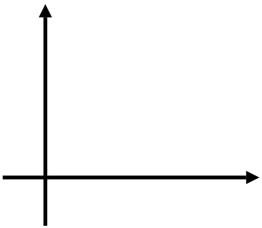
Lernziele der 13. Woche

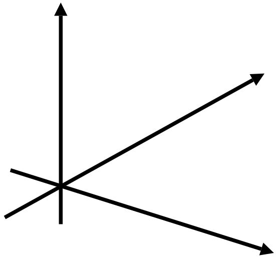
Die Studierenden sollen:

- die Definitionen von Länge und Winkel verstehen, berechnen können und mit Definitionen aus der Schule vergleichen können.
- die Cauchy-Schwarz-Ungleichung formulieren, beweisen und anwenden können.
- die Definition und Eigenschaften von quadratischen Matrizen kennen und anwenden können.
- zeigen können, dass jede symmetrische Matrix diagonalisierbar ist.
- den Trägheitssatz von Sylvester anwenden können.

Link zur Schulgeometrie

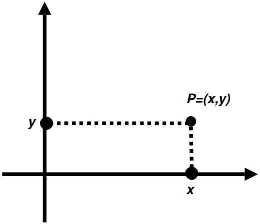
Schuldefinition Ein kartesisches (descartsches) Koordinatensystem in der Ebene besteht aus zwei orthogonalen orientierten Geraden. Ein kartesisches (descartsches) Koordinatensystem im Raum besteht aus drei paarweise orthogonalen orientierten Geraden, die alle einen gemeinsamen Punkt haben.

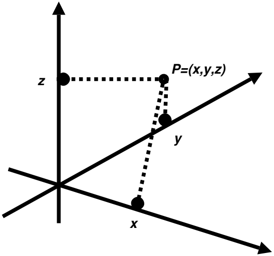




Link zur Schulgeometrie

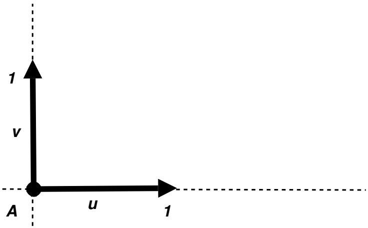
Die Koordinaten eines Punkts P sind die vorzeichenbehafteten Abstände zu den Fußpunkten der Lote des Punktes auf die Geraden. Das Vorzeichen ist „$+$“, falls das Lot auf der positiven Hälfte der Geraden liegt, und „$-$“, falls das Lot auf der negativen Hälfte der Geraden liegt



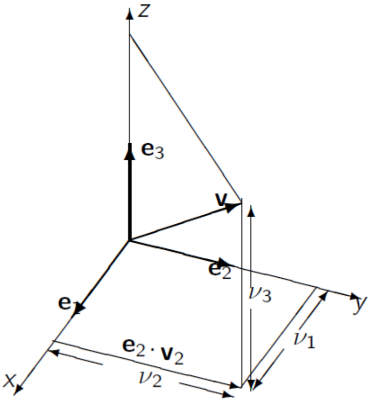


Kartesische Koordinaten als Koordinaten bzgl. einer Basis

Wir zeigen: Falls die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ orthogonal sind und deren Länge gleich 1 ist, dann sind die Koordinaten jedes Vektors in der Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ der Ebene gleich den kartesischen Koordinaten (bzgl. der Geraden, die von den Vektoren u und v erzeugt werden).
Nehmen wir einen Punkt A in der Ebene. Man betrachte zwei orthogonale Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ mit Anfang in A. Man betrachte die erzeugten (geordneten) Geraden (X-Achse und Y-Achse). Der Vektor $\vec{w}$ habe Koordinaten $\binom{x}{y}$ in der Basis $(\vec{u}, \vec{v})$, also $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$. Da die Länge des Vektors $x\vec{u}$ gleich $|x|$ ist, ist der Abstand zwischen der orthogonalen Projektion auf die X-Achse und A gleich x. Ähnlich ist der Abstand zwischen der orthogonalen Projektion auf die Y-Achse und A gleich y. Also sind die kartesische Koordinaten auch $\binom{x}{y}$.



Kartesische Koordinaten als Koordinaten bzgl. einer (orthonormalen) Basis in D3

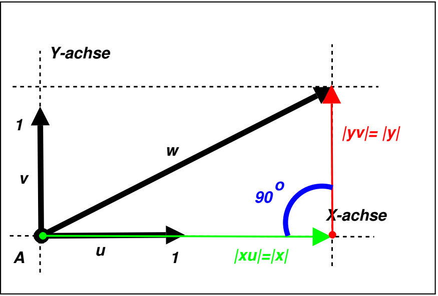


Die Länge

Def. *Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Für jeden Vektor $v \in V$ heißt die Zahl $\sqrt{\langle v, v\rangle}$ die Länge von v und wird $|v|$ bezeichnet.*

Bemerkung. Die Länge des Vektors ist wohldefiniert, da nach Definition des Skalarprodukts $\langle v, v\rangle \geq 0$ gilt. Ferner gilt: $|v| > 0$ für $v \neq \vec{0}$ und für $v = \vec{0}$ ist $|v| = 0$.

Bemerkung *Auf der Ebene bzw. im Raum ist die Länge eines Vektors im Sinne der Definition oben die „übliche" Länge.*



Tatsächlich, wir betrachten eine kartesische Basis (u, v) in der Ebene (die Vektoren u, v sind zueinander orthogonal und haben die Länge 1). Dann ist die Länge von $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ gegeben durch $|w|^2 \overset{\text{Def.}}{=} \langle w, w\rangle = \langle x\vec{u} + y\vec{v}, x\vec{u} + y\vec{v}\rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} \underbrace{\langle x\vec{u}, x\vec{u}\rangle}_{=x^2} + \underbrace{\langle x\vec{u}, y\vec{v}\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y\vec{v}, x\vec{u}\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y\vec{v}, y\vec{v}\rangle}_{=y^2} = x^2 + y^2 \overset{\text{Pythagoras}}{=}$ Die „übliche" Länge (weil alle Winkel im Parallelogramm $\pi/2$ sind).

Rechnen Sie selbst: berechnen Sie die Länge von v in $(\mathbb{R}^2, \langle\ ,\ \rangle_{\text{standard}})$

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

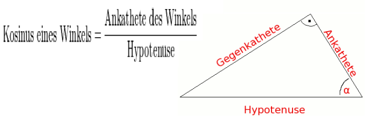
Antwort. $|v| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{3 \cdot 3 + 4 \cdot 4} = \sqrt{9 + 16} = 5.$

Der Winkel

Def. *Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Für je zwei Vektoren $u \neq \vec{0}, v \neq \vec{0}$ heißt die Zahl* $\arccos\left(\frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|}\right) \in [0,\pi]$ *der Winkel zwischen u und v.*

Bemerkung *Um zu zeigen, dass der Winkel zwischen u und v wohldefiniert ist, werden wir gleich die Cauchy-Schwarz-Ungleichung zeigen: $-1 \leq \frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|} \leq 1$, d.h. $|\langle u,v\rangle| \leq |u|\,|v|$.*

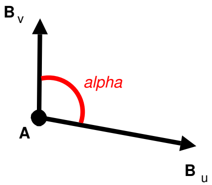
Um Winkel zu definieren, brauchen wir deswegen die Funktion cos. In der Schule haben wir aber cos mit Hilfe eines Winkels definiert; also befinden wir uns in einer logischen Schleife.



In der Analysis-Vorlesung wird die Funktion cos (und deswegen auch arccos) rein analytisch, also ohne Bezug zur Schulgeometrie eingeführt; so werden wir „die Schleife verlassen“

Bemerkung *In der Ebene/Im Raum ist der Winkel im Sinne der Definition oben der übliche Winkel*

Wiederholung – Schulgeometrie: In der Ebene/Im Raum ist $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(alpha)$. Also ist $\cos(alpha) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{u}||\vec{v}|}$.



Rechnen Sie bitte selbst:

Im $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt berechne man den Winkel zwischen den Vektoren
$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung. $\cos(\alpha) = \frac{\langle \binom{0}{2}, \binom{-1}{1} \rangle}{\sqrt{\langle \binom{0}{2}, \binom{0}{2} \rangle \cdot \langle \binom{-1}{1}, \binom{-1}{1} \rangle}} = \frac{2}{\sqrt{4 \cdot 2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dann ist $\alpha = \arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 45^\circ$.

Rechnen Sie bitte selbst:

Im $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt berechne man den Winkel zwischen den Vektoren
$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Lösung. $\cos(\alpha) = \frac{\langle \binom{3}{4}, \binom{-4}{3} \rangle}{|u| \cdot |v|} = \frac{-3 \cdot 4 + 4 \cdot 3}{|u| \cdot |v|} = \frac{0}{|u| \cdot |v|} = 0.$
Dann ist $\alpha = \arccos(0) = 90^\circ$.

Bemerkung. Wie ich bereits angekündigt habe: die Vektoren sind genau dann orthogonal, d.h., Skalarprodukt davon gleich 0 ist, wenn der Winkel zwischen Vektoren gleich 90° ist.

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Lemma 32 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$. Ferner gilt: $|\langle u, v\rangle| = |u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren linear abhängig sind.

Beweis. Ist $v = \vec{0}$, so sind beide Seiten gleich Null. Sei $v \neq \vec{0}$. Sind die Vektoren linear abhängig, so ist $u = \lambda v$, und
$|\langle u, v\rangle| = |\langle \lambda v, v\rangle| = |\lambda| \cdot |v|^2 = |\lambda v| \cdot |v|$.
Angenommen, die Vektoren sind linear unabhängig. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle u + tv, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle u, u + tv\rangle + t\langle v, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=}$$
$$\langle u, u\rangle + \underbrace{t\langle u, v\rangle + t\langle v, u\rangle}_{2t\langle u, v\rangle \text{ wegen Symmetrie}} + t^2\langle v, v\rangle = \underbrace{|u|^2}_{c} + \underbrace{2\langle u, v\rangle}_{b} t + t^2 \underbrace{|v|^2}_{a}.$$

Dies ist ein quadratisches Polynom in t. Es hat keine Nullstelle, da $\langle u + tv, u + tv\rangle$ gleich Null sein kann nur falls $u = -tv$, also falls u, v linear abhängig sind, was wir oben explizit ausgeschlossen haben. Da das Polynom keine Nullstelle hat, ist die Diskriminante negativ, also

$$\mathcal{D} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = \langle u, v\rangle^2 - |v|^2|u|^2 < 0. \quad \text{Dann ist } |\langle u, v\rangle| < |v||u|. \quad \square$$

Beweis der Dreiecksungleichung mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Die **Dreiecksungleichung** lautet:

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|,$$

für alle Vektoren u, v in einem Vektorraum mit einem Skalarprodukt.

Beweis: Die Norm (=Länge) eines Vektors w ist definiert als: $\|w\| = \sqrt{\langle w, w\rangle}$. Wir betrachten die Norm von $(u+v)$:

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle.$$

Jetzt benutzen wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ und erhalten:

$$\|u+v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2.$$

Rechtsseite als Binom vereinfachen:

$$\|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2.$$

Da die Norm $\|u+v\|$ nicht negativ ist, folgt:

$$\|u+v\| \leq \sqrt{(\|u\| + \|v\|)^2} = \|u\| + \|v\| \qquad \square.$$

Orthogonale Matrizen

Def. Eine $n \times n$-reelle Matrix A heisst orthogonal, falls $A^t A = Id$ ist.
Lemma 33. *Man betrachte $\mathbb{R}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei $A \in Mat(n, n)$. Dann gilt: A ist genau dann orthogonal, falls $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\langle Av, Au \rangle = \langle v, u \rangle$.*

Bemerkung. Die Eigenschaft "$\forall u, v \in \mathbb{R}^n \ \langle Av, Au \rangle = \langle v, u \rangle$" heißt in Jargon: "*A* erhält Skalarprodukt".)

Beweis $\Longrightarrow$: Angenommen $A^t A = Id$. Dann gilt:
$\langle Ax, Ay \rangle = (Ax)^t (Ay) = x^t A^t A y = x^t Id y = x^t y = \langle x, y \rangle$.
Beweis $\Longleftarrow$: Angenommmen $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$. Dann ist $(Ax)^t Ay = x^t A^t Ay = \sigma_{A^t A}(x, y)$. Da $(Ax)^t Ay = \langle x, y \rangle = \sigma_{Id}(x, y)$, ist $A^t A = Id$. $\square$

Lemma 33. *Man betrachte $\mathbb{R}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei $A \in Mat(n,n)$. Dann gilt: A ist genau dann orthogonal, falls $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\langle Av, Au\rangle = \langle v, u\rangle$.*

Folgerung A. *$A \in Mat(n,n)$ ist genau dann orthogonal, wenn das Standard-Skalarprodukt der $i-$ten Spalte mit der $j-$ten Spalte gleich* $\begin{cases} 1, & falls\ i = j \\ 0, & falls\ i \neq j \end{cases}$.

Beweis: Ausrechnen. Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ eine $n \times n$- Matrix. Dann ist $A^t A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$; die $(i,j)-$Eintrag davon ist dann Standard-Skalarprodukt von $\underbrace{i\text{-ten Spalte von } A}_{i\text{-ten Zeile von } A^t}$ und j-ten Spalte von A.

Ist $A^t A = Id$, so ist Standard-Skalarprodukt von i-ten Spalte von A und i-ten Spalte von A gleich 1, und von i-ten Spalte von A und j-ten Spalte für $i \neq j$ gleich 0 sein. $\square$

Orthogonale Matrizen bilden eine Untergruppe von GL_n

(Diese Gruppe wird mit O_n bezeichnet).

Beweis. Jede orthogonale Matrix ist nicht ausgeartet, also gilt $O_n \subseteq GL_n$. Da

$$1 = \det(Id) = \det(A^t A) = \det(A^t)\det(A) = \det(A)^2,$$

folgt $\det(A) = \pm 1 \neq 0$.
Es bleibt zu zeigen, dass für alle $A, B \in O_n$ gilt: (i) $AB \in O_n$ und (ii) $A^{-1} \in O_n$.

(i) Sei $A, B \in O_n$. Dann gilt

$$(AB)^t(AB) = B^t(A^t A)B = B^t Id B = B^t B = Id.$$

Also ist AB orthogonal.

(ii) Sei $A \in O_n$. Dann gilt per Definition $A^t = A^{-1}$. Somit folgt $AA^t = Id$. Dies ist äquivalent zu $(A^t)^t A^t = Id$.

Wir sehen, dass die Inverse von A^t die Transponierte von A^t ist, also A^t orthogonal ist. Damit ist auch $A^{-1} = A^t \in O_n$ gezeigt. $\square$

Folgerung A. *$A \in Mat(n,n)$ ist genau dann orthogonal, wenn das Standard-Skalarprodukt der $i-$ten Spalte mit der $j-$ten Spalte gleich* $\left\{ \begin{array}{ll} 1, & falls\ i=j \\ 0, & falls\ i \neq j \end{array} \right.$.

Folgerung B. $A \in Mat(n,n)$ ist genau dann orthogonal, falls die Vektoren $Ae_1, ..., Ae_n$ (also, die Spalten von A) eine orthonormale Basis bzgl. Standard-Skalarprodukt bilden.

Beweis $\Longrightarrow$: Sei A orthogonal. Dann ist sie nichtausgeartet, deswegen bilden die Vektoren Ae_i, also die Spalten von A, eine Basis. Nach Folgerung A erfüllen die Vektoren Ae_i, die Eigenschaft $\langle Ae_i, Ae_j\rangle = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ für } i=j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{array} \right.$,und dass ist die Bedienung, dass die Basis $(Ae_1, ..., Ae_n)$ orthonormal ist.

Beweis $\Longleftarrow$: Wenn die Basis $(Ae_1, ..., Ae_n)$ orthonormal ist, erfüllen die Vektoren Ae_i die Eigenschaft $\langle Ae_i, Ae_j\rangle = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ für } i=j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{array} \right.$; nach Folgerung A ist dann die Matrix A orthogonal.

Diagonalisiereung symmetrischer Matrizen über $\mathbb{R}$

Wiederholung: A heißt symmetrisch, falls $A^t = A$.
Satz 37. *Ist A symmetrisch, so gibt es eine orthogonale Matrix O, sodass $O^{-1}AO$ diagonal ist. (Symmetrische Matrizen über $\mathbb{R}$ sind diagonalisierbar mit Hilfe von ortogonalen Transformationen.)*

Bemerkung Da $O^t = O^{-1}$, ist auch O^tAO diagonal. Also sind Matrizen von symmetrischen Bilinearformen auf reellen Vektorräumen diagonalisierbar mit Hilfe eines Basiswechsels.

Hilfsaussage 1 *Sei O eine orthogonale Matrix und A eine symmetrische Matrix. Dann gilt: $O^{-1}AO$ ist symmetrisch.*

Beweis: $\left\{ \begin{array}{c} O^{-1} = O^t \\ A^t = A \end{array} \right. \quad \Longrightarrow (O^{-1}AO)^t = (O^t AO)^t = O^t A^t (O^t)^t = O^{-1} AO,$ $\square$

Hilfsaussage 2. *Jede symmetrische $(n \times n)$-Matrix $A \in Mat(n, n, \mathbb{R})$ hat mind. einen reellen Eigenwert.*

Beweis: Man betrachte eine (vielleicht komplexe) Nullstelle μ von $\aleph_A$ (Existenz: Hauptsatz der Algebra; siehe auch die Folgerung A oben) und den zugehörigen (vielleicht komplexen) Eigenvektor. Dann ist $\bar{v}$ auch ein Eigenvektor mit Eigenwert $\bar{\mu}$. In der Tat,

$\bar{A}\bar{v} \overset{\text{Rechnenregeln}}{=} \overline{Av} \overset{\text{Weil Eigenvektor}}{=} \overline{\mu v} \overset{\text{Rechnenregeln}}{=} \bar{\mu}\bar{v}$.

Wir machen eine Nebenrechnung:

$$\bar{v}^t v = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \bar{v}_1 \cdot v_1 + \dots + \bar{v}_n \cdot v_n \overset{(***)}{=} |v_1|^2 + \dots |v_n|^2.$$

Dann gilt $\bar{\mu}\bar{v}^t v = \overline{\mu v}^t v = \overline{(Av)}^t v = (A\bar{v})^t v = \bar{v}^t A v = \mu \bar{v}^t v$.

Also $\bar{\mu}(|v_1|^2 + \dots + |v_n|^2) = \mu(|v_1|^2 + \dots + |v_n|^2)$ und deswegen $\bar{\mu} = \mu$.

Dann ist der Eigenwert μ reell wie wir es wollen. $\square$

Beweis von Satz 37: Nach HA 2 gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$, mit $Av = \lambda_1 v$. OBdA ist $|v| = 1$, sonst $v \stackrel{\text{Ersetze}}{\to} \frac{v}{|v|}$. Wir betrachten eine orthogonale Matrix O, sodass $Oe_1 = v$.
(Existenz — Satz 35: Man kann eine orthonormierte Basis $o_1, ..., o_n$ finden sodass $o_1 = v$. Die Matrix O sodass $Oe_i = o_i$ (also s.d. die $i-$te Spalte o_i ist) für jedes i, ist orthogonal.)
Dann ist $O^{-1}AOe_1 = O^{-1}Av = \lambda_1 O^{-1}v = \lambda_1 e_1$, also
$O^{-1}AO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ & A_{n-1} \end{pmatrix} \stackrel{\text{HA 1}}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix}$, wobei A_{n-1} eine symmetrische Matrix ist.
Wir wiederholen die Prozedur: Es gibt ein reellen Eigenvektor v von A_{n-1} und deswegen eine orthogonale $(n-1) \times (n-1)$-Matrix O_{n-1}, sodass $O_{n-1}^{-1} A_{n-1} O_{n-1} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & \\ & A_{n-2} \end{pmatrix}$, wobei A_{n-2} symmetrisch ist. Dann gilt $\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & A_{n-2} \end{pmatrix}$, also
$\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1}^{-1} \end{pmatrix} O^{-1}AO \begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & A_{n-2} \end{pmatrix}$, u.s.w. (Da O_{n-1} orthogonal ist, sind $\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1}^{-1} \end{pmatrix}$ auch orthogonal, und deswegen auch $\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix} O$, $\left(\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix} O \right)^{-1}$. Nach $n-1$ Schritten bekommen wir die Aussage. $\square$

Wiederholung – Satz 37 *Ist A symmetrisch, so gibt es eine orthogonale Matrix O, sodass $O^{-1}AO$ diagonal ist.*

Folgerung *Ist A symmetrisch, so gibt es eine Matrix $B \in Mat(n, n)$ mit* $\det(B) \neq 0$, *sodass B^tAB die Form*

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

hat, wobei auf der Diagonale r mal „+1“ und s mal „-1“ steht.

Beweis der Folgerung. Nach Satz 37 gibt es eine orthogonale Matrix O sodass $O^{-1}AO \overset{\text{Weil } O^{-1}=O^t}{=} O^tAO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ist. OBdA können wir annehmen, dass $\lambda_1, ..., \lambda_r$ positiv und $\lambda_{r+1}, ..., \lambda_{r+s}$ negativ sind, und dass $\lambda_{r+s+1} = ... = \lambda_n = 0$: Wir zeigen, dass wir λ_i und λ_j vertauschen, wenn wir O durch ein geeignetes (orthogonales) O' ersetzen.

Tatsächlich, die Matrix $O' := OE_{ij}$ ist auch eine Orthogonalmatrix, weil

$$(OE_{ij})^tOE_{ij} = E_{ij}\underbrace{O^tO}_{Id}E_{ij} \overset{\text{Weil } (E_{ij})^2=Id}{=} Id.$$

Dann ist $(O')^{-1}AO' \overset{\text{Weil } (O')^{-1}=(O')^t}{=} (O')^tAO' = (E_{ij})^tO^tAOE_{ij} =$

$$E_{ij}\begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \lambda_i & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_j & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}E_{ij} \overset{\text{Ausrechnen}}{=} \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \lambda_j & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_i & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Beispiel für „Ausrechnen“: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & \\ & \lambda_1 \end{pmatrix}$

Also ist $O^tAO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & & \\ & & & \lambda_{r+1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_{r+s} & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} := \Lambda,$

wobei $\lambda_1, ..., \lambda_r$ positiv und $\lambda_{r+1}, ..., \lambda_{r+s}$ negativ sind.

Wir „normieren" alle λ_i: für die Matrix

$$N := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} & & & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{r+1}}} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{r+s}}} & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \in$$

$Mat(n,n)$ mit $\det \neq 0$

gilt $\underbrace{N^tO^t}_{T^t} A \underbrace{ON}_{T} = N^t\Lambda N = (*)$ $\square$

Bemerkung $T = ON$ ist nichtausgeartet, da O und N nichtausgeartet

Zusammenfassung

Ziel war: Symmetrische Bilinearformen untersuchen.
Methode: Suchen einer Basis sodass die Matrix „einfach" ist.
Methode umformuliert: In welche „einfachste" Form kann man eine symmetrische Matrix A mit Hilfe der Transformation $A \mapsto T^t A T$, wobei T nichtausgeartet ist, bringen?

Satz 37 / Folgerung geben die Antwort: Man kann die Matrix A in die Form

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

bringen, wobei auf der Diagonale r mal „$+1$" und s mal „-1" steht.
Frage: Kann man das noch besser machen?
Antwort – Nein – Trägheitssatz von Silvester

Trägheitssatz von Silvester

Satz 38 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einer symmetrischen Bilinearform σ und sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis von V, sodass in dieser Basis die Matrix von σ wie folgt ist:*

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}$$

, wobei auf der Diagonale r mal „+1“ und s mal „-1“ steht. Dann sind die Zahlen r und s eindeutig durch die Bilinearform σ festgelegt. Insbesondere gilt:

$$r = max\{dim(W) \text{ s.d. } W \subset V \text{ Untervektorraum mit } \sigma(w,w) > 0 \text{ für alle } w \in W,\ w \neq 0 \text{ ist}\}, \qquad (*)$$

$$s = max\{dim(W) \text{ s.d. } W \subset V \text{ Untervektorraum mit } \sigma(w,w) < 0 \text{ für alle } w \in W,\ w \neq 0 \text{ ist}\}. \qquad (**)$$

Beweis. Wir betrachten $V_+ = span(\{b_1, ..., b_r\})$. Für jedes $v \in V_+$, $v \neq \vec{0}$, mit den Koordinaten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ ist $\sigma(v, v) = x^t I d x = x_1^2 + ... + x_r^2 > 0$. Also,

$max\{dim(W) \text{ s.d. } W \subset V \text{ Untervektorraum mit } \sigma(w, w) > 0 \text{ für alle } w \in W,\ w \neq \vec{0} \text{ ist}\} \geq r$.

Angenommen es gibt ein W, s.d. $dim(W) = r' > r$ und s.d. für alle $v \in W$, $v \neq \vec{0}$, $\sigma(v, v) > 0$ ist (Widerspruchbeweis). Wir betrachten die Basis $({b'}_1, ..., {b'}_{r'})$ in W und die Vereinigung $\{{b'}_1, ..., {b'}_{r'}, b_{r+1}, ..., b_n\}$. Diese Menge hat mehr als $n = dim(V)$ Elemente und ist deswegen linear abhängig. Dann gibt es $(\lambda'_1, ..., \lambda'_{r'}, \lambda_{r+1}, ..., \lambda_n) \neq (0, ..., 0)$ sodass $\lambda'_1 b'_1 + ... + \lambda'_{r'} b'_{r'} + \lambda_{r+1} b_{r+1} + ... + \lambda_n b_n = \vec{0}$. Dann ist

$$\underbrace{-{\lambda'}_1 {b'}_1 - ... - {\lambda'}_{r'} {b'}_{r'}}_{w \in W} = \underbrace{\lambda_{r+1} b_{r+1} + ... + \lambda_n b_n}_{v}.$$

Ist $w \neq \vec{0}$, so ist $\sigma(w, w) > 0$. Für v gilt:

$$\sigma(v, v) = (\lambda_{r+1} \cdots \lambda n) \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{r+1} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = -\lambda_{r+1}^2 - ... - \lambda_{r+s}^2 \leq 0.$$

Also $\sigma(w, w) > \sigma(v, v)$. Da $w = v$, bekommen wir einen Widerspruch. Also ist die Zahl r eindeutig durch $(*)$ bestimmt. Beweis für s analog. $\square$

Signatur der symmetrischen Bilinearform

Nach Satz 37 kann man die Matrix einer Bilinearform mittels Basiswahl auf die Form
$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$
bringen, wobei auf der Diagonale r mal „$+1$“ und s mal „-1“ steht.

Nach Satz 38 sind die Zahlen r, s eindeutig bestimmt. Das Tripel $(r, s, n - r - s)$ heißt die Signatur der Bilinearform σ.

Seien $A \in Mat(n, n)$ eine symmetrische Matrix und $\lambda_1, ..., \lambda_m$ paarweise verschiedene Eigenwerte. OBdA seien $\lambda_1, ..., \lambda_{r'}$ positiv und $\lambda_{r'+1}, ..., \lambda_{r'+s'}$ negativ.

Satz 39 *Sei A eine $n \times n$- Matrix. Dann gibt es orthogonale Matrizen O, O_1 und eine diagonale Matrix Λ s.d. $A = O_1 \Lambda O$.*

Geometrische Deutung: Jede lineare Abbildung ist die Hintereinanderausführung einer Drehung (oder einer Drehung und einer Spiegelung), einer Streckung und wieder einer Drehung (oder einer Drehung und einer Spiegelung) .

Bemerkung. Unter Streckung verstehen wir hier die Abbildung $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix}$, also die Linearabbildung mit der Diagonalmatrix. Bitte nicht mit der in Vorl. 10 eingeführten „Streckung“ $x \mapsto \lambda x$ verwechseln.

Folgerung. *Sei A eine $n \times n$- Matrix. Dann gibt es orthogonale Matrizen O und eine symmetrische Matrix S s.d. $A = OS$.*

Beweis der Folgerung: $A \stackrel{\text{Satz 39}}{=} O_1 \Lambda O = O_1 \underbrace{O O^t}_{Id} \Lambda O = \underbrace{O_1 O}_{\text{orthogonal}} \underbrace{O^t \Lambda O}_{\text{symmetrisch}}$, $\square$

Beweis des Satzes 39. Wir betrachten die Matrix A^tA. Sie ist symmetrisch, $(A^tA)^t = A^t {A^t}^t = A^tA$, und deswegen (Satz 37) mit Hilfe einer orthogonalen Transformation diagonalisierbar.

Dann gibt es eine orthonormale Basis $(o_1, ..., o_n)$ sodass $\sigma_{A^tA}(o_i, o_i) = \lambda_i$ und $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) \overset{\text{für } j \neq i}{=} 0$. OBdA ist $\lambda_1, ..., \lambda_m \neq 0$ und $\lambda_{m+1} = ... = \lambda_n = 0$.

Wir betrachten die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_n$. Für $i, j < m$ gilt $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) = o_i^t A^tA o_j = (Ao_i)^t(Ao_j) = \left\{ \begin{array}{l} \lambda_i \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{array} \right.$. Also sind die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_m$ nicht gleich $\vec{0}$ und zueinander orthogonal. Mit dem Gramm-Schmidt'schen Verfahren kann man $Ao_1, ..., Ao_m$ zu einer orthogonalen Basis $(Ao_1, ..., Ao_m, o'_{m+1}, ..., o'_n)$ ergänzen und dann normieren:

$b_1 = \frac{1}{|Ao_1|} Ao_1, ..., b_m = \frac{1}{|Ao_m|} Ao_m, b_{m+1} = \frac{1}{|o'_{m+1}|} o'_{m+1}, ..., b_n = \frac{1}{|o'_n|} o'_n$. Wir betrachten die Matrix B, s.d. $Be_i = b_i$. Diese Matrix ist orthogonal. Nach Konstruktion ist $Ao_i = \gamma_i b_i$. Dann ist $AOe_i = \gamma_i Be_i$ und deswegen

$$B^tAO = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma_n \end{pmatrix}.$$

□