a_k\}$ ist, ist $b_k \neq \vec{0}$.

Nach n Schritten bekommen wir $\{b_1, \dots, b_n\}$ so dass (i) $\sigma(b_i, b_j) = 0$ für $i \neq j$ und so dass (ii) $b_i \neq \vec{0}$.

Wir zeigen: diese Menge ist linear unabhängig.

Sei $\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i = \vec{0}$. Für jedes j ist dann $\sigma(b_j, \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i) = 0$. Aber

$$\sigma(b_j, \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i) \stackrel{\text{Linearität}}{=} \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma(b_j, b_i) \stackrel{\substack{\text{weil nur} \\ \sigma(b_j, b_j) \neq 0}}{=} \lambda_j \sigma(b_j, b_j).$$

Da $\sigma(b_j, b_j) \neq 0$ ist, muss $\lambda_j = 0$. Da j beliebig war, sind alle $\lambda_j = 0$, also ist die Linearkombination trivial.

Also ist (b_1, \dots, b_n) eine Basis, nach Konstruktion ist sie orthogonal.

Wir **normieren** die Basis-Vektoren: Man betrachten

$\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1, b_1)}} b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2, b_2)}} b_2, \dots, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n, b_n)}} b_n \right)$. Da $\sigma(b_i, b_i)$ positiv ist, sind die Vektoren wohldefiniert.

Wir zeigen: dieses Tupel ist eine orthonormale Basis. Tatsächlich,

$$\sigma \left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i, b_i)}} b_i, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j, b_j)}} b_j \right) \stackrel{\text{Bilinearität}}{=}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i, b_i)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j, b_j)}} \sigma(b_i, b_j) = \begin{cases} \frac{\sigma(b_i, b_i)}{\sigma(b_i, b_i)} = 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases} \quad \square$$

Rechnen Sie bitte selbst.

Normieren Sie bitte die Vektoren der orthogonalen Basis

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right).$$

Lösung: $\sqrt{\sigma \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)} = \sqrt{2}$, also wird b_1 in der Basis durch

$b'_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ ersetzt (ist immer noch zu b_2 und b_3 orthogonal; $\sigma(b'_1, b'_1)$ ist aber gleich 1).

$\sqrt{\sigma \left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, also wird b_2 durch $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ ersetzt.

$\sigma \left(\begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3}$, deswegen wird b_3 durch

$b'_3 := \sqrt{3} \cdot \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ ersetzt.

Die Basis $(b'_1, b'_2, b'_3) = \left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right)$ ist orthonormiert!!!

Gegebene Basis:

$$\mathbf{v}_1 = (2, 2, 0)^T$$

$$\mathbf{v}_2 = (1, 0, 2)^T$$

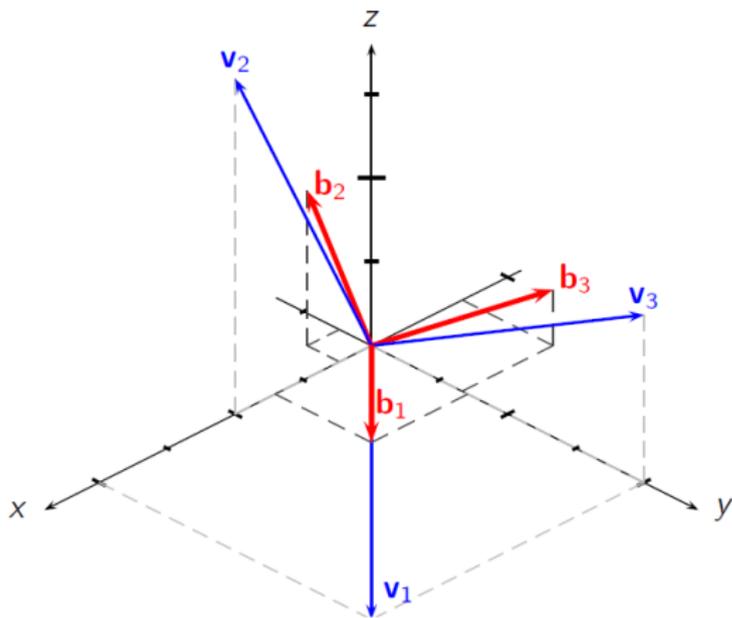
$$\mathbf{v}_3 = (0, 2, 1)^T$$

Orthonormale Basis:

$$\mathbf{b}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T$$

$$\mathbf{b}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^T$$

$$\mathbf{b}_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^T$$



Satz 35 in Worten: *Jedes Skalarprodukt in einem endlichdimensionalen Vektorraum ist das Standard-Skalarprodukt in einer geeigneten Basis.*

Modifikation des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens:

Mann kann in jedem Schritt den konstruierten Vektor b_k mit $\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_k, b_k)}}$ multiplizieren.

Vorteil 1: die Basis (b_1, \dots, b_n) wird orthonormal.

Vorteil 2: in der Formel $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i$ wird $\sigma(b_i, b_i) = 1$.

Nachteil. Die Formel für b_i wird in der Regel Wurzeln enthalten – rechnerisch kompliziert.

Bezeichnung: Wenn wir auf V ein Skalarprodukt σ ausgewählt haben, werden wir es mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnen, d.h. statt $\sigma(u, v)$ werden wir $\langle u, v \rangle$ schreiben. Alternative Schreibweisen in der Literatur: (\cdot, \cdot) , $\langle \cdot | \cdot \rangle$

Def. Ein Euklidischer Vektorraum ist ein Paar $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, wobei V ein endlichdimensionaler Vektorraum ist und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt.

Nach Satz 35 können wir in V eine Basis B wählen, sodass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-Skalarprodukt ist: für die Vektoren x, y mit

Koordinatenvektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ gilt: $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.

Bemerkung Ist U ein Untervektorraum des Euklidischen Vektorraums $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, so ist $(U, \langle \cdot, \cdot \rangle|_U)$ ein Euklidischer Vektorraum, wobei $\langle u_1, u_2 \rangle|_U = \langle u_1, u_2 \rangle$.

Frage Welche Koordinaten hat ein Vektor v in einer orthonormalen Basis?

Satz 36 Es sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum. Sei (b_1, \dots, b_n) eine orthonormale Basis. Dann gilt: die Koordinaten von beliebiges $v \in V$ sind gleich
$$\begin{pmatrix} \langle b_1, v \rangle \\ \vdots \\ \langle b_n, v \rangle \end{pmatrix}.$$

In Worten: Die Koordinaten in der orthonormalen Basis sind die Skalarprodukte mit den Basisvektoren.

Bsp. Wir betrachten \mathbb{R}^2 mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Die Standard-Basis ist bzgl. des Standard-Skalarprodukts orthonormal. Dann gilt: $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rangle = x_1$ und $\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rangle = x_2$, also gibt uns die Formel im Satz 36 die richtige Antwort (weil die Koordinaten von $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ in der Standard-Basis offensichtlich x_1, x_2 sind).

Bsp. Wir haben oben eine orthonormierte Basis

$(b'_1, b'_2, b'_3) = \left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right)$ des \mathbb{R}^3 mit dem

Standard-Skalarprodukt konstruiert.

Wie findet man die Koordinaten eines Vektors, z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, in dieser Basis?

Man kann dies mit Hilfe der Definition tun – dazu muss man ein LGS

$$x_1 \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für die Unbekannten x_1, x_2, x_3 lösen. Mit Satz 36 ist dies viel einfacher:

$$x_1 = \sigma \left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 1/\sqrt{2}, \quad x_2 = \sigma \left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 1/\sqrt{6},$$

$$x_3 = \sigma \left(\begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = -1/\sqrt{3}.$$

(Sie können diese x_1, x_2, x_3 in das LGS oben einsetzen und sehen, dass x_1, x_2, x_3 die Koordinaten des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in der Basis (b'_1, b'_2, b'_3) sind).

Beweis von Satz 36

Satz 36 Es sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum. Sei (b_1, \dots, b_n) eine orthonormale Basis. Dann

gilt: die Koordinaten eines beliebigen $v \in V$ sind gleich $\begin{pmatrix} \langle b_1, v \rangle \\ \vdots \\ \langle b_n, v \rangle \end{pmatrix}$.

Beweis. Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor von v . Z.z.: $x_i = \langle b_i, v \rangle$,

d.h., $v = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$. Man nehme ein $i \in \{1, \dots, n\}$ und betrachte

$$\langle b_i, v \rangle = \langle b_i, x_1 b_1 + \dots + x_n b_n \rangle \stackrel{\text{Bilinearit\u00e4t}}{=} x_1 \langle b_i, b_1 \rangle + \dots + x_n \langle b_i, b_n \rangle.$$

Da $\langle b_i, b_j \rangle = 0$ f\u00fcr $i \neq j$ und $\langle b_i, b_i \rangle = 1$, ist $\langle b_i, v \rangle = x_i$. \square

Folgerung Es sei V ein Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und einer Orthonormalbasis (b_1, \dots, b_n) . F\u00fcr ein $u \in V$ gelte: f\u00fcr jedes b_i ist $\langle b_i, u \rangle = 0$. Dann gilt: $u = \vec{0}$.

Orthogonale Projektion – Lot

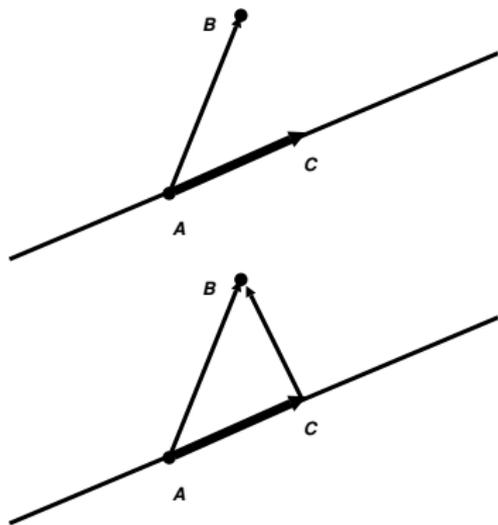
Def. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum. Die Vektoren $u, v \in V$ heißen *orthogonal*, falls $\langle u, v \rangle = 0$. Ein Vektor v heißt orthogonal zu der nichtleeren Teilmenge $M \subseteq V$, falls v zu allen Vektoren aus M orthogonal ist.

Bsp. Jeder Vektor ist orthogonal zu $\vec{0}$.

Bemerkung Wir werden später sehen, dass die Vektoren $u \neq \vec{0}, v \neq \vec{0}$ g.d. orthogonal sind, wenn der Winkel (wird später definiert) zwischen u und v gleich $\pi/2$ ist.

Def. – (Schulgeometrie) Sei U ein Untervektorraum von V . Für $v \in V$ heißt der Vektor $u \in U$, so dass $v - u$ orthogonal zu U ist, *die orthogonale Projektion* (oder: *das Lot*) des Vektors v auf U und wird mit $\text{Proj}_U(v)$ bezeichnet.

Geometrische Vorstellung:



Vektor \vec{AC} ist Projektion des Vektors \vec{AB} auf $\text{span}(\{\vec{AC}\})$, da $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$ zu \vec{AC} und deswegen auch zu allen Vektoren aus $\text{span}(\{\vec{AC}\})$ orthogonal ist.

Lemma 31 Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum. Sei U ein Untervektorraum von V . Dann gilt: für jedes $v \in V$ existiert genau eine Projektion u von v auf U .

Ferner gilt: für jedes $u' \in U$, $u' \neq u$ ist $\langle v - u', v - u' \rangle > \langle v - u, v - u \rangle$.

In Worten: Die Projektion des Vektors v auf der Unterraum U existiert, ist eindeutig und minimiert $|v - u|$ für $u \in U$.

Beweis. Eindeutigkeit: Für die Vektoren $u_1, u_2 \in U$ gelte: für jedes $u' \in U$ $\langle v - u_1, u' \rangle = 0$ und $\langle v - u_2, u' \rangle = 0$. Dann

$$0 = \langle v - u_1, u' \rangle - \langle v - u_2, u' \rangle \stackrel{\text{Bilinearität}}{=} \langle u_2 - u_1, u' \rangle \stackrel{\text{Folgerung}}{\implies} u_1 - u_2 = \vec{0}.$$

Existenz. Skalarprodukt auf V induziert ein Skalarprodukt auf U . Nach Satz 35 existiert eine orthonormalen Basis (b_1, \dots, b_m) in U . Betrachte $u := \langle v, b_1 \rangle b_1 + \langle v, b_2 \rangle b_2 + \dots + \langle v, b_m \rangle b_m$. Wir zeigen: u ist die Projektion von v . Tatsächlich, $v - u = v - \langle v, b_1 \rangle b_1 - \dots - \langle v, b_m \rangle b_m$. Deswegen

$$\langle v - u, b_i \rangle = \langle v, b_i \rangle - \langle v, b_1 \rangle \langle b_1, b_i \rangle - \dots - \langle v, b_m \rangle \langle b_m, b_i \rangle = \langle v, b_i \rangle - \langle v, b_i \rangle = 0.$$

Also ist $v - u$ orthogonal zu allen b_i und deswegen zu allen $u' \in U$. Damit ist die Existenz der orthogonalen Projektion bewiesen.

Wir zeigen jetzt: für jedes $u' \in U$, $u' \neq u$ ist

$\langle v - u', v - u' \rangle > \langle v - u, v - u \rangle$ (wobei u die orthogonale Projektion von v auf U ist).

Offensichtlich, $v - u' = v - u + \underbrace{u - u'}_{u'' \in U}$. Da $u'' \in U$ ist, ist u'' zum

Vektor $v - u$ orthogonal, also $\langle v - u, u'' \rangle = \langle u'', v - u \rangle = 0$.

Dann gilt: $\langle v - u', v - u' \rangle = \langle v - u + u'', v - u + u'' \rangle \stackrel{\text{Linearität}}{=}$

$$\underbrace{\langle v - u, v - u + u'' \rangle}_0 + \underbrace{\langle u'', v - u + u'' \rangle}_0 \stackrel{\text{Linearität}}{=} \langle v - u, v - u \rangle + \langle v - u, u'' \rangle + \langle u'', v - u \rangle + \langle u'', u'' \rangle = \langle v - u, v - u \rangle + \langle u'', u'' \rangle.$$

Da $\langle u'', u'' \rangle > 0$ nach Definition von Skalarprodukt weil $u'' \neq \vec{0}$ ist, ist

$\langle v - u', v - u' \rangle = \langle v - u, v - u \rangle + \text{etwas positives,}$

schließlich $\langle v - u', v - u' \rangle > \langle v - u, v - u \rangle,$



Wicht. Formel aus dem Beweis von Lemma 31:

$Proj_U(v) = \langle v, b_1 \rangle b_1 + \langle v, b_2 \rangle b_2 + \dots + \langle v, b_m \rangle b_m$, wobei (b_1, \dots, b_m) eine orthonormierte Basis in U ist.

Geometrische Beschreibung des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens: Für $k \geq 2$ gilt

$$b_k = a_k - Proj_{span(\{a_1, \dots, a_{k-1}\})}(a_k).$$

Tatsächlich, die Formel für b_k war

$$b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i = a_k - Proj_{span(\{a_1, \dots, a_{k-1}\})}(a_k),$$

weil $\left\{ \frac{b_1}{\sqrt{\langle b_1, b_1 \rangle}}, \dots, \frac{b_{k-1}}{\sqrt{\langle b_{k-1}, b_{k-1} \rangle}} \right\}$ eine orthonormale Basis in $span(\{a_1, \dots, a_{k-1}\})$ ist.

$$a = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die Vektoren

und projizieren den Vektor b orthogonal auf $\text{span}(a)$.

Dann gilt: $\langle a, a \rangle = \frac{1}{3}(1^2 + 1^2 + 1^2) = 1$, also ist die Basis (a) in $\text{span}(a)$ bereits orthonormiert.

$$\langle a, b \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 7 \cdot 1) = \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Dann ist } \text{Proj}_{\text{span}(a)}(b) = \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot a = \frac{8}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$