

Lernziele der 5. Woche: Die Studierenden sollen ...

- ▶ ... verstehen, warum endlichdimensionale Vektorräume gleicher Dimension isomorph sind
- ▶ ... verstehen, wie und warum die Bilder der Basisvektoren eine lineare Abbildung definieren
- ▶ ... die Dimensionsformel beweisen und auf Endomorphismen anwenden können
- ▶ ... lineare Abbildungen durch Matrizen beschreiben können
- ▶ ... Matrizen und Vektoren multiplizieren können

Wiederholung: lineare Abbildungen

Def. Es seien $(V, +, \cdot)$ und $(U, +, \cdot)$ zwei Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \rightarrow U$ heißt **linear**, falls für alle Vektoren $v_1, v_2 \in V$ und für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$,

(b) $f(\lambda v_1) = \lambda f(v_1)$.

Übung. Sei $f : V \rightarrow U$ linear. Dann gilt:

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2).$$

In der Tat,

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \stackrel{(a)}{=} f(\lambda_1 v_1) + f(\lambda_2 v_2) \stackrel{(b)}{=} \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2).$$

Übung. Sei $f : V \rightarrow U$ linear. Dann gilt:

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \lambda_3 f(v_3).$$

In der Tat, $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3) \stackrel{(a)}{=} f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) + f(\lambda_3 v_3) \stackrel{(a)}{=} f(\lambda_1 v_1) + f(\lambda_2 v_2) + f(\lambda_3 v_3) \stackrel{(b)}{=} \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \lambda_3 f(v_3)$.

Analog. Es gilt: $f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n)$
(mehrmals das Trick anwenden)

Definition von Isomorphismus noch einmal

Def $(V, +, \cdot), (U, +, \cdot)$ seien Vektorräume. Eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow U$ heißt

<i>Monomorphismus</i>	<i>falls injektiv</i>
<i>Epimorphismus</i>	<i>falls surjektiv</i>
<i>Isomorphismus</i>	<i>falls bijektiv</i>
<i>Endomorphismus</i>	<i>falls $V = U$</i>

← heute benutzen

← heute besprochen

Die Vektorräume V und U heißen *isomorph*, falls ein Isomorphismus $f : V \rightarrow U$ existiert.

Logic des Abschnitts „Vektorraum“: synthetische Aufbau

- ▶ Definition — in Vorl. 3 gegeben — durch Eigenschaften (= „Axiomen“)
- ▶ Einige Eigenschaften, die man aus Axiomen durch logischen Schlussfolgerungen bekommt — alle Vorlesungen bis jetzt — und eine grosse Familie von Beispiele \mathbb{R}^n — in Vorl. 3, 4 eingeführt
- ▶ Eine Aussage, dass alle Vektorräumen den Vektorräumen aus der Familie von Beispiele „gleich sind“

Frage: Was soll man hier unter „gleich sind“ verstehen?

Antwort: **Isomorph.**

Hauptsatz der linearen Algebra

Satz 11(Hauptsatz der linearen Algebra) *Zwei endlichdimensionalen Vektorräume sind genau dann isomorph, wenn sie gleiche Dimension haben.*

Satz 11'(Hauptsatz der linearen Algebra) – einfachere Version
Jeder Vektorraum der Dimension n ist zu \mathbb{R}^n isomorph.

Bemerkung. Die Sätze 11, 11' sind äquivalent. Die Richtung Satz 11 \implies Satz 11' ist einfach: weil $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, ist nach Satz 11 ein Vektorraum der Dimension n zu \mathbb{R}^n isomorph. Die (andere) Richtung „ \longleftarrow “ ist ein bisschen aufwendiger; wir werden sie später beweisen.

Beweis \implies (für Satz 11 und Satz 11')

Z.z.: Sind V und U Isomorph, so ist $\dim(U) = \dim(V)$. Sei $f : V \rightarrow U$ ein Isomorphismus. Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis in V . Wir zeigen, dass die n -elementige Menge $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\} \subseteq U$ eine Basis in $\text{Bild}_f \subseteq U$ ist, d.h., es ist **linearunabhängig** und **erzeugend**.

Bemerkung. Da ein Isomorphismus nach der Definition injektiv ist, sind die Vektoren $f(v_1), \dots, f(v_n)$ verschieden; die Menge $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ ist deswegen tatsächlich n -elementig.

Linearunabhängigkeit: Sei $\lambda_1 \cdot f(v_1) + \dots + \lambda_n \cdot f(v_n) = \vec{0}$. Um Linearunabhängigkeit von $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ zu zeigen, **müssen wir zeigen, dass alle λ 's gleich 0 sind.**

Da f linear ist, ist $\lambda_1 \cdot f(v_1) + \dots + \lambda_n \cdot f(v_n) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)$; also $f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \vec{0}$.

Da f ein Isomorphismus ist, ist f injektiv, deswegen ist

$\text{Kern}_f \stackrel{\text{Lemma 11}}{=} \{\vec{0}\}$, deswegen aus $f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \vec{0}$ folgt $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \vec{0}$ (weil $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in \text{Kern}_f$ und $\text{Kern}_f = \{\vec{0}\}$ ist).

Da $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis ist, ist sie linearunabhängig. Dann aus $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \vec{0}$ folgt $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, was unseres Ziel war.

$\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ ist erzeugend:

Z.z.: jedes $u \in U$ kann man als Linearkombination von $f(v_1), \dots, f(v_n)$ bekommen.

Da die Abbildung f surjektiv ist, ist jeder Vektor von U das Bild eines Vektors aus V , also $\exists v \in V$ mit $f(v) = u$. Da $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis ist, kann man ein beliebiges Element von V als Linearkombination von $\{v_1, \dots, v_n\}$ bekommen, also $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = v$.

Dann gilt:

$$u = f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) \stackrel{\text{Linearität}}{=} \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n).$$

Also, u ist tatsächlich Linearkombination von Elementen aus $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$, □

Da der Satz 11 (oder 11') sehr wichtig ist, werde ich separat die Sätze 11, 11' in der Richtung „ \Leftarrow “ beweisen. Ich werde zuerst Satz 11' beweisen, d.h., ich werde zeigen, dass jeder $(V, +, \cdot)$ von Dimension n zu \mathbb{R}^n isomorph ist.

Beweis von Satz 11' in der Richtung „ \Leftarrow “. Wir müssen beweisen dass, jeder Vektorraum $(V, +, \cdot)$ der Dimension n zu \mathbb{R}^n isomorph ist.

$(V, +, \cdot)$ sei n -Dimensional, sei $B = (v_1, \dots, v_n)$ ein Basis-Tupel in $(V, +, \cdot)$. Wir betrachten die Koordinatenabbildung

$C_B : V \rightarrow \mathbb{R}^n$. Nach Definition von Koordinatenabbildung gilt:

$C_B(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$. Wir zeigen, dass C_B ein Isomorphismus

ist, d.h., C_B **linear**, **injektiv** und **surjektiv** ist.

▶ **Linearität:** Lemma 10. (Sagt, dass die Koordinatenabbildung linear ist)

▶ **Injektivität:** Nach Lemma 11c genuegend es zu zeigen, dass $\text{Kern}_{C_B} = \{\vec{0}\}$.

D.h., wir müssen zeigen, dass $C_B(v) = \vec{0} \implies v = \vec{0}$.

D.h., wir müssen zeigen, dass $0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n = \vec{0}$, was offensichtlich ist.

▶ **Surjektivität:** Wir müssen zeigen, dass jedes

$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ Bild eines $v \in V$ ist. Aber $C_B(\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

Warum war Beweis so einfach? Weil wir Vorarbeit vorher gemacht haben.

Vor Beweis des Satzes 11 in „ \Leftarrow “ Richtung brauchen wir Vorarbeit.
Üben vor dem Beweis: **Frage** $f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei eine lineare Abbildung.

Für die Vektoren $v_1, v_2 \in V$ gelte: $f(v_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Was ist $f(v_1 + v_2)$?

Antwort.

$$f(v_1 + v_2) \stackrel{\text{Linearität}}{=} f(v_1) + f(v_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Frage Was ist $f(2v_1 - 3v_2)$?

Antwort. $f(2v_1 - 3v_2) \stackrel{\text{Linearität}}{=} f(2v_1) + f((-3)v_2) \stackrel{\text{Linearität}}{=} 2f(v_1) - 3f(v_2) = 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Wir haben gesehen, dass (in den Beispiele oben) BILDE VON VEKTOREN BESTIMMEN DIE BILDE DEREN LINEARKOMBINATIONEN EINDEUTIG. Wir werden jetzt eine Verallgemeinerung dieser Aussage als Lemma formulieren und beweisen.

Lemma 15 $(V, +, \cdot)$ und $(U, +, \cdot)$ seien n -dimensionale Vektorräume, (v_1, \dots, v_n) sei ein Basis-Tupel in V und (u_1, \dots, u_n) sei ein n -Tupel der Vektoren aus U . Dann gilt: Es existiert genau eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow U$ so dass $f(v_i) = u_i$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Bsp. Sei $V = U = \mathbb{R}^3$, als (v_1, v_2, v_3) nehmen wir die Standardbasis $\left(v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, und als (u_1, u_2, u_3) nehmen wir $\left(u_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, u_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, u_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$.

Lass uns die Formel für die lineare Abbildung f , die $v_1 \mapsto u_1$, $v_2 \mapsto u_2$, $v_3 \mapsto u_3$, finden (ähnlich wie in Fragen-Antworten oben).

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = f \left(x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$f \left(x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + f \left(y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + f \left(z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = x \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \\ 7x + 8y + 9z \end{pmatrix}$$

Die Abbildung ist linear und hat die Eigenschaft $f(v_i) = u_i$ ($i=1,2,3$).

Beweis von Lemma 15. Zuerst Existenz.

Wir werden diese Abbildung konstruieren, die Methode ist analog zu Fragen-Antworten oben und Bsp. nach Lemma 15. Sei $w \in V$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

seien Koordinaten von w in der Basis (v_1, \dots, v_n) , d.h.

$$w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n = \sum_{i=1}^n x_i v_i$$

Wir setzen

$$f(w) := x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n = \sum_{i=1}^n x_i u_i. \quad (\star)$$

Zu zeigen: (i) $f(v_i) = u_i$ und (ii) f ist linear.

Wir zeigen (i): Der Koordinatenvektor von v_i in der Basis (v_1, \dots, v_n) ist

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Zeile}, \text{ weil } v_i = 0 \cdot v_1 + \dots + \underbrace{1 v_i}_{i\text{-te Stelle}} + \dots + 0 \cdot v_n, \text{ also}$$

$$f(v_i) \stackrel{(\star)}{=} 0 \cdot u_1 + \dots + 1 \cdot u_i + \dots + 0 \cdot u_n = u_i \text{ wie behauptet.}$$

Wir zeigen (ii): f ist linear

$w, u \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Nach Lemma 10, die Koordinaten von $w + u$ sind $\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$. Also,

$$f(w + u) \stackrel{\text{Lemma 10}}{=} f\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)v_i\right) \stackrel{(*)}{=} \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)u_i = \sum_{i=1}^n x_i u_i + \sum_{i=1}^n y_i u_i \stackrel{(*)}{=} f(w) + f(u).$$

Ähnlich, nach Lemma 10, die Koordinaten von λw sind $\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$. Also,

$$f(\lambda w) = \sum_{i=1}^n \lambda x_i u_i = \lambda \sum_{i=1}^n x_i u_i = \lambda f(w).$$

Eindeutigkeit

Die Abbildung $\tilde{f} : V \rightarrow U$ erfülle die Voraussetzungen von Lemma 15, d.h., \tilde{f} sei linear und $\tilde{f}(v_i) = u_i$ für $i = 1, \dots, n$. Wir müssen zeigen, dass $\forall w \in V \tilde{f}(w) = f(w)$, wobei f die oben in (\star) konstruierte Abbildung ist.

$w \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, d.h. $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$. Wir

haben

$$\begin{aligned} \tilde{f}(w) &= \tilde{f}(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n) \stackrel{\text{Linearität}}{=} \tilde{f}(x_1 v_1) + \tilde{f}(x_2 v_2) + \dots + \\ &\tilde{f}(x_n v_n) \stackrel{\text{Linearität}}{=} x_1 \tilde{f}(v_1) + x_2 \tilde{f}(v_2) + \dots + x_n \tilde{f}(v_n) \stackrel{\text{Voraussetz.}}{=} \\ &x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n \stackrel{\text{Def. von } f}{=} f(w) \end{aligned}$$



Beweis von Satz 11 in „ \Leftarrow “ Richtung

Seien $(V, +, \cdot)$ und $(U, +, \cdot)$ n -dimensionale Vektorräume mit Basen jeweils (v_1, \dots, v_n) und (u_1, \dots, u_n) . Das Ziel ist zu zeigen, dass es einen Isomorphismus $f : V \rightarrow U$ existiert; wir werden den Isomorphismus mit Hilfe von Lemma 15 konstruieren.

Nämlich, wir betrachten die lineare Abbildung $f : V \rightarrow U$ sodass $f(v_i) = u_i$; $i = 1, \dots, n$. Solche Abbildung existiert (und ist eindeutig) nach Lemma 15. Wir zeigen jetzt, dass f ein Isomorphismus ist; d.h.; wir zeigen dass f **injektiv** und **surjektiv** ist.

Injektivität: Angenommen, $f(v) = f(\tilde{v})$. Z.z.: $v = \tilde{v}$.

Die Vektoren v und \tilde{v} habe jeweils die Koordinatenvektore

$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\lambda}_n \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) \stackrel{\text{Linearität}}{=} \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) \stackrel{\text{Konstr. von } f}{=} \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n,$$

also $f(v)$ hat den Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ in der Basis (u_1, \dots, u_n) .

Analog gilt:

$$f(\tilde{v}) = f(\tilde{\lambda}_1 v_1 + \dots + \tilde{\lambda}_n v_n) \stackrel{\text{Linearität}}{=} \tilde{\lambda}_1 f(v_1) + \dots + \tilde{\lambda}_n f(v_n) \stackrel{\text{Konstr. von } f}{=} \tilde{\lambda}_1 u_1 + \dots + \tilde{\lambda}_n u_n.$$

Also auch $f(\tilde{v})$ hat den Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\lambda}_n \end{pmatrix}$ in der Basis (u_1, \dots, u_n) .

Da nach Voraussetzungen $f(\tilde{v}) = f(v)$ ist, sind die Koordinatenvektoren

von $f(\tilde{v})$ und $f(v)$ auch gleich, also ist $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\lambda}_n \end{pmatrix}$. Dann sind

$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_i v_i = \tilde{v}$. Die Abbildung f ist also injektiv.

Die Abbildung f ist surjektiv

Sei $u \in U$ ein beliebiger Vektor. Wir müssen zeigen, dass $\exists v \in V$ mit $f(v) = u$.

Der Vektor u habe den Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ in der Basis (u_1, \dots, u_n) , d.h., $u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$. Wir setzen $v := \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in V$.

Es gilt: $f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) \stackrel{\text{Linearität}}{=} \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) \stackrel{\text{Konstr. von } f}{=} \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = u$.

Wir haben gesehen, dass ein beliebiger Vektor u das Bild eines Vektors $v \in V$ ist; Surjektivität von f ist damit bewiesen.

Also, die Abbildung $f : V \rightarrow U$ ist linear und surjektiv und injektiv, ist deswegen ein Isomorphismus. Die

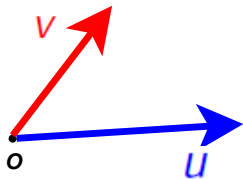
bijektiv
Vektorräume V und U sind deswegen isomorph,



Bsp: geometrische Ebene ist isomorph zu \mathbb{R}^2

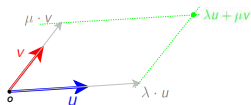
Wiederholung: Sei E eine Ebene, $O \in E$ und V die Menge $V := \{\text{gerichtete Strecken mit Anfangspunkt } O \text{ und Endpunkt auf } E\}$ mit „Vektoraddition“ als Addition und Streckung/Stauchung als Multiplikation.

Wir haben gezeigt, dass eine Basis von $(V, +, \cdot)$ aus zwei beliebigen Vektoren $u, v \in V$ besteht mit $u \neq \vec{0} \neq v$ und $\forall \lambda \in \mathbb{R} \lambda u \neq v$



Also ist V zu \mathbb{R}^2 isomorph nach Satz 11'.

Außerdem haben wir in Beweis von Satz 11 den Isomorphismus direkt konstruiert: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow V$ bildet $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ auf $\lambda \cdot u + \mu \cdot v$ ab.



Bemerkung. Die Abbildung f ist eigentlich die inverse Abbildung zur im Beweis von Satz 11' konstruierten Isomorphismus.

Geometrie ist das Studium von mathematischen Modellen des Raumes, der uns auf Grund der Anschauung vertraut ist.

Die Geometrie gehört zu den ältesten Wissenschaften überhaupt. Bemerkenswertes geometrisches Wissen finden wir bereits in den orientalischen Hochkulturen des 5.–3. Jahrhunderts vor unserer Zeitrechnung. Praktische Probleme aus der Messkunde, der Baukunst, der Astronomie und der Navigation wurden abstrahiert und führten zu geometrischen Regeln. Mit Hilfe von Logic kann man aus diesen Regeln neue Aussagen bekommen, und anwenden.

Schematisch könnte man es wie folgt vorstellen:

Empirische Wissenschaft	Formal-logische Theorie
Erfahrungswissenschaft wie die Physik	Keine Begründung durch Erfahrung, keine anschaulichen Argumente
Experimente, Beobachtungen Aussagen über die Natur	Formale Ableitung von Sätzen nach Regeln der Logik aus Axiomen (nicht weiter begründetes System von Grundtatsachen) Anschauung nur als <i>Hinweis</i> auf Beweisführungen
Deutung der Theorie in der Welt	Grundlage für Theorien der Physik
Schule Alltag Technik	Hochschulmathematik Vermittlung der Idee des Beweisens auch in der Schule (so genanntes lokales Ordnen)

Was haben wir bis jetzt gemacht?

Wir haben die Eigenschaften genommen, die in Physik öfter vorkommen und empirisch nachgewiesen wurde – die Eigenschaften I–VIII des Vektorraums.

Dann haben wir alle mögliche (endlichdimensionale) Vektorräumen geschrieben — Satz 11 — alle sind zu \mathbb{R}^n isomorph.

In anderen Worten, wir haben vollständig die alle mögliche „mathematischen Modellen des Raumes“ verstanden, in welchen die Axiomen I – VIII erfüllt sind.

Außerdem kann man die mathematischen Methode, Ideen und Tricks aus Theorie von Vektorräumen auch in anderen Branchen der Mathematik, vor allen in Analysis benutzen – Sie werden es während des Studiums mehrmals sehen.

Def – Wiederholung Sei $f : V \rightarrow U$ eine lineare Abbildung. Das **Bild** von f ist die folgende Teilmenge von U :

Bild $_f$ = $\{u \in U \text{ so dass es gibt ein Element } v \in V \text{ mit } f(v) = u\}$.
(Andere Bezeichnung: $f(V)$ – wird in Analysis-Vorlesung verwendet)

Der **Kern** von f ist die folgende Teilmenge von V :

Kern $_f$ = $\{v \in V \text{ so dass } f(v) = \vec{0}\}$.

(Andere Bezeichnung: $f^{-1}(\vec{0})$; wird oft in Analysis verwendet. Man bemerke aber dass f^{-1} nicht die inverse Abbildung nach unseren Definitionen ist; außerdem ist f^{-1} keine Abbildung. Also $f^{-1}(\vec{0})$ ist nur die Bezeichnung.)

Bsp. Betrachte die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt: $\text{Bild}_f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} : \text{wobei } x, y \in \mathbb{R} \right\}$.

$\text{Kern}_f = \{\vec{0}\}$ (wird auf der nächsten Folie besprochen)

Satz 12 (1. Dimensionsformel) Sei $f : V \rightarrow U$ eine lineare Abbildung.
Dann gilt:

- (a) Bild_f ist ein Untervektorraum von U .
- (b) Kern_f ist ein Untervektorraum von V .
- (c) Ist V endlichdimensional, so gilt:
 $\dim(V) = \dim(\text{Bild}_f) + \dim(\text{Kern}_f)$.

Bsp. Betrachte die Linearabbildung aus der Bsp. oben

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt: $\text{Kern}_f = \{\vec{0}\}$, weil

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \text{ also } \dim(\text{Kern}_f) = 0.$$

$\text{Bild}_f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$ ist 2-dimensional (mit der Basis

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$); also ist die Dimensionsformel

$$\underbrace{\dim(V)}_2 = \underbrace{\dim(\text{Bild}_f)}_2 + \underbrace{\dim(\text{Kern}_f)}_0 \text{ in diesem Bsp. richtig.}$$

Beweis (a) Bild_f ist ein Untervektorraum von U

Beweis (a): Seien $u_1, u_2 \in \text{Bild}_f$, d.h. $u_1 = f(v_1)$, $u_2 = f(v_2)$.
Dann gilt:

- ▶ $u_1 + u_2 = f(v_1) + f(v_2) \stackrel{\text{Linearität}}{=} f(v_1 + v_2) \in \text{Bild}_f$
- ▶ $\lambda u_1 = \lambda f(v_1) \stackrel{\text{Linearität}}{=} f(\lambda v_1) \in \text{Bild}_f$.

Beweis (b) Kern_f ist ein Untervektorraum von V

Beweis (b): Seien $v_1, v_2 \in \text{Kern}_f$, d.h. $f(v_1) = f(v_2) = \vec{0}$. Dann gilt:

- ▶ $f(v_1 + v_2) \stackrel{\text{Linearität}}{=} f(v_1) + f(v_2) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, d.h. $v_1 + v_2 \in \text{Kern}_f$.
- ▶ $f(\lambda v_1) \stackrel{\text{Linearität}}{=} \lambda f(v_1) = \lambda \vec{0} = \vec{0}$, d.h. $\lambda v_1 \in \text{Kern}_f$.

Konstruktion einer Basis in Bild_f

Kern_f ist ein Untervektorraum des endlichdimensionalen Vektorraums V und ist deswegen auch nach Folgerung (d) aus Satz 10 endlichdimensional. Sei $\{v_1, \dots, v_k\}$ eine Basis von Kern_f . Nach Folgerung (c) können wir die Basis $\{v_1, \dots, v_k\}$ bis zu einer Basis in V ergänzen: es gibt v_{k+1}, \dots, v_n so dass $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis ist. Wir zeigen: $\{f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)\}$ ist eine Basis in $\text{Bild}_f \subseteq U$. Wir müssen zeigen, dass $\{f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)\}$ linearunabhängig und erzeugend ist.

Wir zeigen: $\{f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)\}$ ist erzeugend

Wir müssen zeigen, dass man jedes $u \in \text{Bild}_f$ als eine Linearkombination von Elementen $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ darstellen kann. Offensichtlich, kann man jedes $u \in \text{Bild}_f$ als eine Linearkombination von Elementen $f(v_1), \dots, f(v_n)$ darstellen. In der Tat, jedes $u \in \text{Bild}_f$ ist Bild des irgendetwelchen Vektors v Weil $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis ist $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$, also

$$u = f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n).$$

Aber $f(v_1) = f(v_2) = \dots = f(v_k) = \vec{0}$, da $v_1, \dots, v_k \in \text{Kern}_f$. Dann $u = \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + \lambda_{k+2} f(v_{k+2}) + \dots + \lambda_n f(v_n)$. Also ist $\text{span}(\{f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)\}) = \text{Bild}_f$.

Wir zeigen: $\{f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)\}$ ist linear unabhängig

Angenommen ist die Linearkombination $\lambda_{k+1}f(v_{k+1}) + \dots + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}$.

Z.z.: $\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \dots = \lambda_n = 0$.

Wir haben:

$$\underbrace{1\vec{0} + 1\vec{0} + \dots + 1\vec{0}}_{k \text{ mal}} + \lambda_{k+1}f(v_{k+1}) + \dots + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}.$$

Da $f(v_1) = f(v_2) = \dots = f(v_k) = \vec{0}$,

$$1f(v_1) + 1f(v_2) + \dots + 1f(v_k) + \lambda_{k+1}f(v_{k+1}) + \dots + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}.$$

Weil f linear ist,

$$f(1v_1 + 1v_2 + \dots + 1v_k + \lambda_{k+1}v_{k+1} + \dots + \lambda_nv_n) = \vec{0}.$$

Also, $1v_1 + 1v_2 + \dots + 1v_k + \lambda_{k+1}v_{k+1} + \dots + \lambda_nv_n \in \text{Kern}_f$. Dann ist er die Linearkombination von Elementen v_1, \dots, v_k und deswegen (Satz 7(b))

$$\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \dots = \lambda_n = 0.$$

Also gilt: $\dim(\text{Bild}_f) = [\text{Anzahl von Elementen in } \{f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)\}] = n - k$. Dann gilt:

$$\underbrace{\dim(V)}_n = \underbrace{\dim(\text{Kern}_f)}_k + \underbrace{\dim(\text{Bild}_f)}_{n-k}, \quad \square$$

Anwendung 1. Dimensionsformel für Endomorphismen

Def. — Wied: **Endomorphismus** = lineare Abbildung $f : V \rightarrow V$ von Vektorraum V auf sich selbst.

Folgerung. Sei $f : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus von endlichdimensionalen Vektorraum V . Dann gilt:

$$f \text{ ist surjektiv} \iff f \text{ ist injektiv.}$$

Bemerkung. In Hausaufgabe 1 Blatt 5 mussten Sie mehrere Beispiele konstruieren – Sie werden sehen, dass falls U und V verschiedene Dimensionen haben, ist die Aussage der Folgerung nicht richtig.

Idea des Beweises: wir spielen mit der 1. Dimensionsformel (Satz 12): es gilt:

$$\underbrace{\dim(V)}_n = \dim(\text{Bild}_f) + \dim(\text{Kern}_f)$$

Beweis (surjektiv) \implies (injektiv).

Ist f surjektiv, so ist $\text{Bild}_f = V$. Wir haben

$$\begin{array}{rccccccc} \dim(V) & = & \dim(\text{Bild}_f) & + & \dim(\text{Kern}_f) & & \\ n & = & n & + & ? & & \end{array} .$$

Dann ist $\dim(\text{Kern}_f) = 0$, folglich $\text{Kern}_f = \{\vec{0}\}$. Nach Lemma 11c ist f injektiv.

Beweis (surjektiv) \Leftarrow (injektiv).

Ist f injektiv, so ist $\text{Kern}_f = \{\vec{0}\}$. Dann ist $\dim(\text{Kern}_f) = 0$.

Wir haben

$$\begin{array}{rccccccc} \dim(V) & = & \dim(\text{Bild}_f) & + & \dim(\text{Kern}_f) & & \\ n & = & ? & + & 0 & & , \end{array}$$

folglich $\dim(\text{Bild}_f) = n$. Dann enthält eine Basis B in Bild_f $n = \dim(V)$ linear unabhängige Vektoren. Nach Folgerung (a) aus Satz 10 ist dann B eine Basis in V , deswegen

$$\text{Bild}_f = \text{span}(B) = V,$$



Wiederholung und Plan:

- ▶ Ziel: alle linearen $f : V \rightarrow U$ zu beschreiben, wobei V, U Vektorräume sind, s.d. $\dim(V) = n < \infty$, $\dim(U) = m < \infty$.
- ▶ Wir benutzen: Hauptsatz 11' der linearen Algebra:
 - ▶ $V \stackrel{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{R}^n$, $U \stackrel{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{R}^m$.
 - ▶ Die Koordinatenabbildung $C_{B_V} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, $C_{B_U} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ sind Isomorphismen, wobei B_V, B_U Basen in V bzw. U sind.
- ▶ Strategie:
 - ▶ Wir beschreiben alle linearen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (Heute, Schema)
 - ▶ Wir konstruieren ein Hauptbeispiel (Matrizen, nächste Folie)
 - ▶ Wir zeigen, dass alle linearen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ wie im Hauptbeispiel sind.
 - ▶ Wir untersuchen, wie sich die Beschreibung ändert, wenn wir andere Basen B'_V, B'_U in V bzw. U wählen.
 - ▶ später

Hauptbeispiel: Matrizen als lineare Abbildungen

Def. Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine $(m \times n)$ -**Matrix** ist ein rechteckiges Schema

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

wobei alle $a_{ij} \in \mathbb{R}$. **Bsp:** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ist eine (2×3) -Matrix, $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$ ist eine (3×2) -Matrix

Bemerkung Mathematisch exakt ist eine $(m \times n)$ -Matrix eine Abbildung $A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$. Das Bild von $(i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ ist dabei das, was im Schema an der ij -Stelle steht.

Eine $(m \times n)$ Matrix A definiert eine Abbildung $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$:

$$f_A \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung heißt **Multiplikation** der Matrix mit dem Vektor, statt $f_A(v)$ schreibt man gewöhnlich Av ;

$$\text{Z.B. } f_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 4 + 9 \\ 4 + 10 + 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 32 \end{pmatrix}.$$

Für den j -ten Eintrag des Produkts ist nur die j -te Reihe der Matrix und der Vektor verantwortlich:

$$\begin{pmatrix} ? & ? & \dots & ? \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ? & ? & \dots & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ \vdots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n \\ \vdots \\ ? \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt einer Zeile der Matrix mit einem Vektor und mnemonische Regel

Sei $(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{in})$ die i -te Zeile einer Matrix $A = (a_{ij})$ und $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Als **Skalarprodukt** dieser Zeile mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ verstehen wir die Zahl $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$.

Mnemonische Regel: Auf dem i -ten Platz des Produkts von $(m \times n)$ -Matrix A und $v \in \mathbb{R}^n$ steht das Skalarprodukt der i -ten Zeile der Matrix mit dem Vektor:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Mnemonische Regel Hilft auch die Parameter der Matrizen und Vektoren abzustimmen: Da für ein Skalarprodukt von Zeile und Vektor die Anzahl der Elemente gleich sein muss, multiplizieren wir eine $(m \times n)$ -Matrix mit einem Vektor aus dem \mathbb{R}^n . Das Ergebnis hat dann genau soviel Zeilen wie die Matrix.

Mnemonicische Regel:

Auf dem i -ten Platz des Produkts steht das Skalarprodukt der i -ten Zeile der Matrix mit dem Vektor

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ -2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Mnemonicische Regel: Auf dem i -ten Platz des Produkts steht das Skalarprodukt der i -ten Zeile der Matrix mit dem Vektor

Aufgabe für Sie jetzt: Multiplizieren Sie die Matrix A mit dem Vektor v :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \\ 4 & 9 & 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lemma 16 *Multiplikation von Matrizen und Vektoren ist eine lineare Abbildung*

Beweis: Additivität:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = \\
 & \begin{pmatrix} a_{11}(x_1 + y_1) + \dots + a_{1n}(x_n + y_n) \\ \vdots \\ a_{m1}(x_1 + y_1) + \dots + a_{mn}(x_n + y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n \\ \vdots \\ a_{m1}y_1 + \dots + a_{mn}y_n \end{pmatrix} = \\
 & \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Ähnlich für λv .



Wichtiges Beispiel. Frage. *Wohin bildet diese Abbildung die Vektoren aus der Standard-Basis ab? Wir rechnen es aus.*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{12} + \dots + 0 \cdot a_{1n} \\ 1 \cdot a_{21} + 0 \cdot a_{22} + \dots + 0 \cdot a_{2n} \\ \vdots \\ 1 \cdot a_{m1} + 0 \cdot a_{m2} + \dots + 0 \cdot a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{12} + \dots + 0 \cdot a_{1n} \\ 0 \cdot a_{21} + 1 \cdot a_{22} + \dots + 0 \cdot a_{2n} \\ \vdots \\ 0 \cdot a_{m1} + 1 \cdot a_{m2} + \dots + 0 \cdot a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$$

Antwort. Die Matrix multipliziert mit dem i -ten Basisvektor aus der Standard-Basis ist gleich die i -te Spalte der Matrix

Matrix einer linearen Abbildung

Die Vektoren aus der Standard-Basis in \mathbb{R}^n werden wir mit

$$e_1, \dots, e_n \text{ bezeichnen: } e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-ter Platz}$$

Satz 13 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei eine lineare Abbildung. Für jedes

$i \in \{1, \dots, n\}$ seien $f(e_i) = u_i := \begin{pmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \\ \vdots \\ u_i^m \end{pmatrix}$ die Bilder der

Standard-Basisvektoren. Dann gilt für jeden Vektor

$$v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : f(v) = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_1^m & u_2^m & \dots & u_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}.$$

In Worten: jede lineare Abbildung von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m ist die Multiplikation mit derjenigen Matrix, deren i -te Spalte das Bild von e_i ist.

Bsp. Aus der Vorlesung 9 (und aus Hausaufgabe 2 Blatt 4)

Bsp. Sei $V = U = \mathbb{R}^3$, mit der Standardbasis

$\left(e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Wir betrachten das Tripel
 $\left(u_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, u_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, u_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$ von Vektoren aus \mathbb{R}^3 .

Nach Lemma 15 existiert eine lineare Abbildung f , die $e_1 \mapsto u_1$,
 $e_2 \mapsto u_2$, $e_3 \mapsto u_3$ abbildet. Die Formel für f haben wir in Vorl. 9
gefunden. Wir wiederholen das. Wir haben:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = f \left(x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) =$$
$$f \left(x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + f \left(y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + f \left(z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = x \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \\ 7x + 8y + 9z \end{pmatrix}$$

Wir sehen, dass die Abbildung genau f_A ist (sie bildet also den Vektor
 $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ auf das Produkt Av ab), wobei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ ist.

In der Tat, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \\ 7x + 8y + 9z \end{pmatrix}$.

Satz 13 in Worten: Jede lineare Abbildung von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i -te Spalte das Bild von e_i ist.

Beweis:

Lemma 15: Es gibt genau eine lin. Abbildung f mit $f(e_i) = u_i$

Wicht. Bsp.: Ae_i ist die i -te Spalte von A .

Lemma 16: Multiplikation von Matrizen und Vektoren ist eine lineare Abbildung

} \implies Satz 13 □

Beweis noch einmal (dasselbe in Sätzen)

Lemma 15: Es gibt genau eine lin. Abbildung f mit $f(e_j) = u_j$

Wicht. Bsp.: Ae_j ist die i -te Spalte von A .

Lemma 16: Multiplikation von Matrizen und Vektoren ist eine lineare Abbildung

} \implies Satz 13

Wir behaupten im Satz 13, dass die lineare Abbildung f , die e_1, \dots, e_n jeweils auf $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^m$ abbildet, die Multiplikation mit derjenigen Matrix A ist, deren Spalten die Vektoren u_1, \dots, u_n sind.

Multiplikation mit einer $(m \times n)$ -Matrix ist eine lineare Abbildung nach Lemma 16. Multiplikation mit derjenigen Matrix, deren Spalten die Vektoren $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^m$ sind, bildet die Standard-Basisvektoren e_1, \dots, e_n auf die Vektoren u_1, \dots, u_n ab, wie wir im **Wicht. Bsp.** oben gezeigt haben.

Also erfüllt die Multiplikation mit dieser Matrix diese beiden Eigenschaften.

Aber nach Lemma 15 definieren diese Eigenschaften die Abbildung eindeutig: nach Lemma 15 ist die lineare Abbildung f , die die Basisvektoren (in unserem Fall e_1, \dots, e_n) auf die Vektoren u_1, \dots, u_n abbildet, EINDEUTIG. Also fällt sie mit f_A (wobei A diejenige Matrix ist, deren Spalten die Vektoren u_1, \dots, u_n sind), zusammen. \square

Aufgabe: Finde die Matrix der linearen Abbildung (von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R}^2), die die Standardbasisvektoren e_1, e_2 jeweils in die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ überführt.

Antwort: Nach Satz 13 sind die Spalten der Matrix die Bilder der Vektoren, also ist die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Finde die Matrix der linearen Abbildung (von \mathbb{R}^3 nach \mathbb{R}^2), die die Vektoren e_1, e_2, e_3 jeweils in die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ überführt.

Aufgabe. Finde die Matrix der linearen Abbildung f (von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R}^2), die die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ jeweils in die Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ überführt.

Lösung: Um Satz 13 zu benutzen, müssen wir die Bilder der Standard-Basisvektoren e_1, e_2 bestimmen.

Wir werden benutzen, dass $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\stackrel{\text{Linearität}}{=} \frac{1}{2} f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \frac{1}{2} f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \stackrel{\text{Voraussetz.}}{=} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ähnlich, $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Also haben wir die Bilder von e_1, e_2 ausgerechnet: $f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $f(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Dann können wir den Satz 13 benutzen und die Antwort bekommen.

Aufgabe. Finde die Matrix der Abbildung $Id : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Id(v) = v$ (in der Standard-Basis).

Bemerkung. Die Abbildung Id ist offensichtlich linear: z.B.

$$Id(u + v) = u + v = Id(u) + Id(v).$$

Lösung: Um Satz 13 zu benutzen, müssen wir $Id(e_i)$ finden. Aber $Id(e_i) = e_i$!!!

Also ist die i -te Spalte der gesuchten Matrix e_i .

Antwort.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{heisst } \text{Einheitsmatrix}$$

Machen Sie bitte zu Hause die folgende Übung: multiplizieren Sie die Einheitsmatrix mit dem beliebigen Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, und stellen Sie fest, dass

das Ergebnis wieder $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ist.

Aufgabe. Finde (bzgl. der Standard-Basis) die Matrix der Streckung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $v \mapsto \alpha v$ wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.

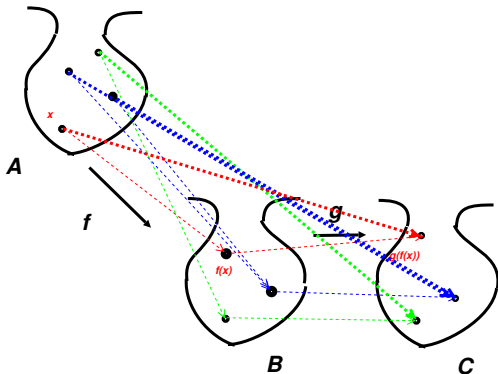
Lösung: Um Satz 13 zu benutzen, müssen wir $f(e_i)$ finden. Aber $f(e_i) = \alpha e_i$.

Also ist die i -te Spalte der gesuchten Matrix $\alpha \cdot e_i$.

Antwort.
$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}$$

Verkettung von Abbildungen – Wiederholung

A, B, C seien die Mengen, $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ seien Abbildungen.
Die **Verkettung** (Komposition, Superposition, Hintereinanderausführung) von Abbildungen g und f ist die Abbildung $g \circ f : A \rightarrow C$,
 $g \circ f(x) := g(f(x))$.

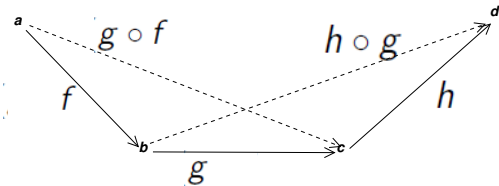


Lemma 17 Seien $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, $h : C \rightarrow D$ Abbildungen. Dann gilt: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

In Worten: Die Verkettung von Abbildungen ist assoziativ.

Beweis. Man nehme ein (beliebiges) $a \in A$. Z.z.:

$$h \circ (g \circ f)(a) = (h \circ g) \circ f(a) \quad (*)$$



Setze

$$b := f(a),$$

$$c := g(b) \text{ und}$$

$$d := h(c).$$

Dann gilt:

$$g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c,$$

$h \circ (g \circ f)(a) = h(g \circ f(a)) = h(c) = d$. Also ist die linke Seite von (*) gleich d .

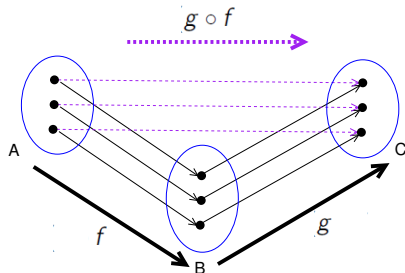
Wir rechnen jetzt die rechte Seite: $f(a) = b$,

$$(h \circ g) \circ f(a) = h \circ g(f(a)) = h \circ g(b) = h(g(b)) = h(c) = d.$$

Also ist die rechte Seite von (*) auch d . □

Folgerung. Verkettung von Bijektionen ist bijektiv

Folgerung Seien $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ bijektiv. Dann gilt:
 $g \circ f : A \rightarrow C$ ist auch bijektiv.



Wiederholung – Lemma 13 Sei $f : A \rightarrow B$. Dann gilt:

f ist Bijektion $\iff \exists f^{-1} : B \rightarrow A$
(s.d. $f^{-1} \circ f = Id_A$ und $f \circ f^{-1} = Id_B$).

Wiederholung – die Bezeichnung f^{-1} : Dies war die Bezeichnung für die inverse Abbildung; die Abbildung $f^{-1} : B \rightarrow A$ wurde durch die Eigenschaften $f^{-1} \circ f = Id_A$ und $f \circ f^{-1} = Id_B$ definiert. Also hat $g^{-1} : C \rightarrow B$ nach unsere Bezeichnungen die Eigenschaften $g^{-1} \circ g = Id_B$ und $g \circ g^{-1} = Id_C$.

Folgerung Seien $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ bijektiv. Dann gilt:
 $g \circ f : A \rightarrow C$ auch bijektiv.

Beweis der Folgerung. Die Abbildungen $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ seien bijektiv. Nach Lemma 13 existieren dann die inversen Abbildungen $f^{-1} : B \rightarrow A$ und $g^{-1} : C \rightarrow B$. Wir benutzen diese Abbildungen, um eine Abbildung zu konstruieren, die zu $g \circ f$ invers ist.

Wir zeigen nämlich, dass $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. Nach Definition der Inversen $(g \circ f)^{-1}$ muss dies eine Abbildung von C nach A sein, die die folgenden Eigenschaften hat: $(g \circ f)^{-1} \circ (g \circ f) = Id_A$ und $(g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1} = Id_C$.

Die Abbildung $f^{-1} \circ g^{-1}$ ist eine Abbildung von C nach A , weil $g^{-1} : C \rightarrow B$ und $f^{-1} : B \rightarrow A$. Wir beweisen jetzt die Eigenschaften:

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) =$$

[Da die Verkettung nach Lemma 17 assoziativ ist, können wir die Klammern beliebig umstellen]

$$= f^{-1} \circ \left(\underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{Id_B} \circ f \right) = f^{-1} \circ (Id_B \circ f) = f^{-1} \circ f = Id_A.$$

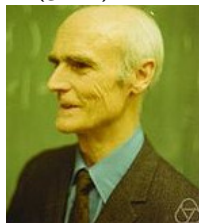
$$\text{Analog, } (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ \left(\underbrace{(f \circ f^{-1})}_{Id_B} \circ g^{-1} \right) = g \circ (Id_B \circ g^{-1}) = g \circ g^{-1} = Id_C.$$

Also existiert eine Inverse zu $g \circ f$. Die Abbildung $g \circ f$ ist dann nach Lemma 13 bijektiv. □

Wie berechnet man $(g \circ f)^{-1}$?

Wir haben folgende Formel im Beweis der Folgerung bekommen:

$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ wobei $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ Bijektionen sind.



(Copyright: MFO)

Mnemonicische Regel: (nach Coxeter):

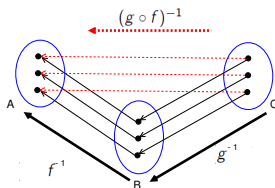
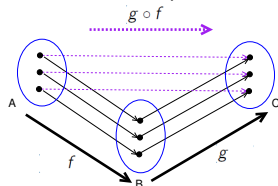
f = Socken anziehen f^{-1} = Socken ausziehen

g = Schuhe anziehen g^{-1} = Schuhe ausziehen

$g \circ f$ = zuerst Socken anziehen, dann Schuhe anziehen

$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} =$

zuerst Schuhe ausziehen, dann Socken ausziehen



Man kann analog beweisen, dass

$$(f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_k)^{-1} = (f_k)^{-1} \circ (f_{k-1})^{-1} \circ \dots \circ (f_1)^{-1}.$$

Lemma 18 Seien $f : V \rightarrow U$, $g : U \rightarrow W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \rightarrow W$ auch eine lineare Abbildung.

In Worten: *Die Verkettung von linearen Abbildungen ist linear.*

Beweis:

$$g \circ f(v+u) \stackrel{\text{Definition}}{=} g(f(v+u)) \stackrel{\text{Linearität von } f}{=} g(f(v) + f(u)) \stackrel{\text{Linearität von } g}{=}$$

$$g(f(v)) + g(f(u)) \stackrel{\text{Definition}}{=} g \circ f(v) + g \circ f(u)$$

Ähnlich für λv .



Schulden: Beweis, dass Satz 11' den Satz 11 impliziert

Wiederholung – Satz 11' Sei $(V, +, \cdot)$ ein n -dimensionaler Vektorraum. Dann gibt es einen Isomorphismus $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Wiederholung – Lemma 14 – ein bisschen schwächere Version: Ist $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus, so ist $g^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow U$ ebenfalls ein Isomorphismus.

Wiederholung – Satz 11 Sei $(V, +, \cdot)$ und $(U, +, \cdot)$ n -dimensionale Vektorräume der gleichen Dimension n . Dann gibt es einen Isomorphismus $h : V \rightarrow U$.

Wir folgern jetzt den Satz 11 aus Satz 11' und den heute bewiesenen Aussagen – Lemma 17 und Lemma 18. Wir betrachten die Isomorphismen $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, die nach Satz 11' existieren. Außerdem betrachten wir die Abbildung g^{-1} , die nach Lemma 14 ein Isomorphismus ist.

Wir zeigen dass $g^{-1} \circ f : V \rightarrow U$ ein Isomorphismus ist. In der Tat, $g^{-1} \circ f$ ist bijektiv nach Folgerung aus Lemma 17, als Verkettung von bijektiven Abbildungen. $g^{-1} \circ f$ ist linear nach Lemma 18 als Verkettung von linearen Abbildungen. Dann ist $h := g^{-1} \circ f$ ein Isomorphismus, wie behauptet, und die Vektorräume U und V sind, wie behauptet, isomorph. □