Lernziele der dritten Woche: Die Studierenden sollen ...

- ... die Definition der linearen Hülle verstehen.
- ... nachweisen können, dass die lineare Hülle ein Unterraum ist, und diesen Unterraum charakterisieren (Satz 6 und Folgerung).
- ... zeigen können, dass $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ein Vektorraum ist.
- ... die Definition von linear unabhängigen Vektoren und linear unabhängigen Mengen (von Vektoren) verstehen und anwenden können.
- ... die Definition einer Basis verstehen und überprüfen können, ob eine explizit gegebene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ eine Basis bildet.
- ... Basis durch Eigenschaften charakterisieren (Satz 7) und diese anwenden
- Dimension eines explizit gegebenen Vektoraums berechnen

Lineare Hülle

Def – Wiederholung. *A sei eine nichtleere Teilmenge des Vektorraums $(V, +, \cdot)$. Die lineare Hülle von A (Bezeichung: $\mathrm{span}(A)$) ist die Menge aller Linearkombinationen der Elemente aus A.*

$$\mathrm{span}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \quad : \quad \text{so dass } k \in \mathbb{N},\ \ \lambda_i \in \mathbb{R} \ \text{ und } \ v_i \in A \right\}.$$

Die lineare Hülle ist ein Untervektorraum

Satz 6 *A sei eine nichtleere Teilmenge des Vektorraums* $(V, +, \cdot)$*. Dann gilt*

(a) $\mathrm{span}(A)$ *ist ein Untervektorraum.*

(b) *Enthält ein Untervektorraum U alle Elemente von A, so ist* $\mathrm{span}(A) \subseteq U$

Folgerung *A sei eine nichtleere Teilmenge des Vektorraums* $(V, +, \cdot)$*. Sei* $\mathbb{A}$ *die Menge aller Untervektorräume, die A enthalten. Dann gilt: Die lineare Hülle von A ist die Schnittmenge aller Elementen von* $\mathbb{A}$*:*

$$\operatorname{span}(A) := \bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$$

Satz 6

(a) $\mathrm{span}(A)$ *ist ein Untervektorraum.*

(b) *Enthält ein Untervektorraum U alle Elemente von A, so ist $\mathrm{span}(A) \subseteq U$*

Folgerung. *Die lineare Hülle von A ist die Schnittmenge aller Elementen von $\mathbb{A}$, wobei $\mathbb{A}$ ist die Menge aller Untervektorräume, die A enthalten:*

$$\mathrm{span}(A) := \bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$$

Beweis der Folgerung (Wir nehmen an, dass Satz 6 richtig ist).
Z.z.: (i) $span(A) \subseteq \bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$ und (ii) $span(A) \supseteq \bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$.

(i) folgt aus Satz 6(b): Da für jedes $U \in \mathbb{A}$ gilt $span(A) \subseteq U$, ist $span(A) \subseteq \bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$ (Die Schnittmenge $\bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$ besteht aus Elementen, die in allen Mengen U vorhanden sind, und alle Elemente von $span(A)$ liegen nach Satz 6(b) in allen $U \in \mathbb{A}$).

(ii) folgt aus Satz 6(a): $span(A)$ ist ein Untervektorraum, der offensichtlich alle Elementen aus A enthält (weil man den Vektor $a \in A$ als Linearkombination $1 \cdot a$ bekommen kann). Also $span(A) \in \mathbb{A}$. Dann ist $span(A) \supseteq \bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$ (weil $\bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$ aus Elementen besteht, die in allen Mengen $U \in \mathbb{A}$ vorhanden sind, und deswegen auch in $span(A)$). $\square$

Beweis für Satz 6(b)

Z.z.: Jede Linearkombination der Elemente aus A liegt in jedem Untervektorraum $U \in \mathbb{A}$.
Betrachte eine Linearkombination, z.B. (wobei $\lambda_i \in \mathbb{R}$ und $v_i \in A$.)

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + ... + \lambda_m v_m.$$

$\lambda_1 v_1 \in U$ (Abgeschlossenheit des Vektorunterraums bzgl. „·„). $\lambda_2 v_2 \in U$ (Abgeschlossenheit bzgl. „·„)

Deswegen $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in U$ (Abgeschlossenheit bzgl. „+„).

$\lambda_3 v_3 \in U$ und $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in U$. Deswegen $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \in U$.

Nach endlich viele solchen Überlegungen liegt auch $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$ in U

Beweis für Satz 6(a)

Z.z.:
$\left\{ \sum_{i=1}^{k} \ \lambda_i v_i \ \middle| \ \ k \in \mathbb{N}, \ \ \lambda_i \in \mathbb{R} \ \ \text{und} \ \ v_i \in A \ \right\}$ ein Untervektorraum ist
Wir müssen zeigen, dass die Menge abgeschlossen bzgl.
(i) „+“ und (ii) „·“ ist.

(i): Seien u, v Linearkombinationen der Elemente aus A.
Also, für irgendwelche $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $v_i \in A$ $(i = 1, ..., k)$ gilt
$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k$
sowie für irgendwelche $m \in \mathbb{N}$ und $\mu_i \in \mathbb{R}$, $u_i \in A$ $(i = 1, ..., m)$ gilt
$u = \sum_{i=1}^{m} \mu_i u_i = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + ... + \mu_m u_m$ Dann ist die Summe

$$v + u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k + \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + ... + \mu_m u_m$$

eine Linearkombination der Elementen aus A. Also, liegt $u + v$ in der ersten Menge oben.

(ii): Analog. Ist $v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k$ und $\lambda \in \mathbb{R}^n$, so ist
$\lambda \cdot v = \lambda(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k) = \underbrace{(\lambda \cdot \lambda_1)}_{\mu_1} \cdot v_1 + ... + \underbrace{(\lambda \cdot \lambda_k)}_{\mu_k} v_k,$ □

Linear unabhängige Vektoren

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$ heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. *Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum, $A \subseteq V$ sei eine nichtleere Teilmenge. Man sagt, dass A linear unabhängig ist, falls das Null-Element $\vec{0}$ des Vektorraums nur als triviale Linearkombination der verschiedenen Elemente von A dargestellt werden kann.*
Man sagt dass A linear abhängig ist, wenn A nicht linear unabhängig ist, es also eine nichttriviale Linearkombination der verschiedenen Elemente von A gibt, die gleich $\vec{0}$ ist.
Bsp. $A = \{\vec{0}\}$ ist linear abhängig, da $1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

Bemerkung Das Wort „verschiedene“ in der Definition ist wichtig, weil man sonst $\vec{0}$ als $\underbrace{-1}_{\lambda_1} \cdot v + \underbrace{1}_{\lambda_2} \cdot v$ bekommen kann.

Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig, da
$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nur für $\lambda = 0$.

Bsp: *Die einelementige Menge* $\{v\} \subseteq V$ *ist genau dann linaer unabhängig, wenn* $v \neq \vec{0}$*.*

Beweis „$\Rightarrow$": Ist $\{v\}$ linear unabhängig, so ist jede nichttriviale Linearkombination, z.B. $1v$, nicht $\vec{0}$. Aber $1v = v$. Also $v \neq \vec{0}$.

Beweis „$\Leftarrow$": Ist $v \neq \vec{0}$, so ist nach Lemma 5 jede nichttriviale Linearkombination λv nicht $\vec{0}$. $\square$

Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ist linear unabhängig, weil jede Linearkombination

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

genau dann $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist, wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Bsp.

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$ ist linear abhängig, weil die Linearkombination

$$4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Wie entscheidet man, ob eine explizit gegebene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ linear unabhängig ist?

Zum Beispiel knallhart ausrechnen:
Angenommen, $n = 2$ und die Menge $A := \left\{ \binom{1}{2}, \binom{3}{4} \right\}$.
Nach Definition ist A linear abhängig, falls es λ_1 und λ_2 gibt, so dass $\lambda_1 \neq 0$ oder $\lambda_2 \neq 0$, und so, dass die Linearkombination
$\lambda_1 \cdot \binom{1}{2} + \lambda_2 \cdot \binom{3}{4} = \binom{0}{0}$ ist, also
$\begin{pmatrix} 1 \cdot \lambda_1 + 3 \cdot \lambda_2 \\ 2 \cdot \lambda_1 + 4 \cdot \lambda_2 \end{pmatrix} = \binom{0}{0}$ ist.
Das ist ein lineares Gleichungssystem für λ_1 und λ_2:
$\begin{cases} 1 \cdot \lambda_1 + 3 \cdot \lambda_2 = 0 \\ 2 \cdot \lambda_1 + 4 \cdot \lambda_2 = 0 \end{cases}$. Man löst es z.B. mit dem Gauss-Verfahren.
Wenn es nur die triviale Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ gibt (was in unserem Bsp der Fall ist), ist die Menge A linear unabhängig. Wenn es nichttriviale Lösungen $\binom{\lambda_1}{\lambda_2} \neq \binom{0}{0}$ gibt, ist die Menge linear abhängig und jede Lösung $\binom{\lambda_1}{\lambda_2}$ liefert uns Koeffizienten der Linerakombination, die Null ergibt.

Bemerkung. Wir werden später sehen, dass eine Menge aus m Vektoren im $\mathbb{R}^n$ mit $n < m$ immer linear abhängig ist.

Definition der Basis

Def. Es sei $(V,+,\cdot)$ ein nichttrivialer Vektorraum. Die Menge $A \subseteq V$ heißt eine Basis-Menge, falls sie

(a) linear unabhängig ist und

(b) $\mathrm{span}(A) = V$.

Später werden wir auch über Basis-Tupel sprechen: ein Tupel $(v_1, ..., v_n)$ von Vektoren aus V heißt ein Basis-Tupel, wenn die Menge $A = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis-Menge ist, und $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$.
Wir werden oft das Wort „Menge“ bzw. „Tupel“ vergessen, also nur von Basen sprechen. Aus dem Kontext wird immer klar, ob wir von einem Tupel sprechen, also die Vektoren „nummeriert“ sind, oder für uns nur die Menge von Vektoren wichtig ist.

Bemerkung. Die Extra-Bedienung dass die Vektoren im Tupel verscheiden sind ist wichtig, sonst könnte das Tupel $(\underbrace{v}_{u_1}, \underbrace{v}_{u_2}, *, *, *)$ eine linear unabhängige Menge bilden, weil die entsprechende Menge A nur einmal v enthält. Die Linearkombination $1 \cdot u_1 - 1 \cdot u_2 + 0 \cdot (*) + 0 \cdot (*) + 0 \cdot (*)$ ist aber Null.

Def.

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein nichttrivialer Vektorraum. Die Menge $A \subseteq V$ heißt eine Basis-Menge, falls sie

(a) linear unabhängig ist und

(b) $\mathrm{span}(A) = V$.

Warum haben wir den trivialen Vektorraum $V := \{\vec{0}\}$ ausgeschlossen? Weil nach unserer Definition V keine Basis hat. Tatsächlich, V hat zwei Teilmengen: $\{\vec{0}\}$ und $\varnothing$.

- $\{\vec{0}\}$ ist keine Basis, da sie linear abhänging ist: $1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$.
- $\varnothing$ ist auch keine Basis, da $span(\varnothing) = \varnothing$.

Nach Definition (aus kosmetischen Gründen, die später klar werden) setzten wir die Basis des trivialen Vektorraums gleich $\varnothing$.

Bsp.

Ist die folgende Menge A eine Basis in $V = \mathbb{R}^3$?

A=$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen.

Eigenschaft (a) ist erfüllt: Jede Linearkombination der Elemente aus A ist gleich

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und ist ungleich $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, falls die Linearkombination nichttrivial ist, d.h. falls nicht alle λ_i gleich 0 sind.

Eigenschaft (b) ist nicht erfüllt: nicht alle Vektoren von $\mathbb{R}^3$ kann man als lineare Hülle darstellen.

Tatsächlich ist der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ keine Linearkombination der Vektoren aus A.

Antwort: Nein, A ist keine Basis.

Bsp. Ist die folgende Menge A eine Basis in $V = \mathbb{R}^3$?

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen. Eigenschaft (a) ist erfüllt: Jede Linearkombination der Elemente aus A ist gleich

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

und ist ungleich $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, falls die Linearkombination nichttrivial ist, d.h. falls nicht nicht alle λ_i gleich 0 sind.

Eigenschaft (b) ist auch erfüllt: Jedes Element von V hat die Form $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, wobei $x, y, z \in \mathbb{R}$, und ist deswegen eine Linearkombination von Elementen aus A:

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Antwort: Ja, A ist eine Basis.

Standard-Basis im $\mathbb{R}^n$

Bsp. vorher kann man auf beliebige $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern: Die Vektoren
$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \ e_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis (die sogenannte Standard-Basis) im $\mathbb{R}^n$.

Bsp. Ist die folgende Menge A eine Basis in $V = \mathbb{R}^3$?

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen. Eigenschaft (b) ist erfüllt: jedes Element von V hat die Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

wobei $x, y, z \in \mathbb{R}$, und ist deswegen eine Linearkombination von (sogar den ersten 3) Elementen aus A.

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Eigenschaft (a) ist nicht erfüllt (Bsp. vorher)

$$4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Wie kann man entscheiden, ob eine explizit gegebene Teilmenge $\{v_1, ..., v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Basis ist?

Man kann die Definition benutzen und die Aufgabe auf ein entsprechendes lineares Gleichungssystem zurückführen: Um die Eigenschaft (a) (= lineare Unabhängigkeit) zu prüfen, muss man das folgende homogene Gleichungssystem lösen:
$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k = \vec{0}$ (Die $\lambda_1, ..., \lambda_k$ sind die Unbekannten, die Einträge von v_i sind die Koeffizienten in der $i-$ten Spalte des Systems, die rechte Seite ist 0.)
Heute haben wir bereits das System für das Beispiel $k = n = 2$, $A := \left\{ \binom{1}{2}, \binom{3}{4} \right\}$ konstruiert.
Falls es nur die triviale Lösung gibt, ist das System linear unabhängig.
Falls es noch andere Lösungen gibt, ist das System linear abhängig.

Die Eigenschaft (b) kann man auch auf lineare Gleichungssysteme zurückführen. Es genügt zu zeigen, dass man die

Standard-Basis-Vektoren $e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ..., $e_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ als

Linearkombinationen von $\{v_1, ..., v_k\}$ bekommen kann. In der Tat, wenn wir die Standard-Basis-Vektoren als Linearkombinationen von $v_1, ..., v_k$ erzeugen können, also wenn $e_1 = \lambda_1^1 v_1 + ... + \lambda_k^1 v_k$, ... , $e_n = \lambda_1^n v_1 + ... + \lambda_k^n v_k$ ist, dann ist ein beliebiger Vektor

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot e_1 + ... + x_n \cdot e_n = x_1(\lambda_1^1 v_1 + ... + \lambda_k^1 v_k) + ... + x_n(\lambda_1^n v_1 + ... + \lambda_k^n v_k)$$

$= [$ u.A. Distributiveigenschaft VII mehrmals angewendet $] =$

$\underbrace{(x_1\lambda_1^1 + ... + x_n\lambda_1^n)}_{\mu_1} v_1 + ... + \underbrace{(x_1\lambda_k^1 + ... + x_n\lambda_k^n)}_{\mu_k} v_k$, wie gewünscht.

Bsp. Angenommen, $k = n = 2$ und die Menge $A := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$.

(a) haben wir heute gezeigt. Wir zeeigen jetzt (b).

Wir erzeugen $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ (ich habe die entsprechende Gleichungssysteme zu Hause gelöst). Also ist die Menge A eine Basis in $\mathbb{R}^2$. Ausserdem ist die Standard-Basis eine Basis in $\mathbb{R}^2$.

Bemerkung. Das Verfahren funktioniert, ist aber langweilig – man muss $n+1$ Gleichungssysteme lösen: ein homogenes $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k = 0$ um zu prüfen, ob die Menge linear unabhängig ist, und n inhomogene $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k = e_i$, $i = 1, ..., n$ um zu prüfen, ob wir alle Vektoren e_i erzeugen können. Man bemerke auch, dass die linken Seiten in den Gleichungssystemen gleich sind, also das Gauss-Verfahren für alle Systeme sehr ähnlich verlauft – Unterschiede gibt es nur auf der rechte Seite des Systems.

MAN ERWARTET DESWEGEN, DASS MAN DAS VERFAHREN VIEL EINFACHER MACHEN KANN. DIES IST TATSÄCHLICH DER FALL: ES GENÜGT, NUR EIN SYSTEM ZU LÖSEN. WIR WERDEN ES IN DEN NÄCHSTEN VORLESUNGEN ERKLÄREN UND BEWEISEN

Definition der Basis wiederholen

Def. Es sei $(V, +, \cdot)$ ein nichttrivialer Vektorraum. Die Menge $A \subseteq V$ heißt eine Basis-Menge, falls sie

(a) linear unabhängig ist und

(b) $\mathrm{span}(A) = V$.

Satz 7. *A sei eine nichtleere Teilmenge des nichttrivialen Vektorraums* $(V, +, \cdot)$*. Dann sind die folgende Aussagen äquivalent.*

(a) *A ist eine Basis.*

(b) *Jedes* $v \in V$ *lass sich in eindeutiger Weise als eine Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A darstellen.*

(c) *A ist linear unabhängig und für jedes* $v \in V$, $v \notin A$ *ist die Vereinigungsmenge* $A \cup \{v\}$ *linear abhängig.*

Schema des Beweises: (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a)

(a) $\Rightarrow$ (b)

Sei A eine Basis. Z.z.:

(1) Jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination der Elemente aus A,

(2) die Darstellung von v als Linearkombination ist eindeutig.

Die Aussage (1) folgt direkt aus der Definition einer Basis: $\mathrm{span(A)} \overset{\text{Def.}}{=} V$, und deswegen ist jedes $v \in V$ eine Linearkombination der Vektoren aus A.

(a) $\Rightarrow$ (b)

Wir beweisen Aussage (2): Die Darstellung von v als Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A ist eindeutig.
Angenommen
$\sum_{i=1}^{k_1} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k_2} \mu_i u_i$, wobei v_i paarweise verschieden sind und u_i paarweise verschieden sind. OBdA könnnen wir annehmen, dass $k_1 = k_2 (= k)$ und $v_i = u_i$, weil wir die fehlende Vektoren mit $0-$Koeffizient addieren können. Also

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i, \qquad (*)$$

wobei $v_i \in A$ paarweise verschieden sind.
Z.z.: Für jedes $i \in \{1, ..., k\}$ gilt $\lambda_i = \mu_i$.

Wir addieren $(-1) \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i$ zu beiden Seiten der Gleichung $(*)$:

$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + (-1) \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i = \vec{0}$.

Nach dem Distributivsgesetz (Eigenschaft VII) ist dann
$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \mu_i) v_i = \vec{0}$.

Da A eine Basis und deswegen eine linear unabhängige Menge ist, ist die Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \mu_i) v_i$ trivial, also $\lambda_i - \mu_i = 0$, also $\lambda_i = \mu_i$.
Also (a) $\Rightarrow$ (b).

(b) $\Rightarrow$ (c)

Angenommen jedes $v \in V$ lässt sich in eindeutiger Weise als eine Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A darstellen. Z.z.:

(1) A ist linear unabhängig und

(2) für jedes $v \notin A$ ist die Vereinigungsmenge $A \cup \{v\}$ linear abhängig.

Beweis für (1): Ist die Darstellung jedes Elements eindeutig, so ist die Darstellung von $\vec{0}$ auch eindeutig, also kann man $\vec{0}$ nur als die triviale Linearkombination darstellen, d.h. A ist linear unabhängig.

(b) $\Rightarrow$ (c)

Widerspruchsbeweis für (2): Angenommen, es gibt $v \in V$, $v \notin A$, s.d. $A \cup \{v\}$ linear unabhängig ist.
Nach Voraussetzungen ist $\mathrm{span}(A) = V$, also

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k,$$

wobei $v_i \in A$ und $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Dann ist
$$\vec{0} = (-1)v + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k \qquad (**)$$
und deswegen kann man $\vec{0}$ als zwei verschiedene Linearkombinationen der Elemente $v, v_1, ..., v_k$ darstellen:
wie in $(**)$
und als die triviale Linearkombination
$\vec{0} = 0v + 0v_1 + 0v_2 + ... + 0v_k$.
Der Widerspruch zeigt, dass (b) (c) impliziert.

(c) $\Rightarrow$ (a)

$$(\mathrm{c}) = \left\{ \begin{array}{c} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{für } v \notin A \text{ ist } A \cup \{v\} \text{ nicht linear unabhängig} \end{array} \right.$$

$$(\mathrm{a}) = \left\{ \begin{array}{c} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{jedes } v \in V \text{ ist eine Linearkombination der Elemente aus } A \end{array} \right.$$

Angenommen (c). Wir müssen zeigen, dass $v \in V$ eine Linearkombination der Elemente aus A ist.
Fall 1. $v \in A$. Dann ist v schon eine Linearkombination von Elementen aus A, weil $v = 1v$.

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig, d.h. es gibt eine nichttriviale Linearkombination von Elementen aus $A \cup \{v\}$, die Null ist:

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination kommt v mit von Null verschiedenem Koeffizient vor. (Sonst ist $(***)$ eine Linearkombination von Elementen nur aus A und muß trivial sein.) Also, für irgendein j ist $v_j = v$ und $\lambda_j \neq 0$. Wir multiplizieren $(***)$ mit $-\frac{1}{\lambda_j}$

$$\vec{0} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_j} v_2 - ... - 1 v_j - ... - \frac{\lambda_k}{\lambda_j} v_k$$

und addieren v zu beiden Seiten. Wir bekommen

$$v = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i \ .$$

Also ist v eine Linearkombination der Elemente aus A. $\square$

Noch einmal zum Schema des Beweises: Wir mussten zeigen, dass die Aussagen (a), (b), (c) äquivalent sind.
Wir haben gezeigt, dass

- falls (a) erfüllt ist, (b) auch erfüllt ist. (Schritt (a) $\Rightarrow$ (b))
- falls (b) erfüllt ist, (c) auch erfüllt ist. (Schritt (b) $\Rightarrow$ (c))
- falls (c) erfüllt ist, (a) auch erfüllt ist. (Schritt (c) $\Rightarrow$ (a))

Also falls eine der Aussagen (a), (b), (c) erfüllt ist, dann sind die zwei anderen Aussagen auch erfüllt.
Und falls eine der Aussagen (a), (b), (c) nicht erfüllt ist, dann sind die zwei anderen Aussagen auch nicht erfüllt.

Def. *Ein Vektorraum* $(V, +, \cdot)$ *heißt* *endlich erzeugt*, *falls es eine endliche Teilmenge* $A \subseteq V$ *gibt so dass* $\mathrm{span}(A) = V$.
Bsp. $\mathbb{R}^3$ ist endlich erzeugt: Wie wir letztes Mal gezeigt haben, ist jeder Vektor

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

eine Linearkombination der Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Bsp. Der Vektorraum der Funktionen auf $\mathbb{R}$ (Anwesenheitsaufgabe) ist nicht endlich erzeugt.

Satz 8 *Sei* $(V, +, \cdot)$ *ein endlich erzeugter Vektorraum, d.h.* $\mathrm{span}(A) = V$ *für eine endliche Menge* A*. Dann gibt es eine Basis* $A' \subseteq A$ *von* V*.*
Bemerkung Die Basis A' ist automatisch endlich.

Frage. Ist die Basis eindeutig? Nein! Wir haben in vorher gesehen, dass die Menge $A' := \left\{ \binom{1}{2}, \binom{3}{4} \right\}$ eine Basis-Menge in $\mathbb{R}^2$ ist. Die Standard-Basis $A'' := \left\{ \binom{1}{0}, \binom{0}{1} \right\}$ ist ebenfalls eine Basis-Menge.
Also die Menge
$A := A' \cup A'' = \left\{ \binom{1}{2}, \binom{3}{4}, \binom{1}{0}, \binom{0}{1} \right\}$
hat (mind.) zwei Teilmengen, die Basen sind.

Beweis des Satzes: Angennomen $\mathrm{span}(A) = V$, wobei $A \subseteq V$ endlich ist. Falls V ein trivialer Vektroraum ist, stimmt die Aussage offensichtlich. Ferner werden wir annehmen, das unser Vektorraum nichttrivial ist.

Induktion nach der Anzahl der Elemente in der Menge A. Schema:

1. InduktionsAnfang

   Wir zeigen, dass für eine Teilmenge aus $m = 1$ Elementen die Aussage erfüllt ist.

2. InduktionsVoraussetzung

   Wir nehmen an, dass die Aussage für jede Teilmenge aus $m - 1$ Elementen erfüllt ist.

3. InduktionsSchritt

   Wir beweisen, dass falls die I.V. erfüllt ist, die Aussage auch für jede Teilmenge aus m Elementen erfüllt ist.

I.A.

Angenommen $V = span(A)$, wobei $A = \{v\}$. Ist $v = \vec{0}$, dann ist V ein trivialer Vektorraum und die Aussage ist erfüllt, da nach Definition die Basis von V gleich $\varnothing$ ist, und $\varnothing \subseteq A$.
Ist $v \neq \vec{0}$, so ist, wie wir in Vorlesung 5 bewiesen haben (im Bsp. nach der Definition der linearen Unabhängigkeit), $\{v\}$ linear unabhängig und deswegen eine Basis. (In diesem Fall ist $A' = A$).

I.V. und I.S.

I.V.: Wir nehmen an, dass wenn es in $(V, +, \cdot)$ eine Teilmenge A gibt,

- die aus $m - 1$ Elementen besteht und
- $\mathrm{span}(A) = V$ erfüllt,

es dann auch eine Basis $A' \subseteq A$ gibt.

I.S.: Wir müssen zeigen, dass falls es in $(V, +, \cdot)$ eine Teilmenge A gibt

- die aus m Elementen besteht und
- $\mathrm{span}(A) = V$ erfüllt,

es dann auch eine Basis $A' \subseteq A$ gibt.

Fall 1.A ist linear unabhängig. Dann ist A eine Basis.

I.S., Fall 2

Fall 2. A ist linear abhängig. Dann gibt es eine nichttriviale Linearkombination der Elemente aus A, die gleich $\vec{0}$ ist:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_m v_m = \vec{0},$$

wobei $v_i \in A$ und nicht alle λ_i gleich 0.
Sei $\lambda_j \neq 0$. Dann multiplizieren wir wie im Beweis des Satzes 7 beide Seiten mit $-\frac{1}{\lambda_j}$ und addieren v_j: Nach Umbenennung $v_j \mapsto v$

$$v = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i \ . \qquad (*)$$

Betrachten wir dei Menge $A' \subseteq A$, die aus allen Elementen von A besteht mit Ausnahme von v. (Also A' ist A ohne v).
Für A' alle Induktionsvoraussetzungen erfüllt sind: A' enthält genau $m - 1$ Elemente.

Z.z.: $\mathrm{span}(A') = V$,
d.h. jedes $u \in V$ ist eine Linearkombination der Elemente aus A'.
Nach Voraussetzung ist $\mathrm{span}(A) = V$, also gibt es für jedes $u \in V$ Elemente $u_1, ..., u_k \in A$ so, dass

$$u = \sum_{i=1}^{k} \mu_i u_i \; . \qquad (**)$$

Liegt v nicht in der Menge $\{u_1, ..., u_k\}$, so ist jedes u_i ein Element von A' und deswegen ist u eine Linearkombination von Elementen aus A'.
Wir nehmen an, dass v in der Menge $\{u_1, ..., u_k\}$ liegt, d.h. $v = u_j$ für irgendein j. Wir haben

$$u = \Big(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \mu_i u_i \Big) + \mu_j u_j \overset{(*)}{=} \Big(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \mu_i u_i \Big) - \mu_j \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i$$

was eine Linearkombination von Elementen aus A' ist. $\square$

Satz 8 - Wiederholung *Sei $(V, +, \cdot)$ ein endlich erzeugter Vektorraum, d.h. $\mathrm{span}(A) = V$ für eine endliche Menge A. Dann gibt es eine endliche Basis $A' \subseteq A$ von V.*

Folgerung. Sei $(V, +, \cdot)$ NICHT endlich erzeugt. Dann $\forall n \in \mathbb{N}$ gibts es eine $n-$elementige linearunabhängige Teilmenge von V.

Induktionsbeweis. I.A.: Z.z.: Es gibt eine 1-elementige linear unabhängige Menge.

Der Vektorraum V ist nichttivial, da der trivialer Vektorraum endlich erzeugt ist. Dann $\exists v_1 \in V$ mit $v_1 \neq \vec{0}$. Wie wir vorher bewiesen haben, ist die Menge $A_1 := \{v_1\}$ linearunabhängig.

I.V.: Es existiert eine linearunabhängige $A_n = \{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$.
I.S.: Z.z.: Es existiert eine linearunabhängige $A_{n+1} \subseteq V$, die aus $n + 1$ Elementen besteht.

I.S.

Wir nehmen eine linearunabhängige $A_n = \{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$, die nach I.V. existiert.
Offensichtlich, $span(A_n) \neq V$. In der Tat, sonst ist A_n eine (endliche) erzeugende Menge, was Voraussetzungen widerspricht.

Dann gibt es einen Vektor $v_{n+1} \in V$ mit $v_{n+1} \notin span(A_n)$. Wir zeigen, dass $A_{n+1} := A_n \cup \{v_{n+1}\} = \{v_1, ...v_{n+1}\}$ linearunabhängig ist.

Angenommen,

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_{n+1} v_{n+1} = \vec{0}. \qquad (*)$

Wir müssen zeigen, dass $\lambda_1 = ... = \lambda_{n+1} = 0$.

Fallunterscheidung. Ist $\lambda_{n+1} = 0$**,** so ist $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = \vec{0}$. Dann ist $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$, weil A_n lienarunabhängig ist. Also sind alle λ's gleich 0. **Fall 2.** Ist $\lambda_{n+1} \neq 0$, so können wir, ähnlich wie wir im Beweis von Satz 7 und Satz 8 gemacht haben, $(*)$ mit $-\frac{1}{\lambda_{n+1}}$ zu multiplizieren und v_{n+1} zu beiden Seiten der Gleichung zu addieren. Wir bekommen

$v_{n+1} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}} v_1 - ... - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} v_n$. Dann ist v_{n+1} eine Linearkombination von Vektoren aus A_n, was unsere Wahl von v_{n+1} widerspricht. Also, $(*)$ impliziert dass alle λ's gleich 0 ist. Schließlich ist A_{n+1} linearunabhängig, was unseres Ziel war. $\square$

Dimension

Def. *Sei* $(V, +, \cdot)$ *ein endlich erzeugter Vektorraum. Dann heißt die Anzahl der Elemente in einer Basis die Dimension des Vektorraums* V*.*

Satz 9 *Die Dimension eines (endlich erzeugten) Vektorraums hängt nicht von der Wahl der Basis ab.*

D.h. besteht eine Basis aus n Vektoren, so besteht jede Basis aus n Vektoren.

Der Beweis von Satz 9 ist kompliziert. Wir werden zuerst zwei Hilfsaussagen beweisen: Das Austauschlemma von Steinitz (Lemma 8) und den Austauschsatz von Steinitz (Lemma 9).

Lemma 8 (Austauschlemma von Steinitz (1871–1928))
$B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ sei eine Basis,
$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. Ist $\lambda_k \neq 0$, so ist
$B' := \{v_1, \ldots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ auch eine Basis.

D.h. wir können (unter den Voraussetztungen in Lem. 8) das Element v_k gegen w austauschen und die Menge bleibt trotzdem eine Basis.

Bsp. Wir nehmen die Standard-Basis $\{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\}$ in $\mathbb{R}^2$ und den Vektor $\binom{2}{3}$. Wir haben
$\binom{2}{3} = 2 \cdot \binom{1}{0} + 3 \cdot \binom{0}{1}$.
Wir sehen, dass beide Koeffizienten ungleich 0 sind. Dann sind nach Lemma 8 die Mengen $\{\binom{2}{3}, \binom{0}{1}\}$ und $\{\binom{1}{0}, \binom{2}{3}\}$ Basen in $\mathbb{R}^2$.

NichtBsp. Wir nehmen wieder die Standard-Basis $\{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\}$ in $\mathbb{R}^2$ und den Vektor $\binom{2}{0}$. Wir haben
$\binom{2}{0} = 2 \cdot \binom{1}{0} + 0 \cdot \binom{0}{1}$.
Wir sehen, dass der zweite Koeffizienten ungleich 0 ist. Dann impliziert das Lemma 8 nicht, dass die Menge $\{\binom{1}{0}, \binom{2}{0}\}$ eine Basis in $\mathbb{R}^2$; und es ist tatsächlich so dass sie keine Basis ist, weil sie linear abhängig ist:
$1 \cdot \binom{1}{0} - 2 \cdot \binom{2}{0} = \vec{0}$. Die Menge $\{\binom{2}{0}, \binom{0}{1}\}$ ist jedoch eine Basis.

Beweis des Austauschlemmas

Lemma 8 (Austauschlemma von Steinitz (1871–1928)) *$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ sei eine Basis, $w = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$. Ist $\lambda_k \neq 0$, so ist $B' := \{v_1, \dots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ auch eine Basis.*

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $k = 1$, sonst umnummerieren. Also $\lambda_1 \neq 0$.
Z.z.: $B' := \{w, v_2, \dots, v_n\}$ ist eine Basis.
v_1 ist eine Linearkombination von $\{w, v_2, \dots, v_n\}$. Tatsächlich,

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n, \qquad (*)$$

wobei $\lambda_1 \neq 0$. Nach Multiplizieren mit $-\frac{1}{\lambda_1}$ und Addieren von $v_1 + \frac{1}{\lambda_1} w$ zu beiden Seiten der Gleichung bekommen wir

$$v_1 = \frac{1}{\lambda_1} w - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} v_3 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} v_n = \frac{1}{\lambda_1} w - \sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} v_i \qquad (**)$$

Wir zeigen: $\mathrm{span}(B') = V$. Sei $v \in V$. Dann gibt es $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{R}$ so dass

$$v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \mu_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i \stackrel{(**)}{=} \frac{\mu_1}{\lambda_1} w - \frac{\mu_1}{\lambda_1} \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i .$$

Also ist jedes v eine Linearkombination der Elemente aus B', d.h. $\mathrm{span}(B') = V$.

Wir zeigen: B' ist linear unabhängig. Z.z.: Aus der Gleichung

$$\vec{0} = \alpha w + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i$$

folgt, dass $\alpha = 0$ und alle $\alpha_i = 0$.
Wir setzen $(*)$ in diese Gleichung ein:

$$\vec{0} = \alpha w + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i \stackrel{(*)}{=} \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i = \alpha \lambda_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} (\alpha \lambda_i + \alpha_i) v_i$$

Da $\{v_1, ... v_n\}$ linear unabhängig ist und $\lambda_1 \neq 0$, müssen alle Koeffizienten in dieser Linearkombination gleich 0 sein. Dann ist $\alpha = 0$ und alle $(\alpha \lambda_i + \alpha_i) = 0$. Dann sind auch alle $\alpha_i = 0$. $\square$