

Lernziele der zweiten Woche: Die Studierenden sollen ...

- ▶ ... den Beweis des Austauschsatzes verstehen.
- ▶ ... die Folgerungen (a) bis (d) daraus anwenden können.
- ▶ ... die Koordinatenabbildung für eine Basis konstruieren können.
- ▶ ... überprüfen können, ob eine gegebene Abbildung linear ist.

- ▶ ... Kern und Bild einer linearen Abbildung beschreiben können.
- ▶ ... die Injektivität einer linearen Abbildung durch Untersuchung des Kerns bestimmen können.
- ▶ ... entscheiden können, ob eine Abbildung injektiv, surjektiv oder bijektiv ist, und gegebenenfalls die (links- oder rechts-)inversen Abbildungen konstruieren.

Lemma 9 (Austauschsatz von Steinitz) Sei $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis im Vektorraum $(V, +, \cdot)$. Sei $A = \{w_1, \dots, w_k\}$ eine linear unabhängige Menge. Dann gilt

- (a) $k \leq n$ und
- (b) es gibt (paarweise verschiedene) $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j wieder eine Basis von V liefert

Bsp. Wir betrachten \mathbb{R}^3 und $B := \left\{ v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sei die Standardbasis. Wir betrachten die Menge

$A := \left\{ w_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$. Die Menge ist linear unabhängig. (Wir haben vorher gezeigt, dass $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$ linear unabhängig ist.) Nach Lemma 9 kann man irgendwelche zwei Vektoren aus B gegen Vektoren aus A austauschen, sodass die Menge trotzdem eine Basis-Menge bleibt. In unserem Bsp. kann man $i_1 = 2, i_2 = 3$ wählen. Nach dem Austausch haben wir die Menge $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$, die auch eine Basis ist.

Bemerkung. Die „Nummern“ i_1, i_2, \dots sind nicht beliebig. Selbstverständlich kann man sie beliebig unstellen. Im Bsp. oben kann man z.B. $i_2 = 2$ und $i_1 = 3$ wählen. Im Bsp. oben können wir aber nicht z.B. $i_1 = 1, i_2 = 2$ nehmen: Nach dem Austausch haben wir $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ und dies ist keine Basis: Den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ kann man nicht als Linearkombination von Vektoren aus B' erzeugen.

Wenn die Menge A einelementig ist, folgt der Austauschatz aus dem Austauschlemma

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ sei eine Basis, $A := \{w\}$ sei eine einelementige linear unabhängige Menge. Wie wir vorher in Vorlesung 5 bewiesen haben (im Bsp. nach der Definition der linearen Unabhängigkeit), ist $w \neq \vec{0}$.

Da B eine Basis ist, gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$w = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i. \quad (*)$$

Da $w \neq \vec{0}$ und B linear unabhängig ist, ist die Linearkombination $(*)$ nichttrivial, also $\exists k \in \{1, \dots, n\}$ mit $\lambda_k \neq 0$.

Wir sehen, dass alle Voraussetzungen des Austauschlemmas erfüllt sind. Also kann man v_k gegen w austauschen (also $i_1 := k$), sodass die Menge $B' := \{v_1, \dots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ eine Basis ist.

Lemma 9 (Austauschsatz von Steinitz) Sei $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis im Vektorraum $(V, +, \cdot)$. Sei $A = \{w_1, \dots, w_k\}$ eine linear unabhängige Menge. Dann gilt

- (a) $k \leq n$ und
- (b) es gibt (paarweise verschiedene) $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j wieder eine Basis von V liefert

Induktionsbeweis über k .

I.A. Für $k = 0$ ist nichts zu zeigen.

I.V. Die Aussage ist für jede Teilmenge $A \subseteq V$ aus $k - 1$ Elementen gültig.

Induktionsschritt für (a)

I.S. Z.z.: Die Aussage ist auch für jede Teilmenge A aus k Elementen gültig.

Sei $\{w_1, \dots, w_k\}$ linear unabhängig.

Wir zeigen zuerst (a): $k \leq n$. Nach I.V. ist $k - 1 \leq n$.

Widerspruchsbeweis. Angenommen, es wäre $k > n$. Dann ist $k - 1 \geq n$.

Da nach I.V. $k - 1 \leq n$, ist $k - 1 = n$. Da die Teilmenge $\{w_1, \dots, w_{k-1}\}$ linear unabhängig ist, gibt es nach I.V. (paarweise verschiedene)

$i_1, \dots, i_{k-1} \in \{1, \dots, k-1\}$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis von V liefert. Also ist $\{w_1, \dots, w_{k-1}\}$ eine Basis. Dann ist nach Satz 7(c) $A = \{w_1, \dots, w_{k-1}, w_k\}$ linear abhängig. Nach Voraussetzungen ist aber A linear unabhängig. Widerspruch zeigt, dass $k \leq n$.

Induktionsschritt für (b)

Also $k \leq n$. Wir zeigen jetzt **(b)**: es gibt i_1, i_2, \dots, i_k so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. Betrachten wir die Menge $\{w_1, \dots, w_{k-1}\}$. Da sie linear unabhängig ist, gibt es nach I.V. (paarweise verschiedene) $i_1, i_2, \dots, i_{k-1} \in \{1, \dots, n\}$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $i_1 = 1, i_2 = 2, \dots, i_{k-1} = k-1$, sonst umnumerieren. Also ist $A_{\text{neu}} := \{w_1, \dots, w_{k-1}, v_k, \dots, v_n\}$ eine Basis. Deswegen kann man w_k als Linearkombination darstellen:

$$w_k = \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i w_i + \sum_{i=k}^n \lambda_i v_i.$$

Einer der Koeffizienten λ_j ist nicht 0, da sonst

$\vec{0} = -w_k + \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i w_i$ ist, was der linearen Unabhängigkeit von $\{w_1, \dots, w_k\}$ widerspricht.

Also $\lambda_j \neq 0$. Nach dem Austauschlemma (Lemma 8) bekommen wir eine Basis, wenn wir den entsprechenden Vektor v_j gegen w_k austauschen. \square

Beweis von Satz 9

Satz 9 Die Dimension eines (endlich erzeugten) Vektorraums hängt nicht von der Wahl der Basis ab.

Beweis. Seien $\{v_1, \dots, v_n\}$ und $\{w_1, \dots, w_k\}$ Basen von $(V, +, \cdot)$. Z.z.:

$$k = n.$$

$$\begin{cases} \{v_1, \dots, v_n\} \text{ ist eine Basis} \\ \{w_1, \dots, w_k\} \text{ ist linear unabhängig} \end{cases} \stackrel{\text{Austauschsatz(a)}}{\Rightarrow} n \geq k.$$

$$\begin{cases} \{w_1, \dots, w_k\} \text{ ist eine Basis} \\ \{v_1, \dots, v_n\} \text{ ist linear unabhängig} \end{cases} \stackrel{\text{Austauschsatz(a)}}{\Rightarrow} k \geq n.$$



Folgerung (a)

Es sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine linear unabhängige Teilmenge des Vektorraums $(V, +, \cdot)$ der Dimension n . Dann ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis.

Widerspruchsbeweis. Angenommen es gibt ein $w \in V$, $w \notin \text{span}(\{v_1, \dots, v_n\})$. Dann ist $\{v_1, \dots, v_n\} \cup \{w\}$ linear unabhängig. Tatsächlich, gilt für eine Linearkombination von (paarweise verschiedenen) Elementen aus $\{v_1, \dots, v_n\} \cup \{w\}$

$$\mu w + \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \vec{0}, \quad (*)$$

dann ist $\mu = 0$, da sonst $w = -\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu} v_i$.
Dann ist (*) eine Linearkombination der Elemente aus $\{v_1, \dots, v_n\}$ und deswegen trivial. Also ist $\{v_1, \dots, v_n\} \cup \{w\}$ linear unabhängig. Aber nach dem Austauschatz muss die Anzahl der Elemente in $\{v_1, \dots, v_n\} \cup \{w\} \leq n$ sein. Widerspruch! □

Anwendung: Wie Antwortet man auf die Frage „Ist eine explizit gegebene Teilmenge im \mathbb{R}^n eine Basis?“

\mathbb{R}^n ist n -dimensional, weil $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis ist. (Sie heißt **Standardbasis** von \mathbb{R}^n , wurde bereits erwähnt.)

Gegeben eine Teilmenge $A = \{v_1, \dots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$, wie kann man verstehen ob diese Teilmenge eine Basis ist?

Falls $k \neq n$ ist, ist A keine Basis (Satz 9).

Angenommen $k = n$. Dann benutzt man Folgerung (a):

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = \vec{0}$$

ist ein System von n linearen Gleichungen für n Unbekannte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, welches man löst. Gibt es eine Lösung $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$, so ist A linear abhängig, also keine Basis. Gibt es genau eine Lösung $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$, so ist A linear unabhängig und nach Folgerung (a) eine Basis.

Um also zu prüfen, ob eine explizit gegebene Teilmenge eine Basis ist, genügt es, nur EIN lineares Gleichungssystem zu lösen, statt $n + 1$ wie in der letzten Vorlesung.

Bemerkung.

Das selbe gilt auch für alle Vektorräume mit bekannter Dimension – eine Basis ist eine linear unabhängige Teilmenge von V , so dass die Anzahl der Elemente gleich der Dimension von V ist (wobei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum ist).

Bsp. einer Anwendung

Frage Ist die folgende Menge A eine Basis in \mathbb{R}^2 ?

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Antwort: Nein! Tatsächlich, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis im \mathbb{R}^2 (**Standardbasis**), also ist \mathbb{R}^2 zweidimensional, also (Satz 9) besteht jede Basis aus 2 Vektoren, was hier nicht der Fall ist.

Frage Ist die folgende Menge A eine Basis im \mathbb{R}^2 ?

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Antwort: Nein! Eine Basis im \mathbb{R}^2 besteht aus 2 Vektoren und A enthält 3.

Bsp. einer Anwendung

Frage Ist die Teilmenge $A := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis im \mathbb{R}^2 ?

Ja! Tatsächlich, \mathbb{R}^2 ist zweidimensional. Wegen Folgerung (a) müssen wir nur zeigen, dass A linear unabhängig ist. D.h., dass nur die triviale Linearkombination gleich $\vec{0}$ ist. Die Linearkombination mit Koeffizienten λ, μ ist

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda - \mu \end{pmatrix}$$

Falls diese Linearkombination gleich $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist, muss

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases} \quad +$$

Nach Addition der Gleichungen bekommen wir $2\lambda = 0$, also $\lambda = 0$. Nach einsetzen von $\lambda = 0$ in die erste Gleichung bekommen wir $\mu = 0$. Also ist diese Linearkombination die triviale Linearkombination, d.h. A ist linear unabhängig.

Nach Folgerung (a) ist dann A eine Basis.

Folgerung (b) Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis im Vektorraum $(V, +, \cdot)$. Für $\{w_1, \dots, w_n\}$ gelte: Jedes v_i ist eine Linearkombination von Elementen aus $\{w_1, \dots, w_n\}$. Dann ist $\{w_1, \dots, w_n\}$ eine Basis.

Beweis. Wir zeigen: $\text{span}(\{w_1, \dots, w_n\}) = V$. D.h., jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination von Elementen w_i .

Da $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis ist, ist jedes v eine Linearkombination der Form $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$. (*)

Nach Voraussetzung ist jedes v_i eine Linearkombination der Elemente w_1, \dots, w_n , d.h. $v_i = \sum_{j=1}^n \mu_{ij} w_j$. Nach Einsetzen in (*) bekommen wir

$$v = \lambda_1 \sum_{j=1}^n \mu_{1j} w_j + \lambda_2 \sum_{j=1}^n \mu_{2j} w_j + \dots + \lambda_n \sum_{j=1}^n \mu_{nj} w_j = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \mu_{ij} w_j.$$

Also ist v eine Linearkombination der Elemente w_1, \dots, w_n .

Z.z.: Die Menge $\{w_1, \dots, w_n\}$ ist linear unabhängig. Angenommen sie ist nicht linear unabhängig. Wie wir eben bewiesen haben, ist

$\text{span}(\{w_1, \dots, w_n\}) = V$. Dann kann man nach Satz 8 aus $\{w_1, \dots, w_n\}$ eine Basis A' auswählen. Nach Satz 9 muss diese Teilmenge aus n Elementen bestehen, weil alle Basen die gleiche Anzahl von Elementen haben. Also ist $A' = \{w_1, \dots, w_n\}$ und deswegen ist $\{w_1, \dots, w_n\}$ eine Basis. □

Folgerung (c) (Basisergänzungssatz) Sei $(V, +, \cdot)$ ein endlich erzeugter Vektorraum, sei $r = \dim(V)$ und seien $\{w_1, \dots, w_n\}$ linear unabhängig. Dann ist $n \leq r$ und existieren Vektoren w_{n+1}, \dots, w_r , so dass $B = \{w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, \dots, w_r\}$ eine Basis von V ist.

Folgerung (c') (Basisergänzungssatz) Jede linear unabhängige Teilmenge eines endlich-dimensionalen Vektorraums $(V, +, \cdot)$ läßt sich zu einer Basis von V ergänzen.

Beweis: Sei $B = (v_1, \dots, v_r)$ eine Basis von V . Dann gibt es nach dem Austauschatz Vektoren v_{i_1}, \dots, v_{i_n} , die gegen w_1, \dots, w_n ausgetauscht werden können, so dass nach etwaigem Umnummerieren von Vektoren $B = (w_1, \dots, w_n, v_{n+1}, \dots, v_r)$ eine Basis von V ist. \square

Folgerung (d) Untervektorraum U eines endlich erzeugten Vektorraums $(V, +, \cdot)$ ist auch endlich erzeugt. Ferner gilt: $\dim(U) \leq \dim(V)$.

Widerspruchsbeweis. Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum von $(V, +, \cdot)$. V sei n -dimensional mit der Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$. Ist U nicht endlich erzeugt, dann existiert nach der Folgerung aus Satz 8 eine linearunabhängige Teilmenge $A = \{u_1, \dots, u_{n+1}\} \subseteq U$ aus $n + 1$ Vektoren. Ist U endlich erzeugt und $\dim(U) \geq n + 1$, dann existiert ebenfalls eine linearunabhängige Menge $A := \{u_1, \dots, u_{n+1}\} \subseteq U$ aus $n + 1$ Vektoren – wir nehmen einfach die ersten $n + 1$ Vektoren einer Basis.

Nach Austauschsatz ist $n + 1 \leq n$, was falsch ist. Widerspruch! □

Summe von Untervektorräumen

Def. Seien $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum und $E, F \subseteq V$ Untervektorräume. Die Summe $E + F$ ist die Teilmenge von V , die aus allen möglichen Summen $e + f$ mit $e \in E$ und $f \in F$ besteht:

$$E + F := \{e + f \mid e \in E \text{ und } f \in F\} \subseteq V.$$

Bsp. Sei $V = \mathbb{R}^2$, $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ und $F = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$. Dann ist $E + F = V$, weil man ein beliebiges Element $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ bekommt als

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}}_{e \in E} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}}_{f \in F}.$$

Satz 10 (Dimensionssatz) Seien E, F Untervektorräume eines endlich erzeugten Vektorraums $(V, +, \cdot)$. Dann gilt:

$E + F$ ist ein Untervektorraum der Dimension
 $\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F)$.

Beweis. Z.z.: (a) $E + F$ ist ein Untervektorraum.

(b) $E + F$ hat einer Basis aus $\dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F)$ Elementen.

Beweis (a) $E + F$ ist ein Untervektorraum

Z.z.: $\forall u_1, u_2 \in E + F$ ist $u_1 + u_2 \in E + F$.

Seien $u_1, u_2 \in E + F$, d.h. $u_1 = e_1 + f_1$ und $u_2 = e_2 + f_2$ für irgendwelche $e_i \in E, f_i \in F$. Dann gilt:

$$u_1 + u_2 = e_1 + f_1 + e_2 + f_2 = \underbrace{e_1 + e_2}_{\in E} + \underbrace{f_1 + f_2}_{\in F} \in E + F.$$

Abgeschlossenheit bzgl. „ \cdot “ zeigt man analog.

Beweis (b): Konstruktion der Basis in $E + F$

Zunächst ist nach dem Satz 4 $E \cap F$ ein Untervektorraum. Nach dem Basisergänzungssatz (Folg. (c)) ist $E \cap F$ endlichdimensional. Es sei $\{a_1, \dots, a_m\}$ eine Basis von $E \cap F$.

Diese lässt sich nach dem Basisergänzungssatz zu einer Basis $\{a_1, \dots, a_m, e_1, \dots, e_n\}$ von E und zu einer Basis $\{a_1, \dots, a_m, f_1, \dots, f_r\}$ von F erweitern. (Ist $\dim(E \cap F) = 0$, dann lässt man die a 's weg und setzt $m := 0$.)

Wir wollen jetzt zeigen, dass $B := \{a_1, \dots, a_m, e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_r\}$ eine Basis von $E + F$ ist. (Offensichtlich besteht B aus $m + n + r = (m + n) + (m + r) - m = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F)$ Elementen.)

Nach Definition lässt sich jeder Vektor $v \in E + F$ in der Form $v = e + f$ mit $e \in E$ und $f \in F$ darstellen. Diese Darstellung wird im Allgemeinen nicht eindeutig sein, aber jedenfalls lässt sich e als Linearkombination der $\{a_1, \dots, a_m, e_1, \dots, e_n\}$ und f als Linearkombination der $\{a_1, \dots, a_m, f_1, \dots, f_r\}$ darstellen. Damit ist v Linearkombination der Vektoren aus B , also $\text{span}(B) \supseteq E + F$. Da $B \subseteq E + F$, und $E + F$ ein Untervektorraum ist, ist $\text{span}(B) \subseteq E + F$, also $\text{span}(B) = E + F$.

Lineare Unabhängigkeit von B

Wir müssen noch nachweisen, dass B linear unabhängig ist. Es sei dazu

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^n \mu_i e_i + \sum_{i=1}^r \nu_i f_i. \quad (*)$$

Dann gilt (wir addieren $-\sum_{i=1}^r \nu_i f_i$ zu beiden Seiten):

$$\underbrace{\sum_{i=1}^m \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^n \mu_i e_i}_{\in E, \text{weil } a_i, e_i \in E} = \underbrace{\sum_{i=1}^r -\nu_i f_i}_{\in F, \text{weil } f_i \in F} := v.$$

Also liegt der Vektor v in E und in F und deswegen in $E \cap F$. Dann kann

man v als Linearkombination der a_i darstellen: $v = \sum_{i=1}^m \eta_i a_i$.

Wir wissen aber nach Satz 7(b), dass die Darstellung eines Elements als Linearkombination von paarweise verschiedenen Basisvektoren eindeutig ist. Für den Vektor v haben wir die folgenden Darstellungen:

$$v = \sum_{i=1}^m \eta_i a_i \text{ und } v = \sum_{i=1}^r -\nu_i f_i. \text{ Also alle } \nu_i = 0.$$

Analog, für den Vektor v haben wir die folgende Darstellungen:

$$v = \sum_{i=1}^m \eta_i a_i \text{ und } \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^n \mu_i e_i. \text{ Also alle } \mu_i = 0.$$

Da $\mu_i = \nu_i = 0$, ist $(*)$ äquivalent zu $\vec{0} = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$. Da $\{a_1, \dots, a_m\}$ eine Basis in $E \cap F$ ist, sind alle λ_i ebenfalls gleich 0.

Wir haben also bewiesen, dass eine Linearkombination von Elementen aus B genau dann $\vec{0}$ ergibt, wenn sie trivial ist. D.h. wir haben bewiesen, dass die Menge B linear unabhängig ist. \square

Koordinaten in einer Basis

Def. $B := (v_1, \dots, v_n)$ sei ein **Basis-Tupel** im Vektorraum $(V, +, \cdot)$, $w \in V$. Der **Koordinatenvektor** des Vektors w in dieser Basis ist das n -Tupel von Skalaren $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ so dass $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = w$.

(Die Skalare heißen dann die **Koordinaten**.)

Bemerkung Nach der Definition von Basis gibt es solche Skalare λ_i (weil $\text{span}(v_1, \dots, v_n) = V$ ist, also jedes Element von V eine Linearkombination der v_1, \dots, v_n ist). Nach Satz 7(b) sind die Zahlen λ_i eindeutig.

Def— Fortsetzung Die Abbildung $C_B : V \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$C_B(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ heißt die **Koordinatenabbildung**.

Bsp. Betrachte \mathbb{R}^2 mit der Standardbasis. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Dann ist der Koordinatenvektor eines Vektors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ das Paar $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, weil

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Bemerkung

In der Definition einer Basis haben wir *Basis-Menge* und *Basis-Tupel* (also, „geordnete“ Menge) definiert und das Wort *Basis* für beide Objekte verwendet. Hier ist die erste Stelle, wo wir tatsächlich Basen als Tupel verstehen sollen: Falls wir die Vektoren in einem Basis-Tupel umordnen, werden die entsprechende Koordinaten entsprechend umgeordnet.

Bsp. Betrachte \mathbb{R}^2 mit der umgeordneten Standardbasis:

$$\left(\left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) \right)$$

Dann sind die Koordinaten eines Vektors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ das Paar $\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$, weil

$$y \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1} + x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Bsp. Man betrachte die Basis

$$A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Welche Koordinaten hat der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in dieser Basis?

Antwort: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, weil $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Wie findet man die Koordinaten eines Vektors in einer Basis (z.B. im \mathbb{R}^n)?

Z.B. nach Definition:

Sei (v_1, \dots, v_n) eine Basis im \mathbb{R}^n , u sei ein Vektor. Alle Vektoren v_1, \dots, v_n , u seien explizit gegeben:

$$v_1 := \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix}, \dots, v_n := \begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \\ \vdots \\ v_n^n \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix},$$

wobei alle v_i^j explizit gegebene Zahlen sind.

Nach Definition sind die Koordinaten des Vektors u die Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ so dass $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = u$:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \\ \vdots \\ v_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \\ \vdots \\ v_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}$$

Und das ist das System

$$\begin{cases} \lambda_1 v_1^1 + \dots + \lambda_n v_n^1 = u^1 \\ \lambda_1 v_1^2 + \dots + \lambda_n v_n^2 = u^2 \\ \vdots \\ \lambda_1 v_1^n + \dots + \lambda_n v_n^n = u^n \end{cases}$$

von n Gleichungen für die Unbekannten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. (Die v_i^j und u^j sind gegeben.) Die Lösung existiert, ist eindeutig (Satz 7(b)) und ergibt die Koordinaten des Vektors u in der Basis (v_1, \dots, v_n) .

Aufgabe: Finde die Koordinaten des Vektors $u := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ in der

Basis

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Koordinaten sind die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ so dass

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nach der Vektoraddition bekommen wir

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das ist ein System von drei Gleichungen:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 2 & Eq_1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = -2 & Eq_2 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 2 & Eq_3 \end{cases}$$

Wir lösen das System.

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 2 & Eq_1 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 = -4 & Eq_2 - Eq_1 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = -2 & Eq_3 - 2Eq_1 \end{cases}$$

Die letzte Gleichungen minus die vorletzte gibt $2\lambda_3 = 2$, also $\lambda_3 = 1$.
 Nach Einsetzen von $\lambda_3 = 1$ in die letzte Gleichung bekommen wir $\lambda_2 - 1 = -2$, also $\lambda_2 = -1$. Nach Einsetzen von $\lambda_3 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ in die erste Gleichung bekommen wir $\lambda_1 - 1 + 2 = 2$, also $\lambda_1 = 1$.

Antwort: Vektor $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat Koordinaten $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in der

Basis

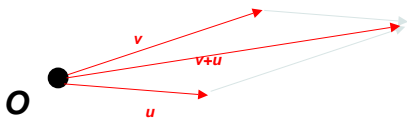
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Basis in der (geometrischen) Ebene

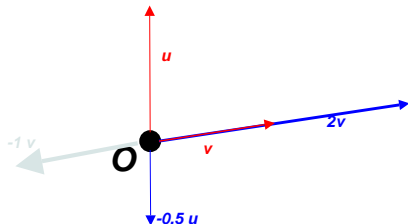
Wiederholung: Sei E eine Ebene, $O \in E$ und V die Menge

$V := \{\text{gerichtete Strecken mit Anfangspunkt } O \text{ und Endpunkt auf } E\}$.

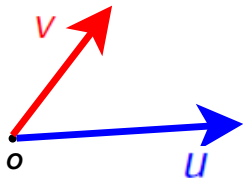
Addition von Vektoren: Parallelogrammregel.



Multiplikation \cdot von Skalaren $\in \mathbb{R}$ und Vektoren: Streckungen/Stauchungen.

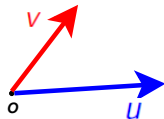


Behauptung: V ist zweidimensional. Zwei beliebige Vektoren $u, v \in V$ mit $u \neq \vec{0} \neq v$ und $\forall \lambda \in \mathbb{R} \lambda u \neq v$ bilden eine Basis



Beweis der Behauptung.

Wir betrachten zwei Vektoren u, v mit $u \neq \vec{0} \neq v$ und $\forall \lambda \in \mathbb{R} \lambda u \neq v$. Wir müssen zeigen:



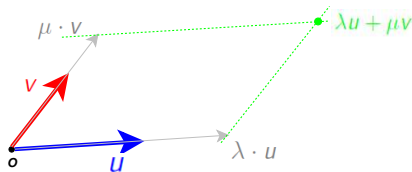
(a) $\{u, v\}$ ist linear unabhängig, d.h. $\lambda u + \mu v = \vec{0} \iff \lambda = 0 = \mu$

(b) $\{u, v\}$ ist erzeugend, d.h. jeden Vektor $w \in V$ kann man als Linearkombination $\lambda u + \mu v$ von u und v bekommen.

(mit Quantoren ausgedrückt: $\forall w \in V \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sodass $\lambda u + \mu v = w$).

Beweis (a) Wenn $\lambda \neq 0 \neq \mu$ ist, ist der Endpunkt des Vektors $\lambda u + \mu v$ nach Definition der den Punkt O gegenüberliegenden Punkt des Parallelograms auf dem Bild – die Seiten sind $\lambda \cdot u$ und $\mu \cdot v$.

Offensichtlich ist der Punkt nicht O , also wenn $\lambda \neq 0 \neq \mu$, ist $\lambda u + \mu v \neq \vec{0}$, wie behauptet.

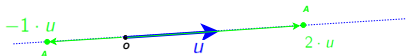


Wenn $\lambda \neq 0$ und $\mu = 0$ ist, ist der Vektor $\lambda u + \mu v = \lambda u$, und ist auch nicht $\vec{0}$ (nach Lemma 5). Der Fall $\lambda = 0$ und $\mu \neq 0$ ist ähnlich.

Beweis (b)

Z.z.: Ein beliebiger Vektor $w = \overrightarrow{OA}$ (mit Endpunkt A) ist
Linearkombination von u, v .

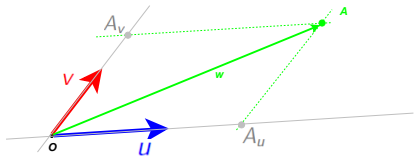
Fall 1. Wenn A auf der Gerade liegt, die durch O und Endpunkt von u
geht, ist $w = \lambda u$ mit $\lambda = \pm \frac{\text{Länge von } w}{\text{Länge von } u}$.



Fall 2 — wenn A auf der Gerade liegt, die durch O und Endpunkt von v
geht — analog.

Fall 3. A (=Endpunkt von w) liege jetzt weder auf der Gerade durch O und den Endpunkt von u , noch auf der der Gerade durch O und den Endpunkt von v .

Wir betrachten die Geraden durch A , die zu u und v parallel sind. Sie schneiden die Gerade durch O und den Endpunkt von u und die Gerade durch O und den Endpunkt von v . Die Schnittpunkte bezeichnen wir mit A_u und A_v .



Die Vektoren $\overrightarrow{OA_u}$ und $\overrightarrow{OA_v}$ sind proportional zu u bzw. v . Also ist $\overrightarrow{OA_u} = \lambda u$ und $\overrightarrow{OA_v} = \mu v$ für irgendwelche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann ist $w = \lambda u + \mu v$, also auch in Fall 3 haben wir einen beliebigen Vektor w als Linearkombination von u und v erzeugt.

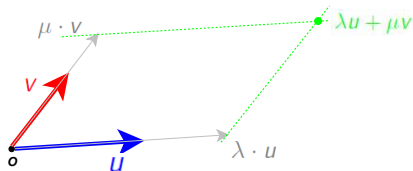
Bemerkung. Man kann λ und μ berechnen wie im Fall 1.

In der Tat, $|\lambda| := \frac{\text{Länge von } \overrightarrow{OA_u}}{\text{Länge von } u}$ und das Vorzeichen von λ ist „+“, wenn A_u und der Endpunkt von u auf der gleichen Seite von O liegen, und sonst „-“. Analog, $|\mu| := \frac{\text{Länge von } \overrightarrow{OA_v}}{\text{Länge von } v}$ und das Vorzeichen von μ ist „+“, wenn A_v und der Endpunkt von v auf der gleichen Seite von O liegen und sonst „-“.

Koordinaten eines Vektors w auf der Ebene (geometrisches Beispiel)

Wir betrachten die Basis (u, v) auf der geometrischen Ebene.

Nach Definition sind die Koordinaten die Zahlen λ, μ sodass $w = \lambda u + \mu v$:



Wir betrachten die Punkte A_u, A_v wie vorher. Dann gilt $\lambda := \pm \frac{\text{Länge von } OA_u}{\text{Länge von } u}$ und $\mu := \pm \frac{\text{Länge von } OA_v}{\text{Länge von } v}$, wobei das Vorzeichen davon abhängt, auf welcher Seite von O die Punkte A_u und Endpunkt von u bzw. die Punkte A_v und der Endpunkt von v liegen.

Def. Es seien $(V_1, +, \cdot)$ und $(V_2, +, \cdot)$ zwei Vektorräume. Eine Abbildung $f : V_1 \rightarrow V_2$ heißt *linear*, falls für alle Vektoren $u, v \in V_1$ und für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- ▶ $f(u + v) = f(u) + f(v)$,
- ▶ $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Bsp. Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist linear, weil $f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \right) =$
 $\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right) + f \left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right),$

$$f \left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

Bsp. Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist die Streckung $f : V \rightarrow V$, $f(v) := \alpha \cdot v$ linear.

Tatsächlich,

$$f(v_1 + v_2) = \alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2 = f(v_1) + f(v_2),$$

$$f(\lambda v_1) = \alpha(\lambda v_1) = (\alpha\lambda)v_1 = (\lambda\alpha)v_1 = \lambda(\alpha v_1) = \lambda f(v_1).$$

Bsp. Ist die Abbildung $f : V_1 \rightarrow V_2$, $f(v) := \vec{0}$ eine lineare Abbildung?

Ja! Weil $f(v_1) + f(v_2) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ und $f(\lambda v_1) = \vec{0} = \lambda \vec{0} = \lambda f(v_1)$.

(Falls $V_1 = V_2 = V$ ist, ist f auch die Abbildung aus dem „Streckungs“-Bsp. vorher, mit $\alpha = 0$.)

Bitte üben: zeigen Sie, dass die folgende Abbildung linear ist

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

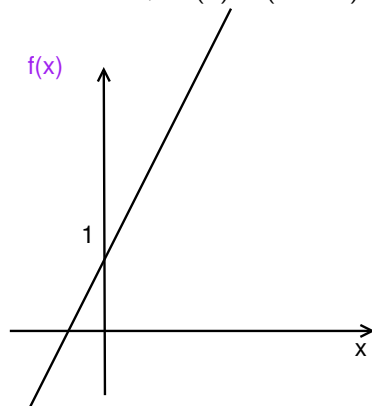
$$f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}.$$

Diese Abbildung ist linear:

$$\begin{aligned} f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) \\ 3(x_1 + x_2) + 4(y_1 + y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2y_1 \\ 3x_1 + 4y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + 2y_2 \\ 3x_2 + 4y_2 \end{pmatrix} \\ &= f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \right) + f \left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Frage. Ist die folgende Abbildung linear?

$$f : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1, \quad f(x) = (2x + 1).$$



Antwort. Nein. Es genügt zwei "Vektoren" $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^1$ s.d.

$f(v_1) + f(v_2) \neq f(v_1 + v_2)$. Wir nehmen $v_1 = (0) \in \mathbb{R}^1$ und $v_2 = (1) \in \mathbb{R}^1$. Dann ist $f((0)) + f((1)) = (2 \cdot 0 + 1) + (2 \cdot 1 + 1) = (4)$ und $f(v_1 + v_2) = f((0) + (1)) = f((1)) = (2 \cdot 1 + 1) = (3)$. Wir sehen dass $(4) = f((0)) + f((1)) \neq f((0) + (1)) = (3)$; also die Abbildung f ist nicht linear.

Lemma 10 (v_1, \dots, v_n) sei eine Basis in $(V, +, \cdot)$. Wir betrachten die Koordinatenabbildung $C : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, die den Vektor v auf seinen Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ abbildet. Dann gilt: die Abbildung C ist linear.

Beweis. Z.z.: Für beliebigen Vektoren $u, w \in V$ mit Koordinaten

$$C(u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ und } C(w) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ gilt:}$$

(a) Der Koordinatenvektor des Vektors $u + w$ ist $\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$,

(b) für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ist der Koordinatenvektor des Vektors λu der Vektor $\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$

Der Vektor u hat die Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} u = \sum_{i=1}^n x_i v_i.$

Der Vektor w hat die Koordinaten $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} w = \sum_{i=1}^n y_i v_i.$

Dann sind $u + w$ und λu

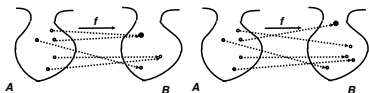
$$u + w = \sum_{i=1}^n x_i v_i + \sum_{i=1}^n y_i v_i = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) v_i. \iff C(u + w) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda u = \lambda \sum_{i=1}^n x_i v_i = \sum_{i=1}^n \lambda x_i v_i \iff C(\lambda u) = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$



Exkurs in die Mengenlehre: Surjektion, Injektion und Bijektion

Es seien A, B zwei Mengen und $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung:



- ▶ Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ heißt **Injektion** (oder eine injektive Abbildung), falls für jedes $x \neq y \in A$ gilt: $f(x) \neq f(y)$.
(Oder: $f(x) = f(y) \implies x = y$).
- ▶ Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ heißt **Surjektion** (oder eine surjektive Abbildung), falls für jedes $x \in B$ mind. ein $y \in A$ existiert, so dass $f(y) = x$.
(Oder: $\text{Bild}_f := \{b \in B \text{ s.d. } \exists a \in A \text{ mit } f(a) = b\} = B$).
- ▶ Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ heißt **Bijektion** (oder eine bijektive Abbildung), falls sie eine Injektion und eine Surjektion ist.

Die drei Bilder zusammen

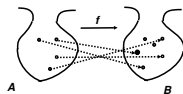


Abbildung: Injektion (Abbildung in)

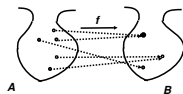


Abbildung: Surjektion (Abbildung auf)

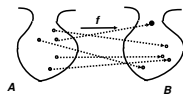


Abbildung: Bijektion = Surjektion und Injektion

Wichtige Bezeichnung von der vorletzten Folie:

$$\text{Bild}_f := \{b \in B \text{ s.d. } \exists a \in A \text{ mit } f(a) = b\}$$

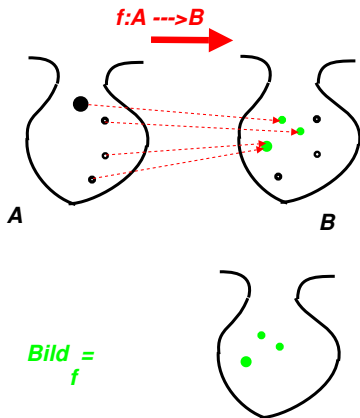


Abbildung: Bsp: Bild_f

Def. Sei $f : V \rightarrow U$ eine lineare Abbildung, wobei $(V, +, \cdot)$ und $(U, +, \cdot)$ Vektorräume sind. Der **Kern** von f ist die Menge
 $\text{Kern}_f := \text{Urbild}_f(\{\vec{0}\}) := \{v \in V \mid f(v) = \vec{0}\}$

Lemma 11 $f : V \rightarrow U$ sei eine lineare Abbildung. Dann gilt:

- (a) $f(\vec{0}) = \vec{0}$.
- (b) $\forall v \in V$ gilt $f(-v) = -f(v)$
- (c) $\text{Kern}_f = \{\vec{0}\} \iff f$ injektiv.

Beweis.

(a) $f(\vec{0}) = f(0v) \stackrel{\text{Def.}}{=} 0 \cdot f(v) = \vec{0}$.

(b) $f(-v) = f((-1) \cdot v) = (-1) \cdot f(v) = -f(v)$

(c) \implies Sei $\text{Kern}_f = \{\vec{0}\}$. Z.z.: f ist injektiv, d.h.

$f(v_1) = f(v_2) \implies v_1 = v_2$.

$f(v_1) = f(v_2) \iff f(v_1) - f(v_2) = \vec{0} \iff f(v_1 - v_2) = \vec{0}$.

Da $\text{Kern}_f = \{\vec{0}\}$, gibt es nur einen Vektor, der auf $\vec{0}$ abgebildet wird, nämlich $\vec{0}$. Dann ist $v_1 - v_2 = \vec{0}$, also $v_1 = v_2$.

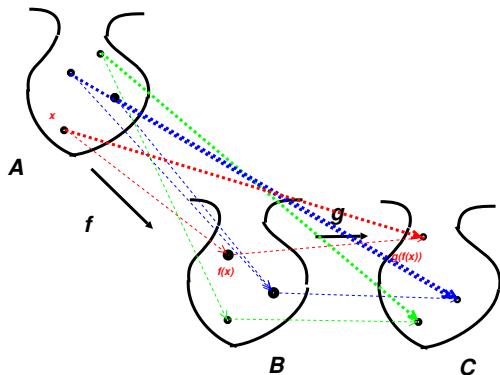
(c) \longleftarrow Sei f injektiv. Dann folgt aus $f(u) = f(v)$, dass $u = v$. Wir setzen $u := \vec{0}$. Wir erhalten, dass aus $\underbrace{f(\vec{0})}_{= \vec{0} \text{ nach (a)}} = f(v)$ folgt, dass $v = \vec{0}$.

Also $\text{Kern}_f := \{v \in V \mid f(v) = \vec{0}\} = \{\vec{0}\}$.



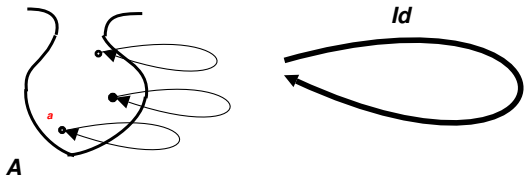
Verkettung von Abbildungen

A, B, C seien die Mengen, $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ seien Abbildungen.
Die **Verkettung (Komposition, Superposition, Hintereinanderausführung)** von Abbildungen g und f ist die Abbildung $g \circ f : A \rightarrow C$,
 $g \circ f(x) := g(f(x))$.
Bsp: $A = B = C = \mathbb{R}$, $f(x) := x^3$, $g(x) := \cos(x)$. Dann ist die
Verkettung $g \circ f(x) = \cos(x^3)$.



Inverse Abbildung

Bezeichnung: Für jede Menge A definieren wir $Id_A : A \rightarrow A$,
 $Id(a) = a \ (\forall a \in A)$.



Wicht. Bsp: $\forall f : A \rightarrow B$ gilt:

$$f \circ Id_A = f \quad (\text{weil } \forall a \in A \ f \circ Id_A(a) = f(Id_A(a)) = f(a))$$

$$Id_B \circ f = f \quad (\text{weil } \forall a \in A \ Id_B \circ f(a) = Id_B(f(a)) = f(a))$$

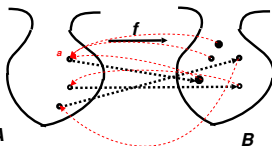
Def. Sei $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \rightarrow A$ heißt eine links- (bzw. rechts-)inverse Abbildung zu f , falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)

Lemma 12 $f : A \rightarrow B$ sei eine Abbildung und $A \neq \emptyset$. Dann gilt:

1. f ist injektiv $\iff f$ hat eine Linksinverse.
2. f ist surjektiv $\iff f$ hat eine Rechtsinverse.

Beweis:

(1) \Rightarrow : f sei als injektiv vorausgesetzt. Sei $a \in A$. Die gesuchte **linksinverse Abbildung** $g : B \rightarrow A$ wird nun definiert durch $g(y) := x$, falls y in der Bildmenge von f liegt, und $f(x) = y$ ist (da f injektiv ist, ergibt sich x eindeutig aus y) und $g(y) := a$, falls y nicht in der Bildmenge von f liegt.



gilt: $g \circ f(x) \stackrel{\text{Def.}}{=} g(f(x)) \stackrel{y:=f(x)}{=} g(y) \stackrel{g(y)=x}{=} x = Id_A(x)$.

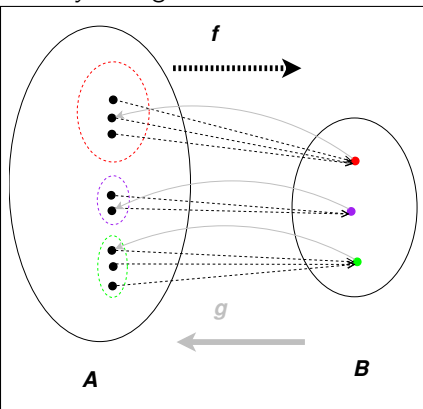
Bemerkung Die Linksinverse ist nicht immer eindeutig – das Element a können wir beliebig auswählen.

Beweis (1) \Leftarrow :

Es gelte $g \circ f = \text{Id}_A$. Nun seien $x, y \in A$ mit $f(x) = f(y)$ gegeben. Wir müssen $x = y$ zeigen. Dazu wird g auf die Gleichung $f(x) = f(y)$ angewendet, was $g(f(x)) = g(f(y))$ ergibt. Mit der Eigenschaft der Linksinversen haben wir $\text{Id}_A(x) = \text{Id}_A(y)$, also $x = y$.

Beweis (2): f ist surjektiv $\iff f$ hat eine Rechtsinverse.

\implies : $f : A \rightarrow B$ werde als surjektiv vorausgesetzt. Für jedes Element $y \in B$ gibt es also mindestens ein $x \in A$ mit $f(x) = y$.



$g : B \rightarrow A$ sei eine Abbildung, die jedem $y \in B$ ein Urbild zuweist. Dann gilt für jedes $y \in B$:
 $f \circ g(y) = f(g(y)) = f(x) = y = \text{Id}_B(y)$.

\impliedby : Es gelte $f \circ g = \text{Id}_B$. Nun sei $y \in B$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass $y \in \text{Bild}_f$ ist, also ein $x \in A$ mit $f(x) = y$ angeben.

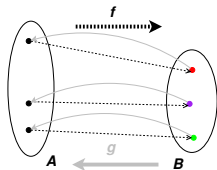
Die Festlegung $x := g(y)$ leistet das Verlangte, denn
 $f(x) = f(g(y)) = f \circ g(y) = \text{Id}_B(y) = y$.



Lemma 13 Sei $f : A \rightarrow B$. Dann gilt:

f ist Bijektion $\iff \exists g : B \rightarrow A$
s.d. $g \circ f = Id_A$ und $f \circ g = Id_B$.

Ferner gilt: Solches g ist eindeutig



Beweis: „ \Leftarrow “: Nach Lemma 12 ist f injektiv und surjektiv, also bijektiv.

„ \Rightarrow “: Zuerst **Existenz**. f sei surjektiv und injektiv. Nach Lemma 12
 $\exists g_1$ und g_2 mit $g_1 \circ f = Id_A$, $f \circ g_2 = Id_B$. Z.z.: $g_1 = g_2$.

Für beliebiges $b \in B$ gilt:

$$g_1(b) = g_1(Id_B(b)) = g_1(f(g_2(b))) = g_1(f(g_2(b))) = Id_A(g_2(b)) = g_2(b). \quad (*)$$

Also $\forall b \in B$ gilt $g_1(b) = g_2(b)$, also $g_1 = g_2$.

Dann hat $g := g_1 = g_2$ die Eigenschaft $g \circ f = Id_A$ und $f \circ g = Id_B$.

Eindeutigkeit: Angenommen, zwei Abbildungen g_1 und g_2 haben die gewünschte Eigenschaft: $g_i \circ f = Id_A$, $f \circ g_i = Id_B$ ($i = 1, 2$). Dann ist g_1 eine Linksinverse (also $g_1 \circ f = Id_A$) und g_2 eine Rechtsinverse ($f \circ g_2 = Id_B$), weil beide sowohl Links- als auch Rechtsinverse sind. Wie wir in (*) gezeigt haben, ist dann $g_1 = g_2$. □

Bezeichnung. Ein solches g werden wir mit f^{-1} bezeichnen und die **Inverse** nennen.

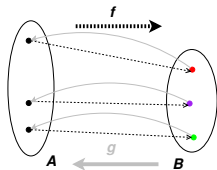
Definition eines Isomorphismus

Seien $(V, +, \cdot)$ und $(U, +, \cdot)$ Vektorräume. Eine bijektive lineare Abbildung $f : V \rightarrow U$ heißt ein **Isomorphismus**. Wenn ein Isomorphismus $f : V \rightarrow U$ existiert, dann heißen die Räume V und U **isomorph**.

Wiederholung – Lemma 13 Sei $f : A \rightarrow B$. Dann gilt:

f ist Bijektion $\iff \exists g : B \rightarrow A$
s.d. $g \circ f = Id_A$ und $f \circ g = Id_B$.

Ferner gilt: Solches g ist eindeutig



Sei $f : V \rightarrow U$ ein Isomorphismus. Dann ist f bijektiv, also existiert f^{-1} . Ist sie auch ein Isomorphismus? – Ja, siehe Lemma 14

Die Inverse Abbildung zu einem Isomorphismus ist ebenfalls ein Isomorphismus

Lemma 14. Sei $f : V \rightarrow U$ ein Isomorphismus. Dann ist $f^{-1} : U \rightarrow V$ auch ein Isomorphismus.

Bemerkung. Die Existenz von f^{-1} folgt aus Lemma 13, weil ein Isomorphismus nach Definition bijektiv ist.

Beweis. Z.z.: f^{-1} ist (a) linear, (b) bijektiv.

(a) Additivität:

$$\begin{aligned} f^{-1}(u + v) &= f^{-1}(f \circ f^{-1}(u) + f \circ f^{-1}(v)) \quad \text{weil } f \circ f^{-1} = Id_U \\ &= f^{-1}(f(f^{-1}(u) + f^{-1}(v))) \quad \text{weil } f \text{ linear ist} \\ &= f^{-1} \circ f(f^{-1}(u) + f^{-1}(v)) \quad \text{Definition von „}\circ\text{“} \\ &= f^{-1}(u) + f^{-1}(v) \quad \text{weil } f^{-1} \circ f = Id_V \end{aligned}$$

Abg. bzgl. Multiplikation zeigt man analog.

(b) Bijektivität. Da $f \circ f^{-1} = Id_U$, hat f^{-1} eine Linksinverse. Da $f^{-1} \circ f = Id_V$, hat f^{-1} auch eine Rechtsinverse. Dann ist f^{-1} eine Bijektion nach Lemma 13. □