# Lernziele der zweiten Woche: Die Studierenden sollen ...

- ... die Logik des synthetischen Aufbaus einer Theorie grob verstehen.
- ... die Aussagen aller 8 Axiome aus der Definition des Vektorraums verstehen und benutzen.
- ... zeigen können, dass $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ein Vektorraum ist.
- ... beweisen können, warum es entweder genau ein oder unendlich viele Elemente in einem Lösungsraum gibt.
- ... Rechenregeln in Vektorräumen beweisen und anwenden.

- ... die Definition eines Unterraums lernen und überprüfen, ob eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ein Unterraum ist.
- ... zeigen, dass die Lösungsmenge eines homogenen Gleichungssystems ein Untervektorraum ist.
- ... die Begriffe "Schnittmenge/Durchschnit" und "Vereinigung" korrekt anwenden. Zeigen können, dass Durchschnitt von Untervektorräume ein Untervektorraum ist.
- ... folgen daraus, dass die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems ein Untervektorraum ist.
- ... zeigen können, dass jeder Untervektorraum eines Vektorraums selbst ein Vektorraum ist.

# Neues (nichtriviales) Thema: Vektorräume

## Logik des Abschnitts „synthetischer Aufbau“

- Definition
- Einige Eigenschaften und eine grosse Familie von Beispielen ($\mathbb{R}^n$)
- Eine Aussage, dass alle Vektorräume die Vektorräume aus der Familie von Beispielen „sind“

Hauptdefinition der Vorlesung: Eine Menge $V$
mit einer Abbildung $+ : V \times V \to V$
(genannt: Addition, statt $+(v_1, v_2)$ werden wir $v_1 + v_2$ schreiben)
und einer Abbildung $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$
(genannt: Multiplikation, statt $\cdot(\lambda, v)$ werden wir $\lambda v$ oder $\lambda \cdot v$ schreiben)
heißt ein Vektorraum, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

- I Für alle $u, v, w \in V$ gilt $(u + v) + w = u + (v + w)$
- II Für alle $u, v \in V$ gilt $u + v = v + u$
- III Es existiert ein $\vec{0} \in V$, so dass für alle $v \in V$ gilt $\vec{0} + v = v$
- IV Für jedes $v \in V$ existiert ein $-v \in V$, so dass gilt $-v + v = \vec{0}$
- V Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $v \in V$ gilt $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
- VI Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $v \in V$ gilt $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
- VII Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $u, v \in V$ gilt $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
- VIII Für alle $v$ gilt $1 \cdot v = v$

# Vektorraum $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

Wir haben die Definition eines Vektorraums gegeben.
Vielleicht existiert kein Vektorraum? Vielleicht widersprechen die Eigenschaften I — VIII einander? Das nächste Ziel ist, einen Vektorraum zu konstruieren.

Um einen Vektorraum zu konstruieren, sollen wir:

• Die Menge $V$ angeben: In unserem Bsp. ist $V := \mathbb{R} \times \mathbb{R} =: \mathbb{R}^2$. Aus kosmetischen Gründen werden die Elemente von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ senkrecht geschrieben:
$\mathbb{R} \times \mathbb{R} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}.$

• Die Operationen „$+$“ und “$\cdot$“ angeben
und sicherheitshalber prüfen, dass die Operationen „$+$“ und „$\cdot$“ tatsächlich Abbildungen sind (Jargon: „wohldefiniert sind“)
In unserem Fall bedeutet das, dass wir prüfen sollen, ob
$\forall v, u \in V$ und $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $v + u \in V$, $\lambda v \in V$.

• Schließlich müssen wir die Axiome I – VIII nachweisen.

# Wir definieren Addition:

Angenommen $u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ , $v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Dann setze
$u + v = \begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.
Das ist eine Abbildung von $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$.
**Bsp.** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

# Frage an Euch

Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 25 \\ 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 21 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

# Eigenschaften der Addition

**I. Addition von Vektoren ist assoziativ**

Z.z.: Für alle $u, v, w$ gilt $(u+v)+w = u+(v+w)$.

Tatsächlich,

$$\left(\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_u + x_v) + x_w \\ (y_u + y_v) + y_w \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x_u + x_v) + x_w \\ (y_u + y_v) + y_w \end{pmatrix} =$$

$$\left[\begin{array}{c} \text{Die } x_u,\ x_v,\ \ldots \text{ sind übliche reelle Zahlen} \\ \text{und die Addition ist die übliche Addition in } \mathbb{R} \end{array}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} x_u + x_v + x_w \\ y_u + y_v + y_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u + (x_v + x_w) \\ y_u + (y_v + y_w) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \end{pmatrix}\right)$$

**Bsp.** $\left(\binom{1}{2} + \binom{3}{4}\right) + \binom{5}{6} = \binom{1+3}{2+4} + \binom{5}{6} = \begin{pmatrix} \underbrace{1+3+5}_{9} \\ \underbrace{2+4+6}_{12} \end{pmatrix} = \binom{1}{2} + \left(\binom{3}{4} + \binom{5}{6}\right)$

# Eigenschaften von Addition

**II. Addition von Vektoren ist kommutativ:** $u + v = v + u$ .

Tatsächlich, $\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \end{pmatrix} =$

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Die } x_u,\ x_v,\ \ldots \text{ sind übliche reelle Zahlen} \\ \text{und die Addition von } x_u \text{ und } x_v \text{ ist die übliche Addition in } \mathbb{R} \end{array} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_v + x_u \\ y_v + y_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$$

**III. Existenz eines neutralen Vektors:**

Für den Vektor $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und für jeden Vektor $v$ gilt:

$$\vec{0} + v = v \text{ , weil } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + x_v \\ 0 + y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$$

**IV. Existenz eines inversen Vektors:**

Für den Vektor $v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$ ist die Summe dieses Vektors mit dem Vektor $-v := \begin{pmatrix} -x_v \\ -y_v \end{pmatrix}$ gleich $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wir sehen auch, dass der Vektor $\begin{pmatrix} -x_v \\ -y_v \end{pmatrix}$ der einziger inverse Vektor ist.

Wir sehen auch, dass der Vektor $\begin{pmatrix} -x_v \\ -y_v \end{pmatrix}$ der einziger inverse Vektor ist, weil der Vektor $\begin{pmatrix} x'_v \\ y'_v \end{pmatrix}$ mit der Eigenschaft $\begin{pmatrix} x'_v \\ y'_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ muss $x'_v = -x_v$ und $y'_v = -y_v$ haben.

# Skalare und Vektoren multiplizieren

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Skalar.
Sei $v \in \mathbb{R}^2$ , $v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$.
Wir setzen $\lambda v = \lambda \cdot v := \begin{pmatrix} \lambda x_v \\ \lambda y_v \end{pmatrix}$.
**Bsp.** $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.
Multiplikation von Skalaren und Vektoren ist wohldefiniert (als Abbildung von $\mathbb{R} \times V$ nach $V$, weil $\begin{pmatrix} \lambda x_v \\ \lambda y_v \end{pmatrix} \in V = \mathbb{R}^2$ ist).

# Eigenschaften der Multiplikation von Vektoren und Skalaren:

**V: Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und für jeden Vektor $v \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gilt**
$\lambda(\mu\, v) = (\lambda\mu)v$.
Tatsächlich, $\lambda(\mu v)$

$$= \lambda \left( \mu \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} \right) = \lambda \begin{pmatrix} \mu x_v \\ \mu y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(\mu x_v) \\ \lambda(\mu y_v) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\lambda\mu)x_v \\ (\lambda\mu)y_v \end{pmatrix} = (\lambda\mu) \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = (\lambda\mu)v$$

**Bsp. mit Zahlen:** $\lambda = 2; \mu = 3,\ v = \binom{1}{4}$

$$2 \cdot \left(3 \cdot \binom{1}{4}\right) = 2 \cdot \binom{3 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \binom{2 \cdot 3 \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \binom{6 \cdot 1}{6 \cdot 4} = 6 \cdot \binom{1}{4}.$$

# Weitere Eigenschaften der Multiplikation von Vektoren und Skalaren:

**VI: Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und für jeden Vektor $v \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gilt**
$(\lambda + \mu)\, v = \lambda v + \mu v.$
Tatsächlich, $(\lambda + \mu) v =$

$$(\lambda + \mu) \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu) x_v \\ (\lambda + \mu) y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_v + \mu x_v \\ \lambda y_v + \mu y_v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda x_v \\ \lambda y_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu x_v \\ \mu y_v \end{pmatrix} = \lambda v + \mu v$$

## Weitere Eigenschaften der Multiplikation von Vektoren und Skalaren:

**VII: Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ und für alle Vektoren $u, v \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gilt**
$\lambda\,(u+v) = \lambda u + \mu v.$
Tatsächlich, $\lambda(u+v)$=

$$\lambda \left( \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} \right) = \lambda \begin{pmatrix} x_u + x_v \\ x_u + y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_u + \lambda x_v \\ \lambda y_u + \lambda y_v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda x_u \\ \lambda y_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda x_v \\ \lambda y_v \end{pmatrix} = \lambda u + \lambda v$$

**VIII: Für jeden Vektor $v$ gilt** $1\,v = v$

Tatsächlich, $1\,v = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,x_v \\ 1\,y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = v$

# Alles zusammen

1. Wir haben die Operationen $+ : V \times V \to V$, wobei $V = \mathbb{R}^2$, und $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ definiert.
2. Wir haben geprüft, dass die Operationen wohldefiniert sind.
3. Wir haben die Eigenschaften I—VIII gezeigt.

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ist deswegen ein Vektorraum.

# Einfachste Folgerungen aus der Definition

Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum.
Kann $V$ leer sein? Nein! Weil das der Eigenschaft III widerspricht:

| |
|---|
| III Es existiert ein $\vec{0} \in V$, so dass für alle $v \in V$ gilt $\vec{0} + v = v$ |

Kann $V$ aus einem Element bestehen? Ja!

# Beispiele von Vektorräumen: trivialer Vektorraum

Ein Vektorraum besteht aus einer Menge und zwei Operationen (Abbildungen $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$).
Um einen Vektorraum anzugeben, muss man
• eine Menge und die Operationen $+$ und $\cdot$ auf der Menge beschreiben (Wohldefiniertheit nicht vergessen)
• und dann beweisen, dass die Eigenschaften I—VIII erfüllt sind.

# Trivialer Vektorraum (besteht aus einem Punkt).

Ein trivialer Vektorraum bestehet aus einem Element $\vec{0}$ (also $V = \{\vec{0}\}$).
Die Operationen sind wie folgt:
Die Operation $+$ : $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$. (Wohldefiniert!)
Die Operation $\cdot$: Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. (Wohldefiniert!)
Wir haben die Menge und die Operationen beschrieben.
Um zu beweisen, dass $V$ ein Vektorraum ist, müssen wir zeigen, dass alle 8 Eigenschaften I— VIII erfüllt sind.

Eigenschaft I: Z.z.: $(u + v) + w = u + (v + w)$. Es gibt aber nur eine Möglichkeit für $u, v, w$, nähmlich $u = \vec{0}$, $v = \vec{0}$, $w = \vec{0}$. Also wir müssen zeigen, dass $\underbrace{(\vec{0} + \vec{0})}_{\vec{0}} + \vec{0} = \vec{0} = \vec{0} + (\vec{0} + \vec{0})$, was offensichtlich richtig ist.

II. $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{0}$ erfüllt usw.

**Übung/Frage**: Kann ein Vektorraum $V$ aus 2 Elementen bestehen?

(Wir werden diese Frage in dieser Woche beantworten. )

**Lemma 1.** *Es gibt genau einen Vektor $\vec{0}$ mit der Eigenschaft III.*

Beweis: Angenommen $v$ hat die Eigenschaft III. Dann gilt
(a) $\vec{0} + v = v$, weil für alle Vektoren $u$ gilt $\vec{0} + u = u$, und
(b) $\vec{0} + v = \vec{0}$, weil für alle Vektoren $u$, und deswegen auch für $u = \vec{0}$, gilt $u + v = v + u = u$.
Also $v = \vec{0}$. $\square$

**Lemma 2.** *Ist $u + v = v$, so ist $u = \vec{0}$*

Beweis: Betrachten wir die Gleichung $u + v = v$
und addieren den Vektor $-v$, der nach IV existiert, zu beiden Seiten.
Wir bekommen $-v + (u + v) = -v + v$.
Unter Benutzung von I und II bekommen wir $(-v + v) + u = \vec{0}$.
Dann ist $\vec{0} + u = \vec{0}$, also $u = \vec{0}$. $\square$

# Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In den Lemmata $3, 4, 5$ und später sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

**Lemma 3** $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

**In $\mathbb{R}^2$ ist das Lemma trivial:** $0 \cdot \binom{x}{y} = \binom{0 \cdot x}{0 \cdot y} = \binom{0}{0} = \vec{0}$.

**Beweis.** Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$. Nach VI gilt $(0 + 0)v = 0v + 0v$. Also gilt $0v = 0v + 0v$. Addieren von $-0v$ ergibt $\vec{0} = 0v$. □

**Lemma 4** $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. **(In $\mathbb{R}^2$ ist das Lemma trivial)**

**Beweis.** $\lambda\vec{0} \overset{III}{=} \lambda(\vec{0} + \vec{0}) \overset{VI}{=} \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0}$. Addieren von $-\lambda\vec{0}$ ergibt $\vec{0} = \lambda\vec{0}$. □

Umkehrung der Lemmata 3,4.

**Lemma 5** Ist $\lambda v = \vec{0}$, so ist $\lambda = 0$ oder $v = \vec{0}$.

**Beweis.** Angenommen $\lambda \neq 0$. Z.z.: $v = \vec{0}$. Wir betrachten den Skalar $\frac{1}{\lambda}$.
Dann gilt: $\vec{0} \overset{\text{Lem. } 4}{=} \frac{1}{\lambda}\vec{0} = \frac{1}{\lambda}(\lambda v) \overset{V}{=} 1 \cdot v \overset{VIII}{=} v$. □

**Lemma 6.** Für jedes $v$ gilt: $-1 \cdot v = -v$. (wobei $-v$ das inverse Element zu $v$ in $(V, +, \cdot)$ ist) . Ferner gilt: gibt genau einen Vektor $-v$ mit der Eigenschaft $-v + v = \vec{0}$ (und zwar $-1 \cdot v = -v$)

**In $\mathbb{R}^2$ ist das Lemma trivial:** $-1 \cdot \binom{x_1}{x_2} = \binom{-1 \cdot x_1}{-1 \cdot x_2} = \binom{-x_1}{-x_2} = -\binom{x_1}{x_2}$.
(Wir haben oben gesehen, dass der Vektor $-\binom{x_1}{x_2}$ der (eindeutige) inverse Vektor zum $-\binom{x_1}{x_2}$ ist.)

**Beweis.** $-1 \cdot v + v \overset{VIII}{=} -1 \cdot v + 1 \cdot v \overset{VI}{=} (-1 + 1) \cdot v = 0 \cdot v \overset{\text{Lem. 3}}{=} \vec{0}$.
Damit ist die erste Aussage des Lemmas bewiesen.

Wir beweisen jetzt die Eindeutigkeit: Angenommen die Vektoren $u, w$ haben die Eigenschaft IV bzg. des Vektors $v$,
d.h. $u + v = \vec{0}$ und $w + v = \vec{0}$. Wir müssen zeigen, dass $u = w$. Nach Eigenschaft I gilt

$$w + (u + v) \overset{\mathrm{I}}{=} (w + u) + v \qquad (**)$$

Auf der linken Seite von $(**)$ steht

$$w + (u + v) \overset{\text{Annahme}}{=} w + \vec{0} \overset{\mathrm{II}}{=} \vec{0} + w \overset{\mathrm{III}}{=} w.$$

Auf der rechten Seite steht:

$$(w + u) + v \overset{II}{=} (u + w) + v \overset{I}{=} u + (w + v) = u + \vec{0} = \vec{0} + u \overset{III}{=} u.$$

Deswegen muss $w = u$ sein. □

**Lemma 7** Für jedes $v \in V$ s.d. $v \neq \vec{0}$ gilt:
ist $\lambda v = \mu v$, so ist $\lambda = \mu$.

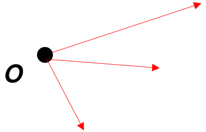
**Beweis.** Wir addieren $(-\mu) \cdot v$ zu der beiden Seiten der Gleichung $\lambda v = \mu v$. Links bekommen wir $\lambda \cdot v + (-\mu) \cdot v = (\lambda - \mu) v$. Rechts bekommen wir $(-\mu + \mu) v = 0 \cdot v \stackrel{Lem. \ 3}{=} \vec{0}$. Also, $(\lambda - \mu) v = \vec{0}$. Nach Lemma 5 ist $\lambda - \mu = 0$, also $\lambda = \mu$, $\square$.

Zurück zur Frage, welche ich am Anfang der Vorlesung gestellt habe: Kann ein Vektorraum $V$ aus zwei Vektoren bestehen?

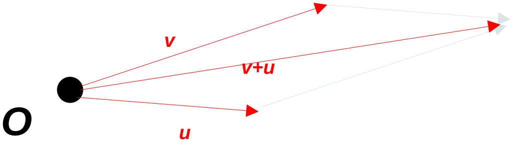
**Antwort:** Nein. Sei $v \neq u \in V$ zwei verschiedene Elemente. Ein davon ist $\neq \vec{0}$, weil nach Lemma 1 es <u>genau</u> einen Vektor mit Eigenschaft III gibt. Sei $v \neq \vec{0}$, sonst umbenennen. Dann sind nach Lemma 7 die $v, \ 2 \cdot v, \ 3 \cdot v, \ \dots \in V$ verschieden, also hat $V$ unendlich viel Elementen.

# Geometrische Vektoren bilden einen Vektorraum

Sei $O$ ein Punkt in der Ebene. (Geometrische) Vektoren (mit Anfangspunkt $O$) sind gerichtete Strecken mit Anfangspunkt $O$.

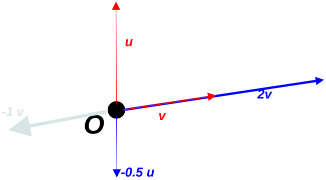



Begegnet sind Ihnen Vektoren in der Geometrie und in der Physik, wo z.B. Kraft, elektrische Feldstärke, Geschwindigkeit und Beschleunigung durch Vektoren beschrieben werden.




Addition von Vektoren:Parallelogrammregel.

Multiplikation $\cdot$ von Skalaren $\in \mathbb{R}$ und Vektoren: Streckungen/Stauchungen.




Axiome I – VIII : geometrische Überlegungen (die nicht offensichtlich sind und deswegen erst viel später gemacht werden).

**Def.** Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein Untervektorraum, falls $\forall u, v \in U$ und $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ die Elemente $v + u$ und $\lambda v$ auch in $U$ liegen.
**Umgang-sprachlich:** Falls $\forall u, v \in U$ und $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $v + u \in U$ und $\lambda v \in U$ sind, heißt die Teilmenge $U$ abgeschlossen bezüglich „$+$“ und „$\cdot$“.
**Triviale Beispiele:** $\{\vec{0}\}$ und $V$ sind Untervektorräume.

# Bsp. von einem nichttrivialen Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$

**Bsp.** Die Teilmenge $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ ist ein Untervektorraum (des $\mathbb{R}^2$).

Warum ist $U$ ein Untervektorraum? Um das zu zeigen, muss man Eigenschaften von $U$ mit Eigenschaften, die in der Definition des Untervektorraums verlangt sind, vergleichen.

> **Def.** Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum. $\underbrace{\text{Eine nichtleere Teilmenge } U \subseteq V}_{(a)}$ heißt ein Untervektorraum, falls
> (b) $\forall u, v \in U$ gilt $v + u \in U$ und
> (c) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda v \in U$.

(a) $U \subseteq \mathbb{R}^2$; $U \neq \varnothing$ — dies ist erfüllt.

(b) Dies ist auch erfüllt: Tatsächlich, für beliebige Elemente $u = \begin{pmatrix} x_u \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} x_v \\ 0 \end{pmatrix}$ (aus $U$) gilt $u + v = \begin{pmatrix} x_u \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u + x_v \\ 0 \end{pmatrix} \in U$.

(c) Auch dies ist erfüllt: Tatsächlich, für beliebiges Element $u = \begin{pmatrix} x_u \\ 0 \end{pmatrix}$ und für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $\lambda u = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_u \\ 0 \end{pmatrix} \in U$.

# Nichtbeispiel

**Bsp.** Der Kreis $K_1 := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ist KEIN Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

**Warum ist ein Kreis kein Vektorraum?** Um das zu zeigen, muss man Eigenschaften von $U$ mit Eigenschaften, die in Definition des Untervektorraums verlangt sind, vergleichen.

> **Def.** Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum. $\underbrace{\text{Eine nichtleere Teilmenge } U \subseteq V}_{(a)}$ heißt ein Untervektorraum, falls
> (b) $\forall u, v \in U$ gilt $v + u \in U$ und
> (c) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda v \in U$.

(a) $U \subseteq V$; $U \neq \varnothing$ — dies ist erfüllt.

(b) Dies ist NICHT erfüllt. Um zu zeigen, dass eine Aussage, die für alle $u, v \in U$ erfüllt sein soll, nicht erfüllt ist, finden wir ein Beispiel von 2 Vektoren aus $K_1$ so dass die Summe davon nicht in $K_1$ liegt: wir nehmen $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in K_1$ und $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in K_1$.

Die Summe davon ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin K_1$.

Also, die Bedingung (b) ist nicht erfüllt; daher ist $K_1$ kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$

# Fragen an Euch

(1) Ist $K_0 := \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$?

**Antwort.** Nein!!! $K_0$ ist keine Teilmenge von $\mathbb{R}^3$; $K_0 \not\subseteq \mathbb{R}^3$

(1') **Zusätzliche Frage:** ist $K_0$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$?

**Antwort:** Ja! Die Menge $K_0$ besteht aus einem Element $\vec{0}$; $K_0 = \{\binom{0}{0}\}$; und ist

(a) eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, die
(b) abgeschlossen sowohl bzg. $+$ (weil $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$) und
(c) auch bzg. Multiplikation mit Skalaren ist (weil $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$).

(2) Ist $K_{-1} := \{\binom{x}{y} \mid x^2 + y^2 = -1\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$?

**Antwort:** Nein! Die Menge $K_{-1} = \varnothing$ und in der Definition haben wir verlangt, dass $U \neq \varnothing$ sein soll.

# Wiederholung: Vektoräume und Rechenregeln

Ein Vektorraum ist eine Menge $V$
mit einer Abbildung $+ : V \times V \to V$
und einer Abbildung $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$
s.d. bestimmte Eigenschaften (I — VIII) (siehe Vorl. 3) erfüllt sind.

**Rechenregeln:** (Lemma 3 – Lemma 7)

- $0v = \vec{0}$
- $\lambda\vec{0} = \vec{0}$
- Ist $\lambda v = \vec{0}$, so ist $\lambda = 0$ oder $v = \vec{0}$
- $-1 \cdot v = -v$ (wobei $-v$ das inverse Element zu $v$ ist)
- Ist $\lambda v = \mu v$ für ein $v \neq \vec{0}$, so ist $\lambda = \mu$.

# $\mathbb{R}^n$ als Hauptbeispiel (letztes Mal: $\mathbb{R}^2$)

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ Stück}} := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, ..., x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Bsp:** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

**Addition im** $\mathbb{R}^n$ (wie im $\mathbb{R}^2$) : $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$.

**Bsp in** $\mathbb{R}^3$**:** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 \\ 2+5 \\ 3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$.

**Multiplikation** $\cdot$ von Elementen von $\mathbb{R}$ und von $\mathbb{R}^n$ (wie im $\mathbb{R}^2$):

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

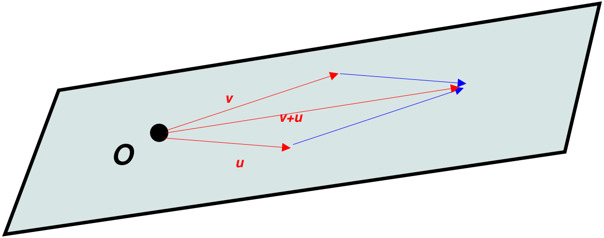
**Bsp:** $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$,

Wie wir letztes Mal für $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ bewiesen haben, kann man beweisen, dass $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ein Vektorraum ist.

**Def – Wiederholung.** Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein Untervektorraum, falls $\forall u, v \in U$ und $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ die Elemente $v + u$ und $\lambda v$ auch in $U$ liegen.

# Geometrisches Beispiel eines Untervektorraums

$O$ liege auf einer Ebene im 3-d-Raum. $U$ bestehe aus Vektoren, deren Anfangspunkt $O$ ist, und Endpunkt auch auf der Ebene liegt.




Die Menge $U$ ist abgeschlossen bzgl. Addition und Multiplikation mit Skalaren $\in \mathbb{R}$.

**Satz 3** Für die Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$, wobei $a_i \in \mathbb{R}$, ist die Lösungsmenge $L := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \right\}$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$.

**Beweis:** Die Teilmenge $L \neq \emptyset$, weil $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in L$. In der Tat,

$a_1 \cdot 0 + ... + a_n \cdot 0 = 0$.
Z.z.: Die Lösungsmenge ist abgeschlossen bzgl.
(i) Addition und (ii) Multiplikation.

(i) Seien $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in L$, d.h. $\begin{array}{llll} a_1x_1+ & \cdots & +a_nx_n & =0 \\ a_1y_1+ & \cdots & +a_ny_n & =0 \end{array}$. Dann ist $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_1y_1 + \cdots + a_ny_n = 0 + 0 = 0$, also $a_1(x_1 + y_1) + \cdots + a_n(x_n + y_n) = 0$, also $\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \in L$.

(ii) Analog. $\square$

**Bemerkung.** Es ist wichtig, dass auf der rechten Seite der Gleichung 0 steht: wenn dort etwas anderes steht (z.B., 1), ist die Lösungsmenge kein Untervektorraum. In der Tat, wenn $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in L$ sind, also wenn

$$\begin{array}{cccc} a_1x_1+ & \cdots & +a_nx_n & =1 \\ a_1y_1+ & \cdots & +a_ny_n & =1 \end{array},$$

dann ist $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_1y_1 + \cdots + a_ny_n = 1 + 1 = 2$, also $a_1(x_1 + y_1) + \cdots + a_n(x_n + y_n) = 2 \neq 1$, also $\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \notin L$.

**Bemerkung:** Den Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aus dem vorangegangenen Bsp.,

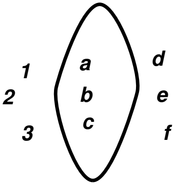
$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \right\},$$

kann man mit Hilfe von Satz 3 bekommen:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{0}_{a_1} \cdot x + \underbrace{1}_{a_2} \cdot y = 0 \right\}.$$

# Exkurs in die Mengenlehre: Schnittmenge

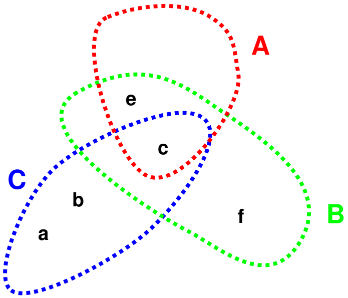
$A, B$ seien Mengen. Der Durchschnitt von $A$ und $B$ (Bezeichnung: $A \cap B$) ist die Menge aller Elemente, die sowohl in $A$ als auch in $B$ enthalten sind: $A \cap B := \{x \mid\ x \in A \text{ und } x \in B\}$.




**Schnittmenge**

# Schnittmenge von mehreren Mengen

Gegeben sei eine Menge $\mathbb{M}$ von Mengen. Die Schnittmenge von $\mathbb{M}$ ist die Menge $\bigcap_{M \in \mathbb{M}} M$ der Elemente, die in jedem Element von $\mathbb{M}$ enthalten sind: $\bigcap_{M \in \mathbb{M}} M := \{x \mid \forall M \in \mathbb{M} \text{ gilt } x \in M.\}$




$A = \{e, c\}$ $B = \{e, c, f\}$ $C = \{a, b, c\}$ Falls $\mathbb{M} := \{A, B, C\}$ $= \{\{e, c\}, \{e, c, f\}, \{a, b, c\}\}$, ist $\bigcap_{M \in \mathbb{M}} M = \{c\}$

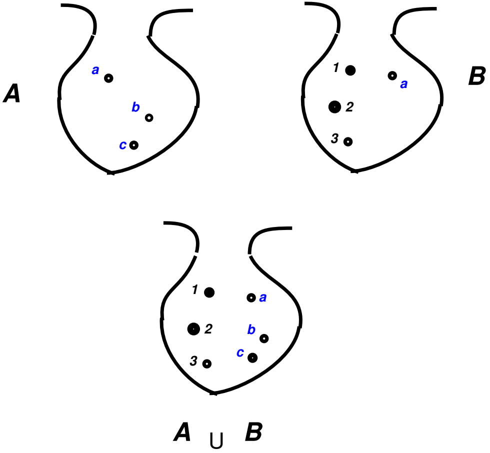
**Bsp.** Wir betrachten $M_i \subseteq \mathbb{Z}$, $M_i := \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq i\}$. (Z.B. $M_1 = \mathbb{N}$), und $\mathbb{M} := \{M_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt: $\bigcap_{M \in \mathbb{M}} M = \varnothing$.

**Bemerkung.** Man kann die Schnittmenge oben wie folgt schreiben: $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} M_i = \varnothing$

# Vereinigung von Mengen

$A, B$ seien Mengen. Die Vereinigung von $A$ und $B$ (Bezeichnung: $A \cup B$) ist die Menge aller Elemente, die in $A$ oder in $B$ enthalten sind.
**Bemerkung.** „Oder“ ist mathematisch gemeint.

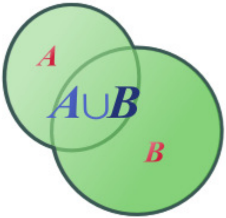
$$A \cup B := \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

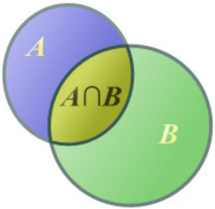


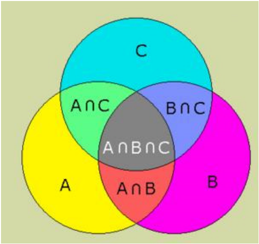
Analog kann man die Vereinigung von mehreren Mengen definieren: Falls $\mathbb{M}$ eine Menge von Mengen ist, dann ist

$$\bigcup_{M \in \mathbb{M}} M := \{x \mid \exists M \in \mathbb{M} \ \text{ sodass } x \in M\}.$$

# Mengendiagramm: ein Hilfsmittel (es lohnt sich, eines zu zeichnen)

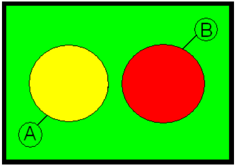


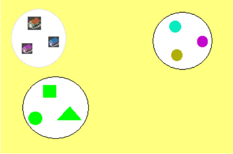



# Disjunkte Mengen

Zwei Mengen $A$ und $B$ heißt disjunkt, wenn $A \cap B = \varnothing$. Die Definition kann man für mehrere Mengen verallgemeinern: Die Mengen $A, B, C$ sind disjunkt, wenn $A \cap B = B \cap C = C \cap A = \varnothing$.



**Satz 4** *$\mathbb{U}$ sei eine Menge von Untervektoräumen des Vektorraums $(V, +, \cdot)$. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

*auch ein Untervektoraum.*

Beweis. Z.z.: (für alle Vektoren $u, v$ und Skalare $\lambda$ gilt)

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow u + v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow \quad \lambda u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$ ist nicht leer, weil $\vec{0}$ in jedem Untervektorraum $U$ liegt. Tatsächlich, $U$ enhält mind. ein Element (z.B. $w$), und deswegen auch das Element $0w \overset{\text{Lemma 3}}{=} \vec{0}$.
(b): Angenommen $u, v \in U \in \mathbb{U} \Rightarrow\ u + v \in U$ (Abgeschlossenheit von $U$ bzg. „$+$“). Also liegt $u + v$ in jedem Element von $\mathbb{U}$, also $u + v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.
(c): Angenommen $u \in U \in \mathbb{U}$, $\lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lambda u \in U$ (Abgeschlossenheit von $U$ bzg. „$\cdot$“). Also liegt $\lambda u$ in jedem Element von $\mathbb{U}$, also $\lambda u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$, $\square$

Wir betrachten ein homogenes lineares Gleichungssystem mit $m$ Gleichungen und $n$ Unbekannten:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & 0. \end{cases}$$

(Das Wort „homogen“ bedeutet in diesem Kontext, dass die rechte Seite gleich Null ist). Sei $L$ die Lösungsmenge davon, also

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, ..., m\}\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0 \right\}.$$

**Folgerung** *Die Lösungmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems ist ein Untervektorraum.*

**Beweis.** Für jedes $i \in \{1, ..., m\}$ betrachten wir

$$L_i := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0 \right\}.$$

Dann ist $L = \bigcap_{i \in \{1,...,m\}} L_i$, weil ein $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ genau dann in $L$ liegt, wenn es alle Gleichungen $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0$ erfüllt, also wenn es in allen $L_i$ liegt.

Nach Satz 3 sind $L_i$ Untervektorräume. Dann ist $L$ auch Untervektorraum nach Satz 4. $\square$

# Einschränkung einer Abbildung

Sei $f : A \to B$, $A_1 \subseteq A$. $f$ eingeschränkt auf $A_1$ (bez: $f_{|A_1}$) ist die Abbildung
$f : A_1 \to B$, $f_{|A_1}(x) := f(x) \quad (\forall x \in A_1)$.

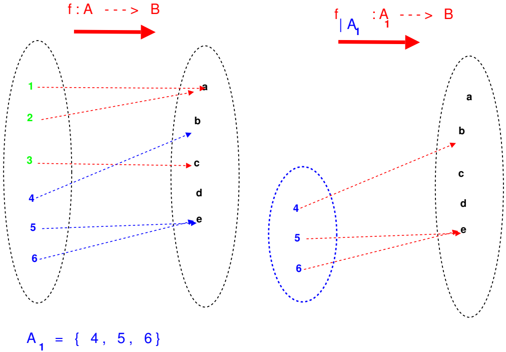



Abbildung: **Bsp:** $A_1 \subseteq A$ und $f_{|A_1} : A_1 \to B$

# Einschränkung der Operationen $+$ und $\cdot$

Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum. Addition von Vektoren und Multiplikation von Skalaren und Vektoren sind auch Abbildungen (nach Def. des Vektorraums):

$+ : V \times V \to V \qquad \cdot : \mathbb{R} \times V \to V$

Dann kann man für eine Teilmenge $U \subseteq V$ die Operationen auf $U$ einschränken (weil die Operationen Abbildungen sind)

$+_U : U \times U \to V$ ist wie folgt definiert: $\forall u_1, u_2 \in U$ ist $u_1 +_U u_2 := u_1 + u_2 \in V$.

$\cdot_U : \mathbb{R} \times U \to V$ ist wie folgt definiert: $\forall u \in U\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ist $\lambda \cdot_U u := \lambda u \in V$.

Vorsicht: wenn $U$ eine beliebige Teilmenge ist, könnte es sein, dass $u_1 + u_2 \notin U$, oder $\lambda \cdot u \notin U$.

Wir sagen, dass die Einschränkung von $+$ und $\cdot$ auf $U \subseteq V$ wohldefiniert ist, falls $\forall u_1, u_2 \in U\ u_1 +_U u_2 \in U$ ist und $\forall u \in U\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\ \lambda \cdot_U u \in U$ ist.

Wenn die Einschränkung von $+$ und $\cdot$ auf $U \subseteq V$ wohldefiniert ist, sind $+_U$ und $\cdot_U$ Operationen auf $U$:

$+_U : U \times U \to U$ und $\cdot_U : \mathbb{R} \times U \to U$.

# Ein Untervektorraum eines Vektorraums ist ein Vektorraum bzgl. induzierter Operationen

**Satz 5.** *Sei $U$ ein Untervektorraum eines Vektorraums $(V, +, \cdot)$. Dann ist $(U, +_U, \cdot_U)$ ist ein Vektorraum.*
**Beweis.** Die Operationen $+_U$ und $\cdot_U$ sind wohldefiniert nach Definition eines Untervektorraums, weil $(\forall u_1, u_2, u \in U$ und $\forall \lambda \in \mathbb{R})$ gilt $u_1 + u_1 \in U$; $\lambda u \in U$; also $+_U : U \times U \to U$ und $\cdot_U : \mathbb{R} \times U \to U$ wie wir in der Definition eines Vektorraum verlangen.
Um zu zeigen, dass $(U, +_U, \cdot_U)$ ein Vektorraum ist, müssen wir die Eigenschaften I — VIII nachweisen.
Eigenschaft I: $\forall u_1, u_2, u_3 \in U$ gilt $(u_1 +_U u_2) +_U u_3 = u_1 +_U (u_2 +_U u_3)$
**Beweis von I**: Nach Definition von $+_U$ ist
$(u_1 +_U u_2) +_U u_3 = (u_1 + u_2) + u_3$ und
$u_1 +_U (u_2 +_U u_3) = u_1 + (u_2 + u_3)$; da $V$ ein Vektorraum ist, ist
$(u_1 + u_2) + u_3 = u_1 + (u_2 + u_3)$, deswegen
$(u_1 +_U u_2) +_U u_3 = u_1 +_U (u_2 +_U u_3)$.
Analog: **Beweis von II**: Für alle $u_1, u_2 \in V$ gilt $u_1 +_U u_2 = u_2 +_U u_1$ (die Operation $+$ auf $V$ hat diese Eigenschaft, und die Operation $+_U$ fällt auf der Menge, auf der sie definiert ist, mit $+$ zusammen.)

**Beweis von III:** Es existiert ein $\vec{0} \in U$, so dass für alle $u \in U$ $\vec{0} + u = u$ gilt.
Der Vektor $\vec{0}$ hat die Eigenschaft $\vec{0} + u = u$, wir müssen deswegen nur beweisen, dass $\vec{0} \in U$ ist.
Nach Definition eines Untervektorraums ist $U \neq \varnothing$, also $\exists u \in U$. Wir betrachten $0 \cdot u$. Nach Definition eines Untervektorraums ist $0 \cdot u \in U$.
Nach Lemma 3 ist $0 \cdot u = \vec{0}$. Also $\vec{0} \in U$.
**Beweis von IV:** Für jedes $u \in U$ existiert ein $-u \in U$, so dass gilt $-u + u = \vec{0}$.
Analog zum Beweis von III. Der Vektor $-1 \cdot u$ liegt in $U$, nach Definition eines Untervektorraums, und hat die Eigenschaft $-1 \cdot u + u = \vec{0}$ nach Lemma 6.
**Beweis von V — VIII:** ist Analog zum Beweis I, II: die Operationen $+$ und $\cdot$ auf $V$ haben die Eigenschaften V — VIII und die Operationen $+_U$, $\cdot_U$ fallen auf der Menge, auf der sie definiert sind, mit $+$ und $\cdot$ zusammen.
Satz 5 ist bewiesen.

# Die $\sum$– Bezeichnung für die Summe

In einem Vektorraum ist die Addition assoziativ und kommutativ (Eigenschaften I und II). Deswegen hängt das Ergebnis

$$((v_{13} + ((v_2 + v_{31})) + ... + ((v_{m-1} + v_{m-1}))) \qquad (*)$$

weder von der Reihenfolge der Addition (also, von Klammern) noch von der Reihenfolge der Elemente (also von den Plätzen, wo sie stehen) ab.

**Ab Jetzt werden wir die Klammern womöglich weglassen.**

Bezeichnung: Statt der Summe von mehreren Elementen werden wir das Zeichen $\sum$ verwenden:
z.B. $(*) = \sum_{i=1}^{m} v_i$
z.B. $\sum_{i=2}^{4} A_i := A_2 + A_3 + A_4$

# Linearkombinationen

**Def.** *Es sei* $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ *und* $v_1, ..., v_k \in V$.
*Die Linearkombination von* $v_1, ..., v_k$ *mit Koeffizienten* $\lambda_1, ..., \lambda_k$ *ist der Vektor*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$$

**Bsp:** *Die Linearkombination von* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *mit Koeffizieten* $-2, \ 1$ *ist* $-2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**Def.** *Man sagt, dass ein Vektor* $v$ *eine Linearkombination der Vektoren* $v_1, ..., v_m$ *ist, falls es* $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$ *gibt so dass*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = v$$

**Bsp.** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *ist eine Linearkombination von* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

# Lineare Hülle

**Def.** *$A$ sei eine nichtleere Teilmenge des Vektorraums $(V, +, \cdot)$. Die lineare Hülle von $A$ (Bezeichung: $\mathrm{span}(A)$) ist die Menge aller Linearkombinationen der Elemente aus $A$.*

$$\mathrm{span}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \quad : \quad \text{so dass } k \in \mathbb{N}, \ \lambda_i \in \mathbb{R} \ \text{ und } \ v_i \in A \right\}.$$

**Bemerkung:** Auch wenn die Menge $A$ unendlich ist, besteht die lineare Hülle nur aus endlichen Linearkombinationen.

Wenn die Menge $A$ endlich ist, z.B. $A = \{v_1, ..., v_k\}$, kann man sich immer denken, dass alle Elemente in der Linearkombination anwesen sind, also:
$\mathrm{span}(\{v_1, ..., v_k\}) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \quad : \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \ \text{ und } \ v_i \in A \right\}$. In der Tat, die „fehlenden“ $v_i$ kann man mit $0-$Koeffizient $\lambda_i = 0$ addieren.

# Einfaches Bsp in $\mathbb{R}^3$

$$\mathrm{span}\left(\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\right)=\left\{\begin{pmatrix}0\\x\\y\end{pmatrix}\ :\ \text{wobei } x,y\in\mathbb{R}\right\}$$

**Wie zeigt man dass zwei Mengen $A$ und $B$, in unserem Fall A=$\mathrm{span}\left(\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\right)$ und B=$\left\{\begin{pmatrix}0\\x\\y\end{pmatrix}\ :\ \text{wobei } x,y\in\mathbb{R}\right\}$, gleich sind?**

Nach Definition (Vorl. 2) $A=B \iff (A\subseteq B$ und $B\subseteq A)$.

Wir zeigen $A\subseteq B$: Wir zeigen, dass jede Linearkombination von $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ in $B$ liegt, d.h., die Form $\begin{pmatrix}0\\x\\y\end{pmatrix}$ hat:

$$\lambda_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix}\in B.$$

Wir zeigen jetzt $B\subseteq A$: Jedes Element der Form $\begin{pmatrix}0\\x\\y\end{pmatrix}$ ist eine Linearkombination der Vektoren $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix}0\\x\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$