Wie werden die Vorlesungen/Übungen organisiert?

- Mein Name: Prof. Vladimir Matveev
- Sprechstunden: nach jeder Vorlesung bzw. in der Pause bzw. kommen Sie vorbei
- Homepage der Vorlesung: `http://users.fmi.uni-jena.de/~matveev/Lehre/LA24_25/` Sie ist von meiner Homeseite (benutze Google) verlinkt.
- Das ist eine Pflichtveranstaltung,
- die jede Woche aus 2 zwei-stündigen Vorlesungen und einer 2-stündigen Anwesenheitsübung besteht.
- Die erfolgreiche Teilnahme bringt 9/8 Leistungspunkte
- und die Erlaubnis, an mehreren weiteren Lehrveranstaltungen teilzunehmen.

Was bedeutet „erfolgreiche Teilnahme“?

- Sie müssen an den Übungen regelmäßig und aktiv teilnehmen
- Mind. 60% der Punkte in den Hausaufgaben sammeln
- Sie müssen die Hauptklausur oder die Wiederholungsklausur bestehen (i.d.R. 50% der Punkte).

Tutorium

Es findet, einmal in der Woche amd Montag, ein Tutorium statt (Dr. Manuel Quaschner)
In den Tutorium werden die Lösungen der Hausaufgaben erklärt.

Was bedeutet „erfolgreiche Teilnahme“?

- Sie müssen an den Übungen regelmäßig und aktiv teilnehmen
- Mind. 60% der Punkte in den Hausaufgaben sammeln
- Sie müssen die Hauptklausur oder die Wiederholungsklausur bestehen (i.d.R. 50% der Punkte).

Ablauf der Hausaufgaben

1. An fast jedem Montag wird ein Übungsblatt mit in der Regel vier Aufgaben bei Moodle hochgeladen.
2. Sie müssen die Aufgaben in Zweiergruppen lösen und bis zum darauffolgenden Montag um 9:00 Uhr bei Moodle abgeben.
3. Von den abgegebenen Lösungen werden drei Aufgaben korrigiert und bepunktet. Sie müssen mind. 60% der Punkte sammeln.
4. Die Lösung für die verbleibende Aufgabe müssen Sie nochmals anonymisiert bei Moodle hochladen. Diese Abgaben werden anonym an jeweils einen anderen Mitstudierenden verteilt, von dem Sie Feedback erhalten (Sie müssen auch einem anderen Studierenden Feedback geben).
5. Am Montag von 16-18 Uhr findet das Tutorium statt, in dem die Lösungen zu allen abgegebenen Aufgaben besprochen werden.
6. Sie bekommen eventuell noch Bonuspunkte für Bonus-Blätter (als Wiederholungsmöglichkeit, etwa vor Weihnachten oder in der letzten Vorlesungswoche).
7. Außerdem findet in der Mitte des Semesters eine Probe-Klausur statt. Dafür bekommen Sie auch Bonuspunkte (bis zu 20% der Hausaufgabenpunkte).

Ablauf der Übungsgruppen

- In jeder Woche findet eine Übung statt (Einteilung über Friedolin ist schon erfolgt).
- In den Übungsgruppen werden die Übungsleitenden auf typische Fehler in den Hausaufgaben eingehen, teilweise den Stoff wiederholen und Anwesenheitsaufgaben mit den Studierenden bearbeiten.
- Kommen Sie vorbereitet zu den Übungsgruppen!
  - Wir laden die Aufgaben üblicherweise spätestens am Montag in der Bearbeitungswoche hoch. Schauen Sie sich die Aufgaben vorher an (Sie müssen die Aufgaben nicht vorab lösen, aber wiederholen Sie die benötigten Vorlesungsthemen).
  - Zu den einzelnen Vorlesungen wird es Wiederholungstests in Moodle geben, die Sie vor den entsprechenden Übungen bearbeiten können.
- Die Anwesenheitsaufgaben sollen Sie auf die Hausaufgaben vorbereiten (ähnliche Ideen, Vertiefung von Konzepten).

Hauptklausur

- Die Anzahl der Hausaufgabenpunkte ist die wichtigste Zulassungsbedienung zur Hauptklausur (bzw. zur Wiederholungsklausur)
- Für die Gesamtnote zählen nur die Punkte der Hauptklausur bzw. der Wiederholungsklausur.
- Die Klausur besteht (in der Regel) aus 5 Aufgaben.
  - Eine Klausuraufgabe ist, einen (Teil eines) Satz aus der Vorlesung zu beweisen. (Sie bekommen eine Liste.)
  - Eine Klausuraufgabe ist eine Verständnisaufgabe (etwa welche von drei Aussagen falsch sind, gegebenenfalls mit Gegenbeispiel).
  - Eine Klausuraufgabe ist eine nichtveränderte Beweis-Hausaufgabe.
  - Zwei Klausuraufgaben sind Rechnenaufgaben (die zu Hausaufgaben ähnlich sind). Die Studenten, die die Hausaufgaben gut verstanden haben, bestehen in der Regel die Klausur.

Empfehlungen und typische Fehler.

- Ich stelle nach Möglichkeit die Vorlesungen vorher ins Netz. Drucken Sie sie aus. Während der Vorlesungen machen Sie Notizen. Versuchen Sie den Inhalt der Vorlesungen noch am gleichen Tag zu verstehen. (Typischer Fehler: „Ich werde in zwei Wochen mehr Zeit haben.“)
- Probieren Sie, alle Hausaufgaben zu lösen. Falls Sie dies nicht geschafft haben, probieren Sie die Lösungen später zu verstehen. Wenden Sie sich an die Komilitonen und an den Übungsgruppenleiter. (Typischer Fehler: „Ich habe 2 von vier Aufgaben verstanden - das reicht schon“).
- Es ist empfehlenswert, in kleinen Gruppen zu Arbeiten. In dem Fall müssen Sie trotzdem die Aufgaben einzeln abgeben und die Lösungen der abgegebenen Aufgaben vollständig verstehen.

  (Typischer Fehler: Man teilt die Hausaufgaben: ein Student macht 1 und 2, der andere 3 und 4).
- Sie dürfen mich während der Vorlesung unterbrechen und Fragen stellen.

Verteilung in der Übungsgruppe

- Wurde von Friedolin bereits festgelegt. Ich hoffe, dass Sie die Information von Friedolin in welcher Übungsgruppe Sie sind rechtzeitig bekommen haben.

Buchempfelungen

- Fast jedes Lineare-Algebra Buch für Uni-Studenten der Mathe ist gut
- Aus der Lehrbibliothek
  - Definition des Vektorraums z.B. Serge Lang, „Lineare Algebra“
  - Lineare Abbildungen z.B. Kowalsky et al “Lineare Algebra„
  - Für vorgeschrittene Studenten Briscorn „Lineare Algebra“
- Einfachere Versionen:
  - Repetitorium der Linearen Algebra I, II (Detlef Wille , Michael Holz)
  - Lineare Algebra von A. Beutelspacher
das erste Semester
- Preiswerte Alternative: Vorlesungsskripten im Internet

Ziel des Kurses: Einführung in das Gebiet der linearen Algebra mit Anwendungen in der analytischen Geometrie.
Wichtigster Unterschied zur „Schulmathematik“: Beweise

- Sie müssen die Beweise verstehen.
    - Sie müssen selbst Beweisen können
    - und Beweise sauber aufschreiben können.

Lernziele der ersten Woche

Die Studierenden sind in der Lage ...

- ... die Definition eines allgemeine linearen Gleichungssystems anzugeben.
- ... die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems mit dem Gauß-Algorithmus durch elementare Zeilenumformungen zu bestimmen.
- ... verschiedene Beweisstrategien anzugeben und auf ihre Verwendbarkeit für unterschiedliche Aussagen zu prüfen.
- ... die Korrektheit der elementaren Zeilenumformungen und des Gauß-Algorithmus zu beweisen.
- ... grundlegende Begriffe der Mengenlehre anwenden.
- ... Abbildungen sowohl als „Regeln“ als auch als „Mengen“ interpretieren.
- ... Operationen als Abbildungen verstehen.

Die drei wichtigsten Beweismethoden: direkter Beweis, Widerspruchsbeweis (indirekter Beweis), Induktionsbeweis

Direkter Beweis: Die Behauptung wird durch Anwendung von bereits bewiesenen Aussagen und durch logische Folgerungen bewiesen.
Bsp von einem direkten Beweis: zuerst Vorarbeit:

Wir betrachten ein allgemeines lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten:

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \qquad \text{Zeile 1} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \qquad \text{Zeile m} \end{array} \right.$$

Bsp. Für $n = m = 2$ und $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ haben wir das Gleichungssystem $\left\{ \begin{array}{ccc} 2x_1 + 4x_2 & = & 8 \\ 3x_1 - 6x_2 & = & 4 \end{array} \right.$

Eine Lösung des Gleichungsystems ist ein geordnetes $n-$Tupel $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$, wobei $\bar{x}_i$ reelle Zahlen sind, s. d. für jede Gleichung $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$ des Gleichungssystems gilt $a_{i1}\bar{x}_1 + \cdots + a_{in}\bar{x}_n = b_i$.

Bsp. $n = m = 2$, $\left\{ \begin{array}{ccc} 2x_1 + 4x_2 & = & 8 \\ 3x_1 - 6x_2 & = & 4 \end{array} \right.$

Dann ist $(\frac{8}{3}, \frac{2}{3})$ eine Lösung: $\left\{ \begin{array}{ccc} 2 \cdot \frac{8}{3} + 4 \cdot \frac{2}{3} & = & 8 \\ 3 \cdot \frac{8}{3} - 6 \cdot \frac{2}{3} & = & 4 \end{array} \right.$

Wir definieren die folgenden elementaren Operationen (elementare Zeilenumformungen) auf linearen Gleichungssystemen:

Typ 1: Seien i, k aus $1, ..., m$, $i \neq k$, $c \in \mathbb{R}$. Dann

(S1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & \vdots & \\ (a_{k1} + c \cdot a_{i1})x_1 & + \cdots + & (a_{kn} + c \cdot a_{in})x_n & = & b_k + c \cdot b_i \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \quad \longleftarrow \ k\text{−te Zeile}$$

(Das c-fache der i−ten Gleichung wird zur k−ten addiert.)

Bsp: $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 & = & 8 \\ 3x_1 - 6x_2 & = & 4 \end{cases} \xrightarrow{Z_2 := Z_2 - \frac{3}{2} Z_1} \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 & = & 8 \\ 0x_1 - 12x_2 & = & -8 \end{cases}$

Typ 2: Sei k eine Zahl aus $1, ..., m$ und $c \neq 0$. Dann

$$(S2) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & \vdots & \\ c \cdot a_{k1}x_1 & + \cdots + & c \cdot a_{kn}x_n & = & c \cdot b_k \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Bsp. $k = 2$, $c = -\frac{1}{12}$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 & = & 8 \\ 0 \cdot x_1 - 12x_2 & = & -8 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 & = & 8 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 & = & \frac{2}{3} \end{cases}$$

Typ 3: Seien i, k aus $1, \ldots, m$, $i < k$. Dann

$$(S3) \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{k1}x_1 & + \cdots + & a_{kn}x_n & = & b_k \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{i1}x_1 & + \cdots + & a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ \longleftarrow i\text{–te Zeile} \\ \\ \longleftarrow k\text{–te Zeile} \\ \\ \\ \end{array}$$

Satz 1 *Ist* $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ *eine Lösung des Systems* (S)*, so ist* $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ *eine Lösung des Systems* $(S1)$*,* $(S2)$ *und* $(S3)$*.*
(Direkter) Beweis: 1. Angenommen, $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ ist eine Lösung von (S).
Z.z.: Dann ist $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ auch eine Lösung von $(S1)$.
Wir betrachten die $i-$te und die $k - te$ Gleichungen von (S): wenn wir $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ einsetzen, bekommen wir die Gleichungen, die erfüllt sind.
$a_{i1}\bar{x}_1 + ... + a_{in}\bar{x}_n = b_i$
$a_{k1}\bar{x}_1 + ... + a_{kn}\bar{x}_n = b_k$
Dann ist auch $(a_{k1}\bar{x}_1 + ... + a_{kn}\bar{x}_n) + c\cdot(a_{i1}\bar{x}_1 + ... + a_{in}\bar{x}_n) = b_k + c\cdot b_i$ erfüllt. Nach Umordnen der Terme in der letzten Gleichung sehen wir, dass
$(a_{k1} + c \cdot a_{i1})\bar{x}_1 + ... + (a_{kn} + c \cdot a_{in})\bar{x}_n = b_k + c\cdot b_i$ erfüllt ist, und dies ist $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ eingesetzt in die $k-$te Gleichung von $(S1)$.
Die anderen Gleichungen von $(S1)$ sind auch erfüllt, weil sie mit Gleichungen von (S) zusammenfallen. Also ist $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ eine Lösung des Systems $(S1)$.

2. Angenommen, $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ ist eine Lösung von (S). Z.z.: Dann ist es auch eine Lösung von $(S2)$. Wir betrachten die $k-$te Gleichung von $(S2)$: wenn wir $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ einsetzen, bekommen wir
$(*) \quad c \cdot a_{k1}\bar{x}_1 + ... + c \cdot a_{kn}\bar{x}_n = c \cdot b_k.$
Wegen des Distributivgesetzes steht links die Zahl
$c \cdot (a_{k1}\bar{x}_1 + ... + a_{kn}\bar{x}_n)$. Da rechts $c \cdot b_k$ steht und da $a_{k1}\bar{x}_1 + ... + a_{kn}\bar{x}_n = b_k$ ist, ist $(*)$ erfüllt. Die anderen Gleichungen von $(S2)$ sind auch erfüllt, weil sie mit Gleichungen von (S) zusammenfallen. Also ist $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ eine Lösung des Systems $(S2)$.

Man könnte mit ähnlichen Methoden (einfach) beweisen, dass jede Lösung $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ von $(S3)$ auch eine Lösung von (S) ist; ich werde aber einen anderen Beweis vorführen. Zuerst ein Witz:

Wie kocht ein Mathematiker Tee (falls leerer Wasserkocher, mehrere Teebeutel, Wasserhahn, Strom usw. vorhanden sind) ?
1. Wasser in Wasserkocher gießen 2. Wasser kochen 3. Teebeutel und kochendes Wasser in die Tasse.

Wie kocht ein Mathematiker Tee (falls Wasserkocher schon mit Wasser gefüllt ist?)
Er führt das neue Problem auf das alte zurück: Zuerst Ausgießen. Dann wie oben.

Warum ist jede Lösung von (S) auch eine Lösung von (S3)

Weil eine Operation vom Typ 3 sich aus Operationen der Typen 1 und 2 zusammensetzen läßt:

$$\left\{\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \\ a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & \vdots & \\ a_{k1}x_1+\cdots+a_{kn}x_n & = & b_k \\ \vdots & \vdots & \end{array}\right. \xrightarrow{Z_k:=Z_k+Z_i} \left\{\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \\ a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & \vdots & \\ (a_{k1}+a_{i1})x_1+\cdots+(a_{kn}+a_{in})x_n & = & b_k+b_i \\ \vdots & \vdots & \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{Z_i:=Z_i-Z_k} \left\{\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \\ -a_{k1}x_1+\cdots-a_{kn}x_n & = & -b_k \\ \vdots & \vdots & \\ (a_{k1}+a_{i1})x_1+\cdots+(a_{kn}+a_{in})x_n & = & b_k+b_i \\ \vdots & \vdots & \end{array}\right. \xrightarrow{Z_k:=Z_k+Z_i}$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \\ -a_{k1}x_1+\cdots-a_{kn}x_n & = & -b_k \\ \vdots & \vdots & \\ a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & \vdots & \end{array}\right. \xrightarrow{Z_i:=-1\cdot Z_i} \left\{\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \\ a_{k1}x_1+\cdots+a_{kn}x_n & = & b_k \\ \vdots & \vdots & \\ a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & \vdots & \end{array}\right. \qquad \square$$

Folgerung 1 *Ist* $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ *eine Lösung eines der Systeme* $(S1)$, $(S2)$ *oder* $(S3)$, *so ist* $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ *auch eine Lösung des Systems* (S) *(und deswegen nach Satz 1 auch der Systeme (S1), (S2), und (S3)).*

Beweis. (S) ensteht aus $(S1)$ durch Operationen vom Typ 1 (mit den selben k und i und $c' = -c$). Deswegen ist nach Satz 1 jede Lösung von $(S1)$ auch eine Lösung von (S).
(S) ensteht aus $(S2)$ durch Operationen vom Typ 2 (mit dem selben k und $c' = \frac{1}{c}$). Deswegen ist nach Satz 1 jede Lösung von $(S2)$ auch eine Lösung von (S).
(S) ensteht aus $(S3)$ durch Operationen vom Typ 3 (mit den selben k und i). Deswegen ist nach Satz 1 jede Lösung von $(S3)$ auch eine Lösung von (S). $\square$

Vollständige Induktion

Induktion benutzt man oft zum Beweis von Sätzen der Form „Für jede natürliche Zahl n gilt ... „. Dazu zeigt man zuerst, dass (InduktionsAnfang) die Aussage für $n = 1$ (oder auch einen anderen Anfangswert n_0) gilt, und danach,
(InduktionsSchritt) dass sie auch für $n + 1$ gilt, wenn
(InduktionsVoraussetzung) sie für n gilt.

Picture from Wikipedia common

Die vollständige Induktion lässt sich mit einem Domino-Effekt vergleichen.
Man stellt die Steine (= Aussagen) so auf, dass, wenn einer umfällt (= richtig ist), auch der nächste umfällt (= richtig ist) ($n \longrightarrow n + 1$),

und stößt den ersten Stein um ($n = 1$; (InduktionsAnfang))

Lin. Gleichungsystem in Stufenform

Def 1. Wir sagen, dass das Gleichungsystem (S) Stufenform hat, wenn für alle $i = 1, \cdots, m-1$ folgendes gilt:

(a) Wenn ein k aus $1, 2, \cdots, n-1$ existiert mit $a_{i1} = a_{i2} = \cdots = a_{ik} = 0$, dann gilt: $a_{i+1\ 1} = a_{i+1\ 2} = \cdots = a_{i+1\ k+1} = 0$

(b) Wenn $a_{i1} = \cdots = a_{in} = 0$, dann $a_{i+1\ 1} = \cdots = a_{i+1\ n} = 0$

(c) Wenn $a_{i1} \neq 0$, dann $a_{i+1\ 1} = 0$.

Bsp.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \\ & & 8x_2 & + & 5x_3 & = & -1 \\ & & & - & 2x_3 & = & 6 \end{array} \right.$$

Frage an Euch: Welche sind in Stufenform?

$$(1) \left\{ \begin{array}{lll} x_1 & +2x_2 = & 1 \\ & x_2 = & 2 \end{array} \right., \quad (2) \left\{ \begin{array}{lll} 2x_1 + 3x_2 & -5x_3 & = 4 \\ & x_3 & = 2 \\ & 0 \cdot x_3 & = 1 \end{array} \right.$$

sind in Stufenform.

Bsp
$$(3) \left\{ \begin{array}{lll} & x_2 = & 2 \\ x_1 & +2x_2 = & 1 \end{array} \right., \quad (4) \left\{ \begin{array}{lll} 2x_1 + 3x_2 & -5x_3 & = 4 \\ & 0 \cdot x_3 & = 0 \\ & x_3 & = 2 \end{array} \right., \quad (5) \left\{ \begin{array}{lll} 2x_1 + 3x_2 & -5x_3 & = 4 \\ x_1 + & 0 \cdot x_3 & = 2 \\ & x_3 & = 0 \end{array} \right.$$

sind NICHT in Stufenform: In (3) ist (a) für $i = k = 1$ nicht erfüllt, weil $a_{1+1 1} \neq 0$. In (4) ist (b) nicht erfüllt (für $i = 2$). In (5) ist (c) nicht erfüllt (für $i = 1$) .

Satz von Gauss

Def 1 – Wiederholung. Wir sagen, dass das Gleichungsystem (S) Stufenform hat, wenn für alle $i = 1, \cdots, m-1$ folgendes gilt:

(a) Wenn ein k aus $1, 2, \cdots, n-1$ existiert mit
$a_{i1} = a_{i2} = \cdots = a_{ik} = 0$, dann gilt:
$a_{i+1\ 1} = a_{i+1\ 2} = \cdots = a_{i+1\ k+1} = 0$
(b) Wenn $a_{i1} = \cdots = a_{in} = 0$, dann
$a_{i+1\ 1} = \cdots = a_{i+1\ n} = 0$
(c) Wenn $a_{i1} \neq 0$, dann $a_{i+1\ 1} = 0$.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \\ & & 8x_2 & + & 5x_3 & = & -1 \\ & & & - & 2x_3 & = & 6 \end{array} \right.$$

Satz 2 (Gauss) *Jedes lin. Gleichungssystem läßt sich durch endlich viele elementare Operationen auf Stufenform bringen.*

Bemerkung. Aus der Beweis von Satz von Gauss wird auch ein Algorithm folgen (Gaussscher Algorithmus), wie man ein lin. Gleichungssystem durch endlich viele elementare Operationen auf Stufenform bringen kann.

Satz 2 (Gauss) *Jedes lin. Gleichungssystem läßt sich durch endlich viele elementare Operationen auf Stufenform bringen.*

Induktionsbeweis: Induktion nach m.
(IA) Für $m = 1$ ist die Aussage richtig: Jede lin. Gleichungssystem,das aus $m = 1$ Gleichung besteht, ist in Stufenform.
(IV) Angenommen, die Aussage ist für irgendein m richtig: jedes lin. Gleichungssystem, das aus m Gleichungen besteht, läßt sich durch endlich viele elementaren Operationen auf Stufenform bringen.
(IS) Z.z.: Die Aussage ist auch für $m + 1$ richtig: Jedes lin. Gleichungssystem, das aus $m + 1$ Gleichungen besteht, läßt sich durch endlich viele elementare Operationen auf Stufenform bringen.

Nehmen wir das erste k aus $1, ..., n$, s.d. nicht alle Zahlen $a_{1k}, ..., a_{m+1k}$ gleich 0 sind (sonst ist das Gleichungsystem bereits in Stufenform).

Bsp: Für $\left\{\begin{array}{llll} 0\cdot x_1 & +3x_2 & -5x_3 & =6 \\ 0\cdot x_1 & +0\cdot x_2 & +x_3 & =2 \\ 0\cdot x_1 & +1\cdot x_2 & +0\cdot x_3 & =1 \end{array}\right.$ ist $k=2$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen,dass $a_{1k}\neq 0$, sonst vertauscht man die Gleichung mit $a_{jk}\neq 0$ mit der ersten Gleichung (Operation von Typ 3).

$$\left\{\begin{array}{c|c} \boxed{\begin{array}{c} 0\cdot x_1+\cdots+0\cdot x_{k-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ 0\cdot x_1+\cdots+0\cdot x_{k-1} \end{array}} & \boxed{\begin{array}{c} +a_{1k}x_k+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \hline \text{Irgendwas} \end{array}} \end{array}\right., \quad a_{1k}\neq 0.$$

Dann addieren wir für jedes j aus $2, ..., m+1$ das $-\frac{a_{jk}}{a_{1k}}-$fache der $1-$ten Gleichung zur $j-$ten Gleichung. **Bsp:**

$$\left\{\begin{array}{llll} 0\cdot x_1 & +3x_2 & -5x_3 & =6 \\ 0\cdot x_1 & +0\cdot x_2 & +x_3 & =2 \\ 0\cdot x_1 & +1\cdot x_2 & +0\cdot x_3 & =1 \end{array}\right. \xrightarrow[]{\substack{Z_2:=Z_2+0\cdot Z_1 \\ Z_3:=Z_3-\frac{1}{3}Z_1}} \left\{\begin{array}{llll} 0\cdot x_1 & +3x_2 & -5x_3 & =6 \\ 0\cdot x_1 & +0\cdot x_2 & +x_3 & =2 \\ 0\cdot x_2 & +0\cdot x_2 & +\frac{5}{3}\cdot x_3 & =-1 \end{array}\right. .$$

Wir bekommen
$$\left\{\begin{array}{cc} \boxed{\begin{array}{c} 0\cdot x_1+\cdots+0\cdot x_{k-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ 0\cdot x_1+\cdots+0\cdot x_{k-1} \end{array}} & \begin{array}{c} \boxed{+a_{1k}x_k+\cdots+a_{1n}x_n=b_1} \\ \boxed{\begin{array}{c} +0\cdot x_k+ \\ \vdots \\ +0\cdot x_k+ \end{array}} \boxed{\text{Irgend-was}} \end{array} \end{array}\right.$$

Jetzt betrachten wir das Untersystem, das aus den Gleichungen 2 bis $m+1$ besteht.

$$\left\{\begin{array}{lll}
0\cdot x_1+\cdots+0\cdot x_{k-1} & \multicolumn{2}{l}{\boxed{+a_{1k}x_k+\cdots+a_{1n}x_n=b_1}} \\
\vdots & +0\cdot x_k+ & \\
\vdots & \vdots & \boxed{\text{Irgend-was}} \\
0\cdot x_1+\cdots+0\cdot x_{k-1} & +0\cdot x_k+ &
\end{array}\right.$$

Es besteht aus $m(=m+1-1)$ Gleichungen.

Nach (IV) können wir das System durch endlich viele elementare Operationen auf Stufenform bringen. Da diese Operationen auch elementare Operationen des gesamten Systems sind,kann man durch endlich viele elementare Operationen das System auf die Form

$$\left\{\begin{array}{lll}
0\cdot x_1+\cdots+0\cdot x_{k-1} & \multicolumn{2}{l}{\boxed{+a_{1k}x_k+\cdots+a_{1n}x_n=b_1}} \\
\vdots & +0\cdot x_k+ & \\
\vdots & \vdots & \boxed{\text{Stufen-form}} \\
0\cdot x_1+\cdots+0\cdot x_{k-1} & +0\cdot x_k+ &
\end{array}\right.$$

bringen.

Bemerkung. Die Operationen ändern die ersten k Spalten nicht.

Wir bekommen ein System in Stufenform. $\square$

Gauß-Algorithmus

Der Beweis gibt uns auch einen Weg, lineare Gleichungssysteme auf Stufenform zu bringen (Gauß-Algorithmus). **Bsp:**

$$\left\{\begin{array}{rl} 2x_1+4x_2+4x_3+6x_4 & =2 \\ 3x_1+7x_2+5x_3+9x_4 & =4 \\ x_1+3x_2-x_3+5x_4 & =1 \end{array}\right. \xrightarrow[Z_3 := Z_3 - \frac{1}{2}Z_1]{Z_2 := Z_2 - \frac{3}{2}Z_1} \left\{\begin{array}{rl} 2x_1+4x_2+4x_3+6x_4 & =2 \\ x_2-x_3+0x_4 & =1 \\ x_2-3x_3+2x_4 & =0 \end{array}\right. \xrightarrow{Z_3 := Z_3 - Z_2}$$

$$\left\{\begin{array}{rl} 2x_1+4x_2+4x_3+6x_4 & =2 \\ x_2-x_3+0x_4 & =1 \\ -2x_3+2x_4 & =-1 \end{array}\right.$$ Gleichungssystem in Stufenform!

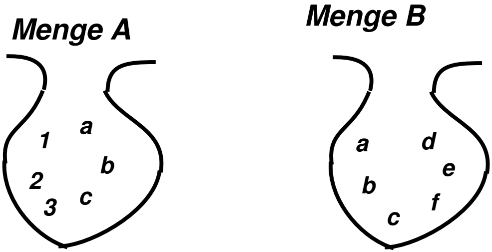
Da die elementaren Operationen die Lösungen erhalten, ist jede Lösung von $\left\{\begin{array}{rl} 2x_1+4x_2+4x_3+6x_4 & =2 \\ x_2-x_3+0x_4 & =1 \\ -2x_3+2x_4 & =-1 \end{array}\right.$ auch eine Lösung von $\left\{\begin{array}{rl} 2x_1+4x_2+4x_3+6x_4 & =2 \\ 3x_1+7x_2+5x_3+9x_4 & =4 \\ x_1+3x_2-x_3+5x_4 & =1 \end{array}\right.$ und umgekehrt. Es ist einfach, die Lösungen eines Systems, das in Stufenform ist, zu bestimmen. Im Bsp oben:

$$\begin{array}{lll} \text{Aus der der 3-ten Gleichung:} & x_3 = x_4 + \frac{1}{2} & = r + \frac{1}{2} \\ \text{Aus der der 2-ten Gleichung:} & x_2 = x_3 + 1 & = r + \frac{1}{2} + 1 = r + \frac{3}{2} \\ \text{Aus der der 1-ten Gleichung:} & x_1 = -2x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 1 & = -7r - 3 \end{array}$$

Also, jede Lösung $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_4)$ hat die Form $(-7r-3, r+\frac{3}{2}, r+\frac{1}{2}, r)$, wobei r eine (beliebige) reelle Zahl ist, und umgekehrt: Jedes 4−Tupel der Form $(-7r-3, r+\frac{3}{2}, r+\frac{1}{2}, r)$ ist eine Lösung. Nach Satz 1 und Folgerung 1 ist jede Lösung des ursprünglichen Systems eine Lösung des System in Stufenform und umgekehrt. Deswegen sind dies auch alle Lösungen des ursprünglichen Systems.

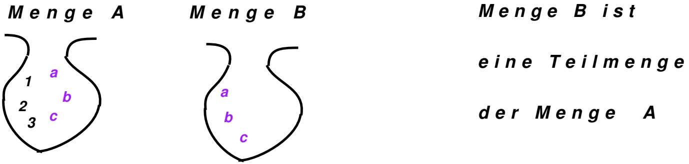
Exkurs in die Mengenlehre: Grundbegriffe

Der Begriff „Menge“ wird nicht formal definiert. Die intuitive Vorstellung: ein Sack, der gewisse Dinge enthält. Diese Dinge heißen Elemente. Deren Eigenschaft: die Elemente sind verschieden.



Bsp: Die Menge der Wochentage, an denen diese Vorlesung stattfindet ist $\{Montag, Dienstag\}$.
Bsp: Die Menge der natürlichen Zahlen ist $\{1, 2, 3, 4, ...\}$ und wird $\mathbb{N}$ bezeichnet. Die Menge der ganzen Zahlen wird $\mathbb{Z}$ bezeichnet; $\mathbb{Z} = \{..., -1, 0, 1, ...\}$.
Reihenfolge spielt keine Rolle:
$\{Montag, Dienstag\} = \{Dienstag, Montag\}$.

Bsp: Die Menge von reellen Zahlen wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.
Bsp: Die Menge, die keine Elemente enthält, heißt leere Menge und wird mit $\varnothing$ bezeichnet.
Sei A eine Menge. Liegt ein Element a in A, so schreiben wir $a \in A$ bzw. $A \ni a$.
Bsp: $1 \in \mathbb{N}$, $1/2 \notin \mathbb{N}$, $1/2 \in \mathbb{R}$.
Seien A, B Mengen. Falls jedes Element von B in A liegt, sagen wir, dass B eine Teilmenge (oder Untermenge) von A ist, und schreiben $A \supseteq B$ oder $B \subseteq A$.



Ist gleichzeitig $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$, so sind die Mengen gleich: $A = B$.
Bsp: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, $\{1\} \subseteq \mathbb{N}$, für jede Menge A gilt $A \supseteq \varnothing$.
Bemerkung. Wenn $A \subseteq B$ ist, aber $A \neq B$ ist, schreibt man oft $A \subset B$. Ich werde diese Bezeichnung zuerst meiden.

Zur Sprache der Mathematik: Abkürzende logische Symbole

Übliche Sprache + Fachausdrücke + mathematische Symbole
$A \Longrightarrow B$ bedeutet „aus Aussage A folgt Aussage B“.
Bsp: $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow x^2 \geq 0$.
Andere sprachliche Formen: „A impliziert B“ oder „A ist hinreichend für B“ oder „B ist notwendig für A“
$A \Longleftrightarrow B$ bedeutet $A \Longrightarrow B$ und $B \Longrightarrow A$.
Andere sprachliche Formen: „A und B sind äquivalent“ oder “A gilt genau dann, wenn B gilt“.
$\exists$ steht für „Es existiert (mindestens) ein ...“
Bsp: „$\exists x \in \mathbb{R}$: $x^2 = 2$ steht für „Es existiert ein $x \in \mathbb{R}$, so daß $x^2 = 2$ gilt“ (nämlich $x = \sqrt{2}$ oder $x = -\sqrt{2}$).
$\forall$ steht für „Für alle ...“
Bsp: $\forall x \in \mathbb{R} \;\; x^2 \geq 0$ steht für “Für alle reellen Zahlen x gilt: $x^2 \geq 0$“.

„oder“ ist nicht ausschließend (im Gegensatz zu „entweder ... oder“).
Bsp: Die Aussage „Es gilt $1 + 1 = 2$ oder es gilt $1 - 1 = 0$ oder es gilt $1 + 1 = 0$ “ ist wahr.
Statt „oder“ werden wir auch das Zeichen $\vee$ benutzen:
Die Aussage $1 + 1 = 2 \;\vee\; 1 - 1 = 0 \;\vee\; 1 + 1 = 0$ ist wahr.

Satz 1/Folgerung 1 in der neuen Sprache

Def. 1 Lösungsmenge eines System (S) ist die Menge aller Lösungen.
Vergleichen Sie:
Satz 1 *Ist* $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ *eine Lösung des Systems* (S)*, so ist* $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ *eine Lösung der Systeme* $(S1)$, $(S2)$ *und* $(S3)$.
Folgerung 1 *Ist* $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ *eine Lösung eines der Systeme* $(S1)$, $(S2)$ *oder* $(S3)$*, so ist* $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ *auch eine Lösung des Systems* (S) *(und deswegen nach Satz 1 auch der Systeme (S1), (S2), und (S3)).*

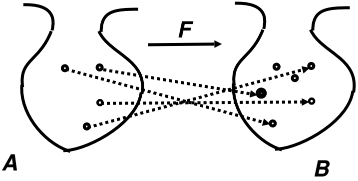
UND

Satz 1' *Die Lösungemengen der Systeme (S), (S1), (S2), (S3) sind gleich.*

Bsp –Def: Seien A, B zwei Mengen. Das Produkt von Mengen A, B (bezeichnet $A \times B$) ist die Mengen aller geordneten Paare (a, b), wobei $a \in A$, $b \in B$ ist. z.B. Ist $A = \{1, 2\}$, $B = \{+, -\}$ so ist $A \times B = \big\{(1, +), (1, -), (2, +), (2, -)\big\}$.
Bemerkung: Man kann Produkt iterieren: $A \times B \times C$ ist die Menge aller geordneten Tripel (a, b, c), wobei $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ ist, usw.
Frage: Was ist $\varnothing \times A$?
Antwort: $\varnothing \times A = \varnothing$.
Bsp: Sei A eine Menge. Die Menge aller Teilmengen von A wird 2^A bezeichnet.
Bsp: Sei $A = \{1, 2\}$. Dann ist $2^A = \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\big\}$.
Sei $A = \{1, 2, 3\}$. Dann ist
$2^A = \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{1, 2, 3\}\big\}$.

Abbildungen

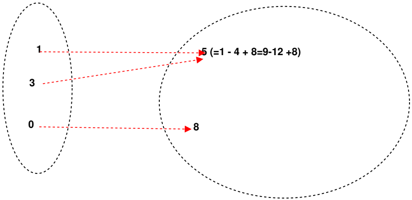
Seien A, B zwei Mengen.
Intuitive Vorstellung: Eine Abbildung von A nach B ist eine Regel, die jedem Element der Menge A genau ein Element der Menge B zuweist.



Bezeichnung:
$F : A \to B$.

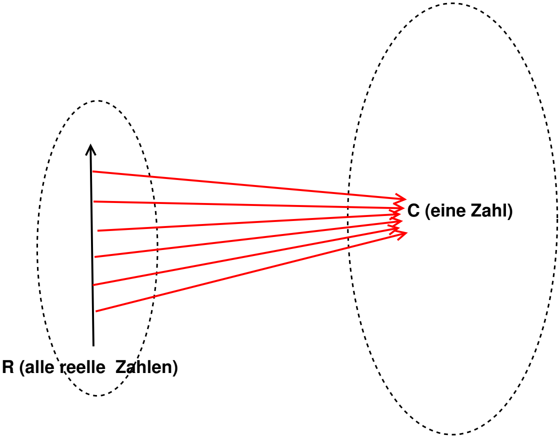
Bsp: Ein Polynom (z.B. $P(x) = x^2 - 4x + 8$) ist eine Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$: $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Als "Regel" ist die Polynom-Abbildung $P(x) = x^2 - 4x + 8$ wie folgt gegeben: die Mengen $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, und P weist dem Element (Zahl) a das Element (Zahl) $a^2 - 4 \cdot a + 8$ zu



Bsp: konstante Abbildung.

$C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \;\; C(x) := C$ ist eine (konstante) Abbildung,



Wie aus dem Bild ersichtlich ist, müssen nicht alle Elemente aus B als Bild eines Elementes aus A auftreten und ein Element aus B darf auch Bild mehrerer Elemente aus A sein. Es muss allerdings für jedes Element aus A ein eindeutiges Bild geben, das heißt von jedem a muss genau ein Pfeil ausgehen.

Was bedeutet: zu zeigen, dass eine Abbildung woldefiniert ist?

Das Wort “wohldefiniert” wird häufig in der mathematischen Jargon (=Umgangssprache) benutzt:
Man sagt, dass eine Regel, die Elementen der Menge A Elemente der Menge B zuweist, eine wohldefinierte Abbildung ist, wenn sie eine Abbilding in Sinne der Definition oben ist: d.h.:

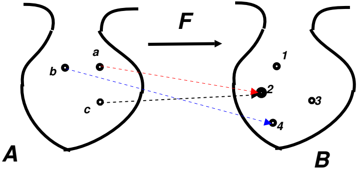
- Die Regel jedem Element von A genau einen Element von B zuweist.

Frage an Euch: Ist die Abbildung unten wohldefiniert?

$F : \underbrace{[-1,1]}_{A} \to \underbrace{[-1,1]}_{B}$, $F(x) := x + 1$ ist KEINE Abbildung, weil $F(1)$ nicht auf $[1,-1]$ liegt, und deswegen F weist nicht allen Elemente von A Elemente von B zu.

$F : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $F(x) := x + 1$ ist doch eine Abbildung.

Mathematisch sauberere Definition: Eine Abbildung ist einer Teilmenge $R \subseteq A \times B$,
so dass es zu jedem Element a von A genau ein Element b von B gibt (geschrieben $F(a)$), so dass das Paar (a, b) Element von R ist.
Für die Abbildung



ist $R = \{(a, 2), (b, 4), (c, 2)\}$.

Bsp: Ein Polynom (z.B. $P(x) = x^2 + 3x + 13$), betrachtet als eine Abbildung, ist dann $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, gegeben durch
$R = \{(x, x^2 + 3x + 13) \mid \text{wobei } x \in \mathbb{R}\}$. Z.B. ist $(1, \underbrace{1^2 + 3 + 13}_{17}) \in R$,

$(0, 13) \in R$; aber $(2, 0) \notin R$, weil $2^2 + 3 \cdot 2 + 13 \neq 0$.
Die konstante Abbildung $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $C(x) = C$ ist gegeben durch
$R = \{(x, C) \mid \text{wobei } x \in \mathbb{R}\}$.

Arithmetische Operationen als Abbildungen

Man kann sie als Abbildungen darstellen, z.B. Addition
$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $+(a, b) := a + b$

In der Sprache von Teilmengen sieht das entsprechende R so aus:

$$R = \{(\underbrace{(a, b)}_{\in \mathbb{R}\times\mathbb{R}}, a + b) \mid \text{wobei } a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq (\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}_{A}) \times \underbrace{\mathbb{R}}_{B}.$$

(z.B. $((1, -2), -1) \in R$), weil $1 + (-2) = -1$.