Wicht. Bsp.: Äquivalenzklassen in GL_n

Wiederholung. $GL_n := \{A \in Mat(n,n) \mid det(A) \neq 0\}$; $A \sim B \iff \det(A^{-1}B) > 0$.

Bestimmen wir jetzt die Äquivalenzklasse bzgl. dieser Äquivalenzrelation.

Ich behaupte, dass es zwei Äquivalenzklassen gibt.

$GL_n^+ := \{A \in GL_n \mid \det(A) > 0\}$ und $GL_n^- := \{A \in GL_n \mid \det(A) < 0\}$.

In der Tat, zwei Matrizen aus GL_n^+, z.B. A und B, sind zueinander äquivalent: $\det(A^{-1}B) = \frac{\det(B)}{\det(A)} > 0$ weil $\det(A) > 0$, $\det(B) > 0$.

Zwei Matrizen aus GL_n^-, z.B. A und B, sind ebenfalls zueinander äquivalent: $\det(A^{-1}B) = \frac{\det(B)}{\det(A)} > 0$ weil $\det(A) < 0$, $\det(B) < 0$.

Wenn A in GL_n^+ und B in GL_n^- liegt, dann ist A zu B nicht äquivalent: $\det(A^{-1}B) = \frac{\det(B)}{\det(A)} < 0$.

Also ist die Äquivalenzklasse einer Matrix mit det > 0, z.B. der Matrix Id, $[Id] := \{A \in GL_n \mid \det(A) > 0\}$.

Die Äquivalenzklasse einer Matrix B mit $\det(B) < 0$ ist $[B] := \{A \in GL_n \mid \det(A) < 0\}$.

Bemerkung. In diesem Bsp ist offensichtlich, dass $[Id] \cup [B] = GL_n$ und $[Id] \cap [B] = \emptyset$, weil jede Matrix mit det $\neq 0$ entweder det > 0 oder det < 0 hat.

Wicht. Bsp.

Als Menge nehmen wir die Menge aller Basen (in einem $n-$dimensionalen Vektorraum V):
$\mathbb{B} := \{\text{Alle Basen in } V\}$.
Auf dieser Menge definieren wir die folgende Relation:
Wir sagen, dass zwei Basen $(a_1, ..., a_n) \sim (b_1, ..., b_n)$ in Relation stehen, wenn die Determinante der Transformationsmatrix von $(a_1, ..., a_n)$ zu $(b_1, ..., b_n)$ positiv ist.
Bemerkung. Die Determinante der Transformationsmatrix kann nicht gleich 0 sein, weil die Spalten einer Transformationsmatrix linear unbhängig sind und weil die Vektoren $b_1, ..., b_n$ linear unabhängig sind (die Spalten sind die Koordinaten dieser Vektoren in der Basis $(a_1, ..., a_n)$).
Um zu zeigen, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist, benötigen wir das folgende Lemma:

Lemma 34. Seien $(a_1, ..., a_n)$ und $(b_1, ..., b_n)$ Basen im $\mathbb{R}^n$. Die Transformationsmatrizen von der Standard-Basis $(e_1, ..., e_n)$ zu $(a_1, ..., a_n)$ und zu $(b_1, ..., b_n)$ bezeichnen wir mit A bzw. B. Dann gilt: Die Basen $(a_1, ..., a_n)$ und $(b_1, ..., b_n)$ sind genau dann äquivalent, wenn $\det(A^{-1}B) > 0$.

Bemerkung. Nach Definition der Transformationsmatrix (siehe Vorl. 13) sind die Spalten von A die Vektoren $(a_1, ..., a_n)$ und die Spalten von B die Vektoren $(b_1, ..., b_n)$.

Beweis. Nach Satz 25 gilt für jeden Vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$:

$C_{(a_1,\dots,a_n)}(x) = A^{-1}x$, $C_{(b_1,\dots,b_n)}(x) = B^{-1}x$.
Dann ist $AC_{(a_1,\dots,a_n)}(x) = x$, $BC_{(b_1,\dots,b_n)}(x) = x$, folglich $AC_{(a_1,\dots,a_n)}(x) = BC_{(b_1,\dots,b_n)}(x)$. Dann ist $C_{(b_1,\dots,b_n)}(x) = B^{-1}AC_{(a_1,\dots,a_n)}(x)$. Schliesslich ist $(B^{-1}A)^{-1} = A^{-1}B$ die Transformationsmatrix von $(a_1, ..., a_n)$ zu $(b_1, ..., b_n)$. $\square$

Folgerung. Die oben eingeführte Relation auf der Menge $\mathbb{B}$ der Basen in V ist eine Äquivalenzrelation. Es gibt genau zwei Äquivalenzklassen.

Beweis. OBdA können wir annehmen, dass $V = \mathbb{R}^n$ (weil alle $n-$dimensionalen Vektorräume zu $\mathbb{R}^n$ isomorph sind). Wir identifizieren jede Basis $(a_1, ..., a_n)$ mit der (nichtausgearteten) Matrix A, deren Spalten die Vektoren $(a_1, ..., a_n)$ sind. Dann stehen nach Lemma 34 zwei Basen $(a_1, ..., a_n)$ und $(b_1, ..., b_1)$ genau dann in Relation, wenn die entsprechenden Matrizen A und B die Bedingung $\det(A^{-1}B) > 0$ erfüllen. Aber das ist genau die Relation aus dem **Wicht. Bsp.** oben. Deswegen ist sie, wie oben bewiesen, eine Äquivalenzrelation. Wie ebenfalls oben bewiesen wurde, gibt es genau zwei Äquivalenzklassen. $\square$

Bemerkung. Ferner gilt: Zwei Basen $(a_1, ..., a_n)$ und $(b_1, ..., b_n)$ liegen genau dann in einer Äquivalenzklasse, wenn $\det(A^{-1}B) > 0$, und genau dann in verschiedenen Äquivalenzklassen, wenn $\det(A^{-1}B) < 0$.

Orientation auf einem Vektorraum

Def. Wir sagen, dass auf einem endlichdimensioanlen Vektorraum eine Orientation gewählt ist, wenn wir eine (von zwei möglichen) Äquivalenzklassen in der Menge aller Basen gewählt haben.
Die Basen aus der gewählten Äquivalenzklasse nennen wir positiv.
Die anderen Basen (also die Basen aus der zweiten Äquivalenzklasse) nennen wir negativ.
Z.B. kann man im Vektorraum $\mathbb{R}^n$ als Orientation die Äquivalenzklasse der Standardbasis $(e_1, ..., e_n)$ wählen. Dann sind diejenigen Basen $(a_1, ..., a_n)$ positiv, für die die Matrix A (deren Spalten die Vektoren a_i sind) positive Determinante hat.

(Einige Exoten werden vielleicht bevorzugen, als Orientation die Äquivalenzklasse der Basis $(\underbrace{e_2, e_1}_{\text{Umgestellt}}, e_3, ..., e_n)$ zu wählen – das ist auch nicht verboten.)

Rechnen Sie selbst: Welche der Basen sind positiv?

Welche von den Basen sind positiv und welche negativ orientiert? (Als Orientation in $\mathbb{R}^n$ wählen wir die Äquivalenzklasse der Standardbasis $(e_1, ..., e_n)$.)

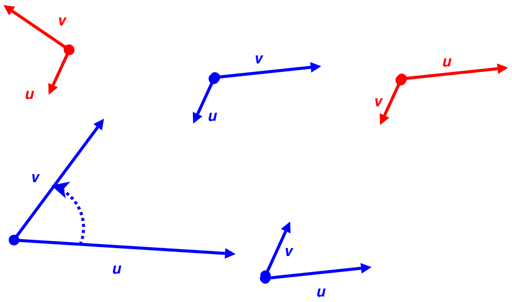
$\left(\binom{0}{1}, \binom{1}{0}\right)$

$\left(\binom{0}{1}, \binom{-1}{0}\right)$

Positive Basen in der Ebene (Wiederholung)

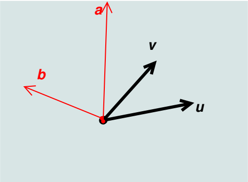
Eine Basis $(\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AC})$ in der geometrischen Ebene nennen wir positiv oder positiv-orientiert, falls wir die Halbgerade AB gegen den Uhrzeigersinn um einen Winkel $< 180^o$ drehen müssen, um die Halbgerade AC zu erreichen, sonst ist sie negativ.

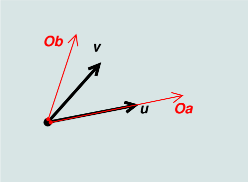
Bemerkung. Die Definition hat nur in der geometrischen Ebene (also nicht in einem abstrakten Vektorraum) Sinn.
Wir zeigen, dass diese „alte“ Definition mit der neuen Definition übereinstimmt.



Die positiv definiten Basen (nach alter Definition) liegen in einer Äquivalenzklasse

Wir betrachten zwei positive Basen (a, b) und (u, v) in der Ebene und zeigen, dass die Transformationsmatrix positive Determinante hat.

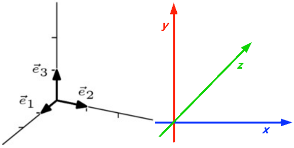




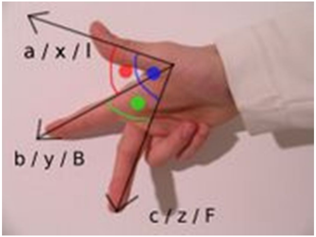
Dazu betrachten wir eine Drehung (orthogonale Transformation mit $det > 0$) O, die $a \mapsto \lambda u$ für ein $\lambda > 0$ überführt. Die Basen (a, b) und (Oa, Ob) liegen nach Definition in der gleichen Äquivalenzklasse.
Wenn die Basen positiv sind, liegen die Vektoren Ob und v in der gleichen Halbebene bzgl. der Geraden $\mathcal{G}_u$.
Dann sind die Koordinaten von Oa, Ob in der Basis (u, v) gleich $\binom{\lambda}{0}, \binom{*}{\mu}$ wobei $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Dann ist die Transformationsmatrix gleich $\begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ und die Determinante der Matrix ist positiv.

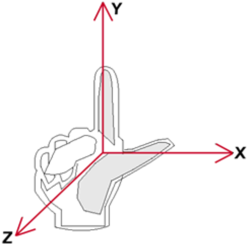
Wahl der Orientierung im 3D-Raum

Wir werden im $\mathbb{R}^3$ mit dem Standard-Skalarprodukt arbeiten. **Wiederholung** *Drei linear unabhängige Vektoren v_1, v_2, v_3 heißen positiv (oder rechts) orientiert, falls die Determinante der Matrix A, die die Vektoren e_1, e_2, e_3 in die Vektoren v_1, v_2, v_3 überführt, positiv ist.*



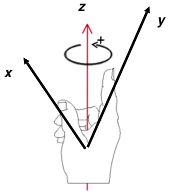
Wenn man die Standard-Basisvektoren „Standard" auf das Bild plaziert, kann man die Orientierung mit Hilfe der **Mnemonischen Drei-Finger-Regel (auch Rechte-Hand-Regel) feststellen:** *Daumen in Richtung des ersten Vektors, Zeigefinger in Richtung des zweiten Vektors, Mittelfinger (rechtwinklig zum Daumen und zum Zeigefinger abgespreizt) zeigt bei einem Rechtssystem in Richtung des dritten Vektors.*



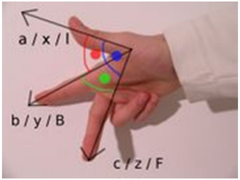


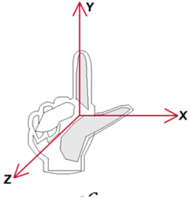
Alternative mnemonische Regel

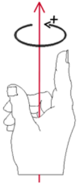
Mnemonische Schraubenregel: Wenn der erste Vektor in den zweiten Vektor gedreht wird, würde sich eine gleichermaßen gedrehte Schraube in Richtung des dritten Vektors bewegen, wenn die Vektoren ein Rechtssystem bilden.

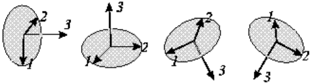


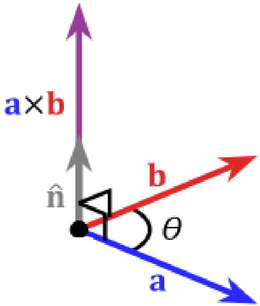
Ein bisschen Üben











Def. *Seien $u, v \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängige Vektoren. Das* Vektorprodukt *$u \times v$ (auch* Kreuzprodukt *genannt) ist derjenige Vektor $w \in \mathbb{R}^3$ mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *$u \times v$ ist orthogonal zu u und v*
2. *$|u \times v| = |u||v|\sin(\theta)$, wobei θ der Winkel zwischen u und v ist.*

Geometrische Interpretation von 2 : *Die Länge von $u \times v$ ist der Flächeninhalt des von u, v aufgespannten Parallelogramms*

3. *Die Vektoren $u, v, u \times v$ sind positiv orientiert.*

Falls u, v linear abhängig sind, setzt man $u \times v := \vec{0}$.

Bemerkung *Für linear unabhängige Vektoren u, v gibt es genau einen Vektor w mit Eigenschaften $1, 2, 3$.*

Beweis. Falls die Vektoren linear abhängig sind, ist $u \times v = \vec{0}$. Sei $\{u, v\}$ linear unabhängig. Eigenschaft 1 bedeutet, dass $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ die Lösung des folgenden linearen Gleichungsystem ist: $\left\{ \begin{array}{c} u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0 \\ v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = 0 \end{array} \right.$.

Das System ist lösbar, weil $rk\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{Satz 27}}{=} rk\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 2$.

Nach Dimensionsformel ist die Lösungsmenge 1-dimensional. Da $\vec{0}$ eine Lösung ist, hat die Lösungsmenge die Form $\{t\bar{w}, \text{wobei } t \in \mathbb{R}\}$. Die zweite Eigenschaft bestimmt die Länge von w und deswegen auch $|t|$. Also haben wir 2 Möglichkeiten für w. Die dritte Eigenschaft lässt uns nur eine Möglichkeit für w (det ist alternierend).

Satz 40 $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$

Mnemonische Regel für das Vektorprodukt:

$u \times v = det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} \overset{Laplace\text{-}Zeilenentwick.}{=}$

$e_1 det \begin{pmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{pmatrix} - e_2 det \begin{pmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{pmatrix} + e_3 det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}.$

Beweis. Wir müssen die Eigenschaften 1,2,3 prüfen.

Eigenschaft 1. $\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} \right\rangle =$

$u_1 det \begin{pmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{pmatrix} - u_2 det \begin{pmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{pmatrix} + u_3 det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 0.$

Eigenschaft 2. $|u||v| \sin(\theta) = |u||v| \sqrt{1 - \cos(\theta)^2} = |u||v| \sqrt{1 - \frac{(u,v)^2}{|u|^2|v|^2}} =$

$\sqrt{|u|^2|v|^2 - (u,v)^2} \overset{\text{Ausrechnen}}{=}$

$\sqrt{(u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2}.$

Eigenschaft 3. Setze $w = u \times v$. Nach Definition müssen wir nachweisen, dass $det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \geq 0$. Nach Laplace-Spaltenentwicklung ist $det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = w_1 det \begin{pmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{pmatrix} - w_2 det \begin{pmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{pmatrix} + w_3 det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} =$

$det \begin{pmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{pmatrix}^2 + det \begin{pmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{pmatrix}^2 + det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}^2 \geq 0,$ □

Rechnen Sie bitte selbst

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-7\\8\\9\end{pmatrix}$$

Folgerung *Es gilt:*

- *Das Vektorprodukt ist bilinear:*
  - $(\lambda' u' + \lambda'' u'') \times v = \lambda'(u' \times v) + \lambda''(u'' \times v)$,
  - $u \times (\lambda' v' + \lambda'' v'') = \lambda'(u \times v') + \lambda''(u \times v'')$
- *Das Vektorprodukt ist antisymmetrisch:* $u \times v = -v \times u$.

Beweis. Man muss nur nachrechnen was passiert, falls wir in $\begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$ statt u $(\lambda' u' + \lambda'' u'')$ einsetzen bzw. u und v vertauschen. $\square$

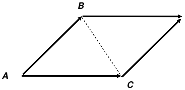
Anwendungen des Vektorprodukts

Flächeninhalte berechnen *Der Flächeninhalt des Parallelogramms mit Seiten $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sei 1. Finde den Flächeninhalt des Parallelogramms mit Seiten $2\vec{a}+\vec{b}$ und $\vec{a}-3\vec{b}$.*

Lösung Flächeninhalt $\stackrel{\text{Def.}}{=} |(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-3\vec{b})| \stackrel{\text{Bilinearität}}{=}$
$|2\vec{a}\times\vec{a} - 6\vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{a} - 3\vec{b}\times\vec{b}| = |0 - 7\vec{a}\times\vec{b} + 0| = |-7\vec{a}\times\vec{b}| = 7.$

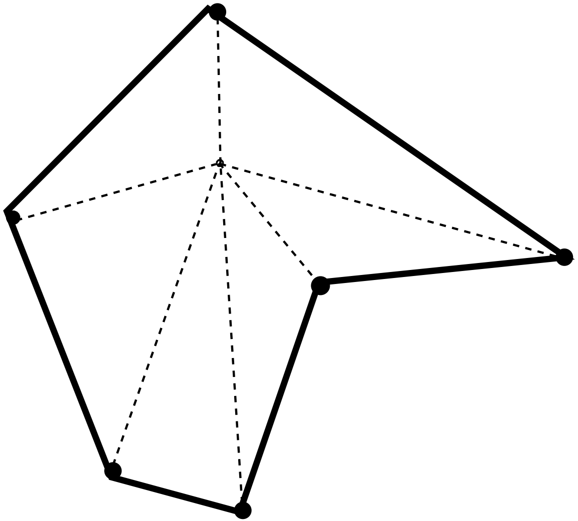
Aufgabe *Finde den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Ecken* $A = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}.$

Lösung Da das Parallelogramm aus zwei gleichen Dreiecken besteht,



ist der Flächeninhalt $= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{54}.$

Da man jedes Polygon in Dreiecke zerlegen kann,



kann man mit Hilfe des Vektorprodukts den Flächeninalt jedes Polygons ausrechnen.

Weitere Anwendungen des Vektorprodukts

Aufgabe Gegeben zwei (linear unabhängige) Vektoren, finden Sie einen Vektor $\neq \vec{0}$, der zu beiden orthogonal ist.
Lösung Das Vektorprodukt von zwei Vektoren ist zu diesen Vektoren orthogonal.
Aufgabe: Gegeben ist eine Gerade, die als Lösungsmenge von zwei linearen Gleichungen gegeben ist. Finde die Parameterdarstellung der Geraden.
Lösung: Die Gleichungen seien $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ und $\bar{a}_1x_1 + \bar{a}_2x_2 + \bar{a}_3x_3 = 0$. Man kann die Gleichungen in der Form $\langle a, x\rangle = 0$ und $\langle \bar{a}, x\rangle = 0$ schreiben, wobei $a := \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{smallmatrix}\right)$ und $\bar{a} := \left(\begin{smallmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 \end{smallmatrix}\right)$.
Dann ist der Richtungsvektor der Geraden zu $\left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 \end{smallmatrix}\right)$ orthogonal, ist also (OBdA) gleich $\left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{smallmatrix}\right) \times \left(\begin{smallmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 \end{smallmatrix}\right)$.