Lernziele der 6. Woche: Die Studierenden sollen ...

- ... Matrizen multiplizieren und überprüfen können, ob die Dimensionen eine Multiplikation erlauben
- ... die Dimensionsformel anwenden können, um zu zeigen, dass die Existenz einer inversen Matrix impliziert, dass die zugehörige lineare Abbildung ein Isomorphismus ist
- ... das Produkt von Matrizen invertieren können
- ... quadratische lineare Gleichungssysteme mithilfe von inversen Matrizen lösen können
- ... Matrizen in ein Produkt von Elementarmatrizen zerlegen können
- ... mit der Methode der Elementarmatrizen eine quadratische Matrix invertieren können

Multiplikation der Matrizen

Wir definieren jetzt Produkt von zwei Matrizen: einer $(k \times m)-$Matrix A und einer $(m \times n)-$Matrix B.

Wiederholung – Lemma 18 *Seien $f : V \to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen (in unserem Fall wird $g = f_A$ und $f = f_B$.) Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.*

Wiederholung – Satz 13 Jede lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^k$ ist die Multiplikation mit der $(k \times n)-$Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Lemma 18: Verkettung von} \\ \text{linearen Abbildungen ist linear} \\ \\ \\ \text{Satz 13: Jede lineare Abbildung:} \\ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ \text{ist die Multiplikation} \\ \text{mit einer } (m \times n) \text{ Matrix.} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

Seien $f_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ bzw. $f_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die Multiplikationen mit einer $(k \times m)$-Matrix A bzw. einer $(m \times n)-$Matrix B, d.h. $f_A(v) := Av$ für $v \in \mathbb{R}^m$ und $f_B(u) := Bu$ für $u \in \mathbb{R}^n$.
Die Verkettung $f_A \circ f_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ ist auch linear und ist deswegen auch die Multiplikation mit einer $(k \times n)$-Matrix

Def. *Seien $f_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ bzw. $f_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die Multiplikationen mit einer $(k \times m)$-Matrix A
bzw. $(m \times n)-$Matrix B d.h., $f_A(v) := Av$, $f_B(u) := Bu$.*

Dann heißt die Matrix von $f_A \circ f_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ das Produkt der beiden Matrizen und wird AB bezeichnet. Dies ist eine $(k \times n)$-Matrix.

Konstruktion aus Definition in Bsp.

Wir nehmen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$.

Die Matrix A entspricht der Abbildung $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$f_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z \\ 3 \cdot x + 2 \cdot y + 1 \cdot z \end{pmatrix}$. Die Matrix B entspricht der Abbildung

$f_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f_B\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 \cdot x + 7 \cdot y \\ 6 \cdot x + 6 \cdot y \\ 7 \cdot x + 5 \cdot y \end{pmatrix}$.

Die Abbildung $f_A \circ f_B$ ist die Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$. Sie bildet den Vektor $\binom{x}{y}$ auf den Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \binom{x}{y} \right)$$

ab: Wir multiplizieren zuerst B mit $\binom{x}{y}$ und dann multiplizieren wir A mit dem Ergebnis.

Das ist eine lineare Abbildung (als Verkettung von linearen Abbildungen nach Lemma 18). Deswegen ist nach Satz 13 $f_A \circ f_B(\binom{x}{y})$ gleich dem Produkt einer (eindeutig bestimmten) $(2 \times 2)-$Matrix mit $\binom{x}{y}$. DIESE MATRIX HEISST DANN DAS PRODUKT VON A UND B.

Frage: *Wie kann man das Produkt von Matrizen ausrechnen?*

Satz 14 (Rechenregel für das Produkt von Matrizen) *Seien* $f_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, $f_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *Multiplikationen mit den Matrizen*

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Matrix von $f_A \circ f_B$ *gleich*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m a_{1i} b_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^m a_{1i} b_{in} \\ \sum_{i=1}^m a_{2i} b_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^m a_{2i} b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^m a_{ki} b_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^m a_{ki} b_{in} \end{pmatrix}$$

Mnemonische Regel: Auf dem (i, j)-ten Platz des Produkts steht das Skalarprodukt der i-ten Zeile der Matrix A mit der j-ten Spalte der Matrix B:

Mnemonische Regel: Auf dem (i,j)-ten Platz des Produkts steht das Skalarprodukt der i-ten Zeile der Matrix A mit der j-ten Spalte der Matrix B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 6 + 1\cdot 7 & 3\cdot 7 + 2\cdot 6 + 1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Mnemonische Regel: Auf dem (i, j)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der i-ten Zeile der Matrix A mit der j-ten Spalte der Matrix B.

Aufgabe für Sie jetzt: Multiplizieren Sie die Matrizen A und B:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Beweis des Satzes 14:

Mnemonische Regel: Auf dem (i, j)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der i-ten Zeile der Matrix A mit der j-ten Spalte der Matrix B.

Satz 13: $j-$te Spalte der Matrix AB
ist das Bild $f_A \circ f_B(e_j)$

Satz 13: j-te Spalte der Matrix B
ist das Bild $f_B(e_j)$

Rechenregel für Matr. mal Vektoren:
auf der i-ten Stelle
des Bildes $f_A(f_B(e_j)))$
Steht das Skalarprodukt
der i-ten Zeile der Matrix A
mit dem Vektor $f_B(e_j)$,
also das Skalarprodukt
der i-ten Zeile von A
mit der $j-$ten Spalte von B

$\Longrightarrow$

Auf dem (i, j)-ten Platz
des Produkts AB
steht das Skalarprodukt
der i-ten Zeile der Matrix A
mit der j-ten Spalte der Matrix B

$\square$

Ausführlicher: Beweis des Satzes anhand eines Bsp.

Finden wir die Matrix AB, wobei A und B wie im Bsp. oben sind:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Wir benutzen Satz 13: Die $j-te$ Spalte der Matrix AB ist das Bild von e_j. Also, um AB auszurechnen, müssen wir die Bilder von $f_A \circ f_B(e_j)$ finden. Machen wir es für $j = 1$, also für $e_1 = \binom{1}{0}$ – wir sollten die erste Spalte des Produkts bekommen.

Nach Definition der Verkettung, ist $f_A \circ f_B\left(\binom{1}{0}\right) = f_A\left(f_B\left(\binom{1}{0}\right)\right)$. Nach **Wicht. Bsp.** oben ist $f_B\left(\binom{1}{0}\right)$ die erste Spalte von B, also $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ (wer das **Wicht. Bsp.** vergessen hat, muß $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\binom{1}{0}$ ausrechnen). Also,

$$f_A\left(f_B\left(\binom{1}{0}\right)\right) = f_A\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}\right) \overset{\text{Def. von } f_A}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \overset{\text{Def von } Av}{=}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 \\ 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ 34 \end{pmatrix} \longleftarrow$$ und das muss die erste Spalte von AB sein.

Wir sehen, dass die Komponenten von AB, die in der ersten Spalte stehen, tatsächlich die Skalarprodukte der Zeilen von A und der ersten Spalte von B sind.

Dasselbe für beliebige Matrizen A und B

Was ist $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$? Nach der Definition des Produktes von Matrizen ist dies eine Matrix, sodass das Multiplizieren mit dieser Matrix den Vektor $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ auf den Vektor $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)$ abbildet. Um ihre $j-$te Spalte nach Satz 13 auszurechnen, müssen wir die Bilder von e_j ausrechnen. Wir haben:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} e_j \right) \overset{\text{Wicht. Bsp}}{=}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} \overset{\text{Satz 13}}{=} \begin{pmatrix} a_{11}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + \dots + a_{1m}b_{mj} \\ \vdots \\ a_{k1}b_{1j} + a_{k2}b_{2j} + \dots + a_{km}b_{mj} \end{pmatrix}$$

(Eintrag Nummer i ist Skalarprodukt der $i-$ten Zeile von A mit Be_j, also mit $j-$ter Spalte von B.) Wir sehen also, dass an der $(i, j)-$Stelle von AB das Skalarprodukt der $i-$ten Zeile von A und der $j-$ten Spalte von B steht, wie wir im Satz 14 behauptet haben.

Folgerung

Die Multiplikation von Matrizen ist assoziativ: $(AB)C = A(BC)$ (falls definiert).

Beweis: Nach Lemma 17 ist Verkettung von Abbildungen assoziativ. $\square$

Bemerkung. Die Rechenregeln für das Produkt einer $(k \times n)-$ Matrix mit einem Vektor des $\mathbb{R}^n$ sowie das Produkt von einer $(k \times n)-$ Matrix und einer $(n \times 1)-$Matrix ist gleich – man kann Vektoren als $(n \times 1)-$ Matrizen betrachten.

Vektorraumsstruktur auf der Menge von $(m \times n)-$Matrizen: Summe von Matrizen

Seien A, B $(m \times n)$-Matrizen über $\mathbb{R}$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(v) := Av + Bv$. Diese Abbildung ist linear.

Def *Die Matrix dieser Abbildung f heißt die Summe von Matrizen und wird mit $A + B$ bezeichnt.*

Rechenregel:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Tatsächlich,

j-te Spalte von $A + B \overset{\text{Wicht. Bsp.}}{=} (A + B)(e_j)$

$\overset{\text{Def.}}{=} Ae_j + Be_j \overset{\text{Wicht. Bsp.}}{=} j\text{-te Spalte von } A + j\text{-te Spalte von } B$ $\square$

Multiplikation von Matrizen mit Skalaren

Sei A eine $(m \times n)-$Matrix, $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(v) := \lambda f_A(v) = \lambda \cdot (Av)$. Die Abbildung ist linear (als Verkettung von zwei linearen Abbildungen).

Def. *Die Matrix dieser Abbildung f heißt das λ-fache von A und wird mit λA bezeichnet.*

Rechenregel: $\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$

Beweis von Rechenregel.

i-te Spalte von $\lambda A \overset{\text{Wicht. Bsp.}}{=} \lambda(A(e_i))$

$\overset{\text{Def.}}{=} \lambda A e_i \overset{\text{Wicht. Bsp.}}{=} \lambda$-faches der i-ten Spalte von A.

Bemerkung Die Multiplikation mit λ liefert dasselbe Ergebnis wie die Multiplikation von links mit der $(m \times m)$ Matrix $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$, weil Multiplikation mit dieser Matrix wie wir vorher bewiesen haben multipliziert den Vektor mit λ, also
$$\left(\begin{pmatrix} \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} A\right) v \overset{\text{Assoziativität}}{=} \begin{pmatrix} \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} (Av) =$$
$$\lambda \cdot (Av) \overset{\text{Def. von } \lambda A}{=} (\lambda A)v.$$

Vektorraum der Matrizen

Bezeichnung *Die Menge der* $(m \times n)$*-Matrizen werden wir mit* $Mat(m, n)$ *bezeichnen.*

Aussage $Mat(m, n)$ *mit eben definierter Addition und Skalarmultiplikation ist ein Vektorraum der Dimension* $m \cdot n$*.*

Tatsächlich, wir können eine Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ mit dem folgenden Element aus $\mathbb{R}^{nm}$ identifizieren:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

und dann sind die Operationen in $Mat(m, n)$ dieselben wie in $\mathbb{R}^{nm}$

Standard-Basis in $Mat(m, n)$: Die Matrizen B_{ij}, deren Einträge bis auf eine 1 an der Stelle (i, j) alle 0 sind.

Bsp: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_{12} \in Mat(2, 3)$,

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B_{31} \in Mat(3, 2)$.

Quadratische Matrizen

$(n \times n)$-Matrizen heißen quadratische. Die entsprechenden linearen Abbildungen sind laut Definition Endomorphismen des $\mathbb{R}^n$ (weil $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$).

Das Produkt von $(n \times n)$- Matrizen ist auch eine $(n \times n)$- Matrix.

Def. *Eine $(n \times n)$ Matrix B heißt die inverse Matrix zu einer $(n \times n)$-Matrix A, falls* $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Frage *Hat jede $(n \times n)$ Matrix eine inverse?*

Nein! Die 0-Matrix $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ hat keine inverse Matrix.

In der Tat, für eine beliebige Matrix B ist $B\mathbf{0} =$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Def. Eine $(n \times n)-$ Matrix heißt nichtausgeartet, oder invertierbar, wenn sie eine Inverse hat.

Die inverse oder eine inverse?

Bemerkung. Später (Folg. 2 aus Satz 15) zeigen wir, dass die inverse Matrix eindeutig ist.

Satz 15 *Sei A eine $(n \times n)$ - Matrix. Dann sind die folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *A hat eine inverse Matrix ($\overset{Def.}{\iff}$ A ist nichtausgeartet)*

(b) *Die Abbildung $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, also die Multiplikation mit der Matrix A ist ein Isomorphismus.*

(c) *Die Spalten von A sind linear unabhängig.*

Beweis (a) $\Longrightarrow$ (b): zuerst Injektivität

(a) A hat eine inverse Matrix.

(b) Die Multiplikation mit der Matrix A ist ein Isomorphismus.

Beweis (a) $\Longrightarrow$ (b) Angenomen es gibt ein B mit $BA = Id$. Da wir nach Lemma 16 wissen, dass f_A linear ist, müssen wir nur zeigen, dass f_A bijektiv ist. Wir zeigen zuerst, dass f_A injektiv ist.
Sei $Av_1 = Av_2$ (Z.z.: $v_1 = v_2$). Wir multiplizieren die Gleichung $Av_1 = Av_2$ (von links) mit B und bekommen $BAv_1 = BAv_2$. Da $BA = Id$ und $Id\, v = v$, gilt $v_1 = v_2$. Also, aus $f_A(v_1) = f_A(v_2)$ folgt $v_1 = v_2$. Dann ist f_A injektiv.

Bemerkung. Hier haben wir im Wesentlichen den Beweis von Lemma 12(1) in Richtung „$\Longleftarrow$“ aus Vorl. 7 wiederholt:
(Lemma 12(1) in Richtung „$\Longleftarrow$“ sagt, dass

f ist injektiv $\Longleftarrow$ f hat eine Linksinverse.)
In unserem Fall ist f_B eine Linksinverse von f_A, weil

$$f_B \circ f_A(v) \overset{\text{Def. des Matrixprodukts}}{=} \underbrace{BA}_{Id}\, v = Id(v) = v.$$

Beweis (a) $\Longrightarrow$ (b): Surjektivität

(a) A hat eine inverse Matrix.

(b) Die Multiplikation mit der Matrix A ist ein Isomorphismus.

Wir haben eben bewiesen, dass die Abbildung f_A injektiv ist. Wir haben aber Bijektivität behauptet. Um zu zeigen, dass f_A auch surjektiv ist, benutzten wir die **Wichtige Anwendung der 1. Dimensionsformel.**

Wiederh. — Wicht. Anw. der 1. Dimensionsformel; Vorl. 8 Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus, $dim(V) = n < \infty$. Dann gilt:

$$f \text{ ist injektiv} \iff f \text{ ist surjektiv.}$$

Da die Matrix A quadratisch ist, ist $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ also ein Endomorphismus.

Wir haben bereits bewiesen, dass die Abbildung f_A injektiv ist. Dann ist sie nach **Wicht. Anw.** surjektiv; folglich bijektiv.

Beweis (b) $\Longrightarrow$ (c).

(b) Die Abbildung $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, also die Multiplikation mit der Matrix A, ist ein Isomorphismus.

(c) Die Spalten von A sind linear unabhängig.

Angenommen f_A ist ein Isomorphismus. Z.z.: Die Spalten von A sind linear unabhängig.
Die Vektoren $u_1, ..., u_n$ seien die Spalten von A, die Matrix sei also
$\begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix}$ Dann ist die Linearkombination

$$\lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1^1 & +\dots+ & \lambda_n u_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 u_1^n & +\dots+ & \lambda_n u_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^1 & \dots & u_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Da f_A ein Isomorphismus ist, ist $Kern_{f_A} = \{\vec{0}\}$. Dann folgt aus $(*)= 0$, dass $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$; die Vektoren ($=$ Spalten) u_i sind dann linear unabhängig, $\square$

Beweis (c) $\Longrightarrow$ (a)

(c) Die Spalten von A sind linear unabhängig.

(a) A hat eine inverse Matrix.

Die Spalten von A bezeichnen wir mit $u_1, ..., u_n$. Sei $\{u_1, ..., u_n\}$ linear unabhängig. Dann ist $(u_1, ..., u_n)$ eine Basis (Folgerung (a) aus dem Austauschsatz). Man betrachte die lineare Abbildung f, die $u_1 \mapsto e_1$, $u_2 \mapsto e_2$,..., $u_n \mapsto e_n$ (Existenz: Lemma 15). Wir zeigen: $f \circ f_A = Id$. Tatsächlich, $e_i \overset{f_A}{\mapsto} u_i \overset{f}{\mapsto} e_i$. Also, $f \circ f_A(e_i) = e_i = Id(e_i)$. Aber es gibt GENAU EINE Abbildung (Lemma 15), die jedes e_i auf e_i abbildet. Eine solche Abbildung können wir sofort konstruieren, Id ist nämlich eine lineare Abbildung, sodass $Id(e_i) = e_i$ $(\forall i)$. Also $f \circ f_A = Id$. Sei B die Matrix von f. Dann ist $BA \overset{\text{Def. Matrixprodukt}}{=} Id$. □

Bemerkung. Wir haben die gleiche Bezeichnung Id für zwei verschiedene Objekte – Id ist für uns eine Abbildung, $Id(v) = v$, und auch eine $(n \times n)-$Matrix $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. Seien Sie bitte nicht verwirrt.

Folgerung 1: Produkt von nichtausgearteten $(n \times n)-$Matrizen ist nichtausgeartet.

Beweis. Seien A, B nichtausgeartete $(n \times n)$-Matrizen. Dann sind f_A, f_B Isomorphismen nach Satz 15. Dann ist $f_A \circ f_B$ auch ein Isomophismus nach der Folg. aus Lemma 17.
Dann ist die entsprechende Matrix, also AB, auch nichtausgeartet nach Satz 15, $\square$

Rechnenregeln. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Beweis. In der Tat, $(B^{-1}A^{-1})(AB) \overset{\text{Assoziativität}}{=} B^{-1}((A^{-1}A)B) = B^{-1}(Id \cdot B) = B^{-1}B = Id$.

Bemerkung. Das ist vollständig analog zur Rechnenregel für das Invertieren von Isomorphismen („Coxeter“) aus Vorl. 10-11

Man kann die Folgerung „iterieren“: Wenn A, B, C nichtausgeartet sind, dann ist $ABC = A(\underbrace{BC}_{\text{nichtausg.}})$ nichtausgeartet. Dasselbe gilt für eine beliebige Anzahl von Matrizen.

Inverse zu inverse: rechnenregeln

Frage. Sei A nichtausgeartet, also existiert A^{-1} mit $A^{-1}A = Id$. Ist A^{-1} auch nichtausgeartet? Eindeutig?

Folgerung 2 aus Satz 15 Sei $A \in Mat(n,n)$ nichtausgeartet. Dann gilt: die inverse Matrix ist eindeutig. Ferner gilt: A^{-1} ist auch nichtausgeartet, und $(A^{-1})^{-1} = A$.

Wiederholung – Lemma 14 Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus, so ist $f^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ebenfalls ein Isomorphismus.

Beweis der Folgerung 2. Angenommen, $A \in Mat(n,n)$ ist nichtausgeartet. Dann ist f_A ein Isomorphismus nach Satz 15. Dann ist $(f_A)^{-1}$ ebenfalls ein Isomorphismus. Sei B die Matrix von $(f_A)^{-1}$.
Wir haben $BA = [\text{Matrix von } (f_A)^{-1} \circ f_A] = Id$; also ist B eine inverse Matrix zu A. Außerdem haben wir:
$AB = [\text{Matrix von } f_A \circ (f_A)^{-1}] = Id. \qquad (*)$
Angenommen die Matrix B' auch eine inverse Matrix zu A ist, d.h., $Id = B'A$. Wir multiplizieren diese Gleichung von rechts mit B und bekommen $B = (B'A)B = B' \underbrace{(AB)}_{Id} = B'$; also $B = B'$ — Eindeutigkeit ist bewiesen. Aus $(*)$ und Eindeutigkeit von inverser Matrix folgt, dass $AA^{-1} = Id$; deswegen $(A^{-1})^{-1} = A$, $\square$

Direkte Konstruktion einer inversen Matrix

Sei $A \in Mat(n, n)$. Die Spalten von A seien Vektoren u_1,..., u_n. Ist $(u_1, ..., u_n)$ keine Basis, so ist die Matrix nicht invertierbar (Satz 15). Ist sie eine Basis, kann man die Vektoren e_j als Linearkombination der Vektoren u_i darstellen, sei also

$e_j = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} u_i. \quad (*)$

(Für jedes j ist $(*)$ ein lineares Gleichungssystem aus n Gleichungen für n Unbekannte; also ingesamt müssen wir ein lineares Gleichungssystem aus n^2 Gleichungen für n^2 Unbekannte lösen.)

Dann ist die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

die inverse Matrix zu A. Tatsächlich bildet nach Konstruktion die Multiplikation mit der Matrix den Vektor u_j auf $\sum_{i=1}^n \lambda_{ij} u_i = e_j$ ab. Also bildet BA jedes $e_j \overset{A}{\longmapsto} u_j \overset{B}{\longmapsto} e_j$ ab, also $f_{BA} = Id$ und folglich $BA = Id$.

Wir werden zwei bessere Algoritmen kennenlernen (einen heute noch, den zweiten später), um inverse Matrizen zu berechnen.

Matrizendarstellung von linearen Gleichungssystemen

Das lineare Gleichungssystem (m Gleichungen, n Unbekannte $x_1, .., x_n$.)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots & + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \dots & + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

kann man in Matrixform schreiben:

$Ax = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m,n),\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ und } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Die Matrix A heißt die Koeffizientenmatrix des Systems.

Die Matrix $A_{erw} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in Mat(m, n+1)$ heißt die

erweiterte Koeffizientenmatrix des Systems.

Man kann die elementaren Zeilenoperationen aus Vorl. 1 als elementare Zeilenoperationen der erweiterten Koeffizientenmatrix verstehen.

Folgerung 3 aus Satz 15 *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n,n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung $x = A^{-1}b$.*

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei A nichtausgeartet. Dann ist das System tatsächlich lösbar: $x := A^{-1}b$ ist eine Lösung, weil $Ax = AA^{-1}b = b$.
In der Tat ist diese Lösung ist eindeutig: Sei x eine Lösung. Nach der Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung $Ax = b$ mit A^{-1} bekommen wir: $A^{-1}Ax = A^{-1}b$, also $x = A^{-1}b$.

$\Longleftarrow$ Angenommen das System ist eindeutig lösbar. Dann ist das System $Ax = \vec{0}$ auch eindeutig lösbar. Tatsächlich, es ist lösbar, weil $\vec{0}$ eine Lösung ist. Falls noch eine Lösung $x' \neq \vec{0}$ des Systems $Ax = \vec{0}$ existiert, dann ist $x + x'$ eine Lösung von $Ax = b$ (weil $A(x + x') = Ax + Ax' = b + \vec{0} = b$), was den Voraussetzungen widerspricht. Also ist $Ax = \vec{0}$ eindeutig lösbar und die Lösung ist $x = \vec{0}$.
Da $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$
die Linearkombination der Spalten von A mit Koeffizienten $x_1, \dots, x_n$ ist, ist nur die triviale Linearkombination der Spalten gleich Null. Dann sind die Spalten von A linear unabhängig und die Matrix ist nichtausgeartet nach Satz 15. $\square$

Exkurs: $Kern_A$ und lineare Abhängigkeit der Spalten einer Matrix A

A sei eine $(n \times n)$-Matrix. Aus der Äquivalenz der Aussagen $(b) \Longleftrightarrow (c)$

(b) Die Abbildung $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, also die Multiplikation mit der Matrix A, ist ein Isomorphismus.

(c) Die Spalten von A sind linear unabhängig.

und aus **Wicht. Anw. 1. Dimenensionsformel** wissen wir, dass
A kein Isomorphismus ist $\Longleftrightarrow Kern_A \neq \{\vec{0}\}$.
Wir kombinieren diese zwei Äquivalenzen und bekommen:

$Kern_{f_A} \neq \{\vec{0}\} \Longleftrightarrow \quad$ [die Spalten von A sind linear abhängig]

Versuchen wir, diese Aussage unabhängig von Satz 15 zu verstehen:

$Kern_{f_A} \neq \{\vec{0}\} \iff$ Spalten von A sind linear abhängig.

Frage. Wie findet man den Kern einer Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n)$$

(d.h. den Kern der entsprechenden Abbildung f_A)? Nach Definition besteht $Kern_A$ aus allen Vektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ sodass $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{0}$; das bedeutet, $Kern_A$ ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \overset{\text{ausrechnen}}{=} \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \overset{\text{ausrechnen}}{=}$$

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Das ist dasselbe Gleichungssystem, das wir bekommen, wenn wir entscheiden ob die Vektoren $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind!!! Die Lösungen davon bestehen aus Koeffizienten sodass die Linearkombination von $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ gleich Null ist. Wir werden dies als eine **Beobachtung** formulieren.

Beobachtung.

Seien $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ die Spalten einer $(n \times m)-$Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Dann gilt: ein Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in Kern_A \iff x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Also, mit Hilfe von inversen Matrizen können wir leicht (quadratische) Gleichungssysteme lösen – die Lösung von $Ax = b$ (wobei A eine nichtausgeartete quadratische Matrix ist) ist $x = A^{-1}b$; die Lösungsmenge ist also einelementig und ist $\{A^{-1}b\}$.

Man bemerke auch, dass wenn wir mehrere Gleichungssysteme mit gleichem A und verschiedenen b lösen sollen (was öfter in praktischen Aufgaben der Fall ist), wir einmal A invertieren und dann die verschiedenen b in die Formel $x = A^{-1}b$ einsetzen können.

Aber wie können wir die inverse Matrix ausrechnen? Mit der Definition ist es zu aufwendig – wir müssen ein Gleichungssystem aus n^2 linearen Gleichungen lösen und es ist nicht besonders effektiv, statt eines Gleichungssystems aus n Gleichungen ein Gleichungssystem aus n^2 Gleichungen zu lösen.

Es gibt aber andere Methoden, die inverse Matrix auszurechnen. Heute lernen wir das „Gaussverfahren“ (auch Gauss-Jordan-Verfahren genannt) und irgendwann später die Leibniz-Formel.

Standard-Basis in $Mat(n, n)$ – Wiederholung

Elementarmatrizen sind quadratische Matrizen von spezieller Gestalt.
Wiederholung. Standard-Basis in $Mat(n, n)$: Die Matrizen B_{ij}, deren (i, j)-Element gleich 1 ist und deren andere Elemente gleich 0 sind.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{(i,j)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Bsp: $B_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Elementarmatrizen in $Mat(n, n)$

Elementarmatrix von Typ 1. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ $\cancel{\text{und } \alpha \neq 0}$. Falls $i \neq j$, setze $E_{ij}^{\alpha} := Id + \alpha B_{ij}$.

Bsp in D3. $E_{13}^{5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Allgemein gilt: Diagonalelemente sind alle gleich 1, auf dem $(i, j)-$Platz steht α, sonst steht überall 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{(i,j)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha_{(i,j)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Elementarmatrix von Typ 2. Für $i \in \{1, ..., n\}$ und $\gamma \neq 0$, setze $E_i^\gamma = Id + (\gamma - 1)B_{ii}$.

Bsp in D3. $E_2^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (5-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Allgemein gilt: Diagonalelemente sind 1 mit Ausnahme der $(i, i)-$Stelle, auf welcher γ steht; sonst steht überall 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} + (\gamma - 1) \cdot \begin{pmatrix} & & & \\ & 1_{(i,i)} & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \gamma_{(i,i)} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Elementarmatrix von Typ 3. Sei $i, j \in \{1, ..., n\}$. Setze
$E_{ij} := Id - B_{ii} - B_{jj} + B_{ij} + B_{ji}$

Bsp in D3. $E_{23} = E_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} +$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Allgemein gilt: Die $i-$te und die $j-$te Zeile sind vertauscht.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1_{(i,i)} & & \\ & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & 1_{(j,j)} \\ & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & 1_{(i,j)} \\ & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ 1_{(j,i)} & & \\ & & \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0_{(i,i)} & \cdots & 1_{(i,j)} & \\ & \vdots & 1 & \vdots & \\ & 1_{(j,i)} & \cdots & 0_{(j,j)} & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Elementare Zeilenumformungen vom Typ 1,2,3 – Wiederholung

Typ 1

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & \vdots & \\ (a_{k1} + \lambda a_{i1})x_1 & + \cdots + & (a_{kn} + \lambda a_{in})x_n & = & b_k + \lambda b_i & \longleftarrow \quad k\text{−te Zeile} \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Typ 2:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & \vdots & \\ c \cdot a_{k1}x_1 & + \cdots + & c \cdot a_{kn}x_n & = & c \cdot b_k \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Typ 3:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{k1}x_1 & + \cdots + & a_{kn}x_n & = & b_k & \longleftarrow \quad i\text{−te Zeile} \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{i1}x_1 & + \cdots + & a_{in}x_n & = & b_i & \longleftarrow \quad k\text{−te Zeile} \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Eigenschaften der Elementarmatrizen

Sei A eine beliebige $(n \times n)-$ Matrix. Dann gilt:

1. Sei $i \neq j$. Es gilt: Multiplikation von links mit E_{ij}^{λ} addiert zur i-ten Zeile das λ-fache der j-ten Zeile. (Elementare Zeilenumformung (S1) aus Vorl. 1) Ferner gilt: $(E_{ij}^{\lambda})^{-1} = E_{ij}^{-\lambda}$
2. Multiplikation von links mit E_i^{λ} multipliziert die i-te Zeile mit λ. (Elementare Zeilenumformung (S2) aus Vorl. 1) Ferner gilt: $(E_i^{\lambda})^{-1} = E_i^{1/\lambda}$.
3. Multiplikation von links mit E_{ij} vertauscht die i-te und die j-te Zeile (von A) (Elementare Zeilenumformung (S3) aus Vorl. 1) . Ferner gilt: $(E_{ij})^{-1} = E_{ij}$

Wir beweisen die Eigenschaften nur für die Elementarmatrizen vom Typ 1. Für die anderen Typen ist der Beweis analog, bitte unbedingt zu Hause probieren und wenn sie Schwierigkeiten damit haben, bitte in D3 „mit Gewalt“ ausrechnen.

Folgerung *Jede Elementarmatrix ist nichtausgeartet. Ihre Inverse ist auch eine Elementarmatrix*

Beweis der Folgerung. Die Matrix ist nichtausgeartet, wenn sie eine Inverse hat; die Inversen von Elementarmetrizen sind oben

Beweis der Eigenschaften einer Matrix vom Typ 1

Zu beweisende Eigenschaft: Multiplikation von links mit E_{ij}^{λ} addiert zur i-ten Zeile das λ-fache der j-ten Zeile.

Beweis. Nach Definition ist $E_{ij}^{\lambda} := Id + \lambda B_{ij}$. Dann gilt für beliebige Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$:

$E_{ij}^{\lambda} A = (Id + \lambda B_{ij})A \overset{\text{Matrixaddition/Multiplikation ist distributiv}}{=} A + \lambda(B_{ij}A)$.

Rechnen wir $B_{ij}A$ aus, zuerst in einem Bsp: Wir nehmen B_{23} in D3:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

[Was nicht in der $i-$ten Zeilen steht ist nicht wichtig] =

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} ?\cdot 0+?\cdot 0 + a_{31}\cdot 0 & ?\cdot 0+?\cdot 0 + a_{32}\cdot 0 & ?\cdot 0+?\cdot 0 + a_{33}\cdot 0 \\ ?\cdot 0+?\cdot 0 + a_{31}\cdot 1 & ?\cdot 0+?\cdot 0 + a_{32}\cdot 1 & ?\cdot 0+?\cdot 0 + a_{33}\cdot 1 \\ ?\cdot 0+?\cdot 0 + a_{31}\cdot 0 & ?\cdot 0+?\cdot 0 + a_{32}\cdot 0 & ?\cdot 0+?\cdot 0 + a_{33}\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Analog kann man das für beliebige n, i, j ausrechnen – $B_{ij}A$ ist eine Matrix, deren $i-$te Zeile die $j-$te Zeile von A ist und sonst nur Nullen enthält.

Dann ist $E_{ij}^{\lambda} A \overset{\text{wie oben erklärt}}{=} A + \lambda \cdot B_{ij}A$ wie wir behauptet haben: die $j-$Zeile ist mit Koeffizient λ zur $i-$ten Zeile addiert.

Zu beweisende Eigenschaft:

$E_{ij}^{-\lambda} = \left(E_{ij}^{\lambda}\right)^{-1}$.

Was ist $E_{ij}^{\lambda} Id$? Umformuliert: Was macht die Multiplikation mit E_{ij}^{λ} mit der Matrix Id?

Dasselbe, was sie mit allen anderen Matrizen macht: sie addiert zu der i-ten Zeile von Id das λ-fache der j-ten Zeile.

Was ist $E_{ij}^{-\lambda} E_{ij}^{\lambda} Id$? Umformuliert: Was macht die Multiplikation mit $E_{ij}^{-\lambda}$ mit der Matrix $E_{ij}^{\lambda} Id$?

Dasselbe was sie mit allen anderen Matrizen macht: sie addiert zu der i-ten Zeile von $E_{ij}^{\lambda} Id$ das $(-\lambda)-$fache der j-ten Zeile.

Also addiert die Multiplikation von $E_{ij}^{-\lambda} E_{ij}^{\lambda}$ mit Id zuerst zur $i-$ten Zeile das λ-fache der j-ten Zeile und dann zur i-ten Zeile des Ergebnisses das $-\lambda$-fache der(selben) j-ten Zeile. Deswegen ändert die Multiplikation mit $E_{ij}^{-\lambda} E_{ij}^{\lambda}$ die Matrix Id nicht.

Also ist $E_{ij}^{-\lambda} E_{ij}^{\lambda} Id = Id$ und deswegen $E_{ij}^{-\lambda} E_{ij}^{\lambda} = Id$.

Satz 16 *Jede nichtausgeartete* $(n \times n)$ *Matrix ist das Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen*

Frage *Kann eine ausgeartete Matrix Produkt von Elementarmatrizen sein?*
Nein! Produkt von nichtausgearteten Matrizen ist nichtausgeartet nach Folgerung 1 aus Satz 15.

Vor dem Beweis

Frage. Was ist $E_{12}^{\lambda}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$?

Ich habe das gerade erklärt: Multiplikation mit E_{12}^{λ} addiert zur $1-$ten Zeile das $\lambda-$fache der $2-$ten Zeile. Dann ist

$$E_{12}^{\lambda}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+\lambda a_{21} & a_{12}+\lambda a_{22} & a_{13}+\lambda a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Frage. Was ist $(E_3^{\mu}E_{12}^{\lambda})\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$?

Wegen Assoziativität ist $(E_3^{\mu}E_{12}^{\lambda})\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$

$$E_3^{\mu}\left(E_{12}^{\lambda}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right) = E_3^{\mu}\begin{pmatrix} a_{11}+\lambda a_{21} & a_{12}+\lambda a_{22} & a_{13}+\lambda a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

[Multiplikation von links mit E_3^{μ} multipliziert die 3-te Zeile mit μ] =

$$\begin{pmatrix} a_{11}+\lambda a_{21} & a_{12}+\lambda a_{22} & a_{13}+\lambda a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \mu a_{31} & \mu a_{32} & \mu a_{33} \end{pmatrix}.$$

Rechnen Sie bitte selbst:

Was ist $(E_2^{1/\mu} E_{23} E_3^{\mu} E_{12}^{\lambda}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$?

Antwort. Das ist $\left(E_2^{1/\mu} \left(E_{23} \begin{pmatrix} a_{11} + \lambda a_{21} & a_{12} + \lambda a_{22} & a_{13} + \lambda a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \mu a_{31} & \mu a_{32} & \mu a_{33} \end{pmatrix} \right) \right) =$

$\begin{pmatrix} a_{11} + \lambda a_{21} & a_{12} + \lambda a_{22} & a_{13} + \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

Die Idee des Beweises

Sei A eine nichtausgeartete Matrix. Es genügt zu zeigen: Man kann sie mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix Id überführen. Tatsächlich, jede elementare Zeilenumformung ist dasselbe wie die Multiplikation mit einer geeigneten Elementarmatrix. Also gibt es Elementarmatrizen $E_1, E_2, ..., E_m$, so dass

$$E_1 E_2 ... E_m A = Id. \qquad (*)$$

Dann ist $E_1 E_2 ... E_m$ die inverse Matrix zu A, also
$A = (E_1 E_2 ... E_m)^{-1} = E_m^{-1} ... E_2^{-1} E_1^{-1}$.
Aber die inverse Matrix einer Elementarmatrix ist auch eine Elementarmatrix. Also ist $A = E_m^{-1} ... E_2^{-1} E_1^{-1}$ ein Produkt von Elementarmatrizen

Wie kann man eine nichtausgeartete Matrix mit Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix Id überführen?

Schritt 1. Mit dem Gauß-Algorithmus kann man eine Matrix in Stufenform bringen. Wir werden zeigen, dass wenn die ursprüngliche Matrix nichtausgeartet ist, dann alle „Stufen“ die Länge 1 haben, also die Stufenform der Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ist,
wobei alle Diagonalelementen $a_{ii} \neq 0$.

Schritt 2. Jetzt benutzen wir die Operationen des Typs 1 um alle Elemente über der Diagonalen auf 0 zu bringen: um z.B. das $(1,2)-$Element auf Null zu bringen, addieren wir zur 1. Zeile das $\left(-\frac{a_{12}}{a_{22}}\right)-$fache der zweiten Zeile. Wir machen dies für alle Elemente über der Diagonalen', d.h. $(i,j)-$Plätze mit $i < j$. Wir bekommen dann die Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Schritt 3. Mit Operationen von Typ 2 (Multiplizieren der $i-$ten Zeile, $i = 1, ..., n$, mit einem geeigneten Skalar; in unserem Fall mit $\frac{1}{a_{ii}}$) bekommen wir die Einheitsmatrix.

Beispiel in D3

Schritt 1. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Vertausche die erste und die dritte Zeile} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$\text{Subtrahiere das doppelte der ersten Zeile von der zweiten} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$\text{Subtrahiere das dreifache der ersten Zeile von der dritten} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$\text{Vertausche die zweite und die dritte Zeile und multipliziere diese mit } -1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die Matrix ist in Stufenform; wir sehen, dass die Diagonalelemente nicht 0 sind (wie gesagt ist dies immer der Fall, wenn die ursprungliche Matrix nichtausgeartet ist.)

Schritt 2 $\text{Subtrahiere das doppelte der zweiten Zeile von der ersten} \longrightarrow$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Addiere das achtfache der dritten Zeile zur ersten} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$\text{Subtrahiere das fünffache der dritten Zeile von der zweiten} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$ wie wir wollten.

Schritt 3 Fällt in diesem Bsp. weg, weil wir bereits die Einheitsmatrix bekommen haben. Das ist Zufall; in der Regel liefert Schritt 2 nur eine Diagonalmatrix und man muss noch mit Operationen vom Typ 2 (Zeilen mit Skalaren multiplizieren) die Diagonalelemente auf 1 bringen.

Beweis von Satz 16

.

Aus Satz 2 (Gauß) folgt: Jede Matrix kann man auf Stufenform mit Hilfe von endlich vielen elementaren Zeilenumformungen bringen. Wir wissen, dass jede elementare Zeilenumformung mit der Matrix dasselbe macht wie eine Multiplikation von links mit einer geeigneten Elementarmatrix. Also existieren (sagen wir k) Elementarmatrizen $E_1, ..., E_k$ sodass

$$A^{(k)} = E_1 ... E_k A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & \dots & a_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

(Da die Matrix eine $(n \times n)-$Matrix in Stufenform ist, sind alle Elemente unter der Diagonalen gleich 0.)

Da die Matrix A nichtausgeartet ist, ist auch die Matrix $A^{(k)}$ nichtausgeartet. Denn nach Folg. 1 aus Satz 15 ist

$A^{(k)} = \underbrace{E_1 ... E_k \cdot A}_{\text{Produkt von nichtausg. Matrizen}}$, also eine nichtausgeartete Matrix.

Wir haben bewiesen, dass Elementarmatrizen $E_1, ..., E_k$ existieren, sodass $A^{(k)} := E_1...E_k \cdot A$ die Form $\begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & \dots & a_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$ hat; ferner wissen wir, dass $A^{(k)}$ nichtausgeartet ist.

Wir zeigen jetzt, dass die Elemente $a_{ii}^{(k)}$ auf der Diagonale $\neq 0$ sind.

Widerspruchsbeweis. Angenommen das i-te Element auf der Diagonalen von $A^{(k)}$ ist gleich 0. Wir betrachten die Vektoren $A^{(k)}e_j$, wobei $j \leq i$ (also die ersten i Spalten von $A^{(k)}$). Nur die ersten $i-1$ Einträge von diesen Vektoren können ungleich 0 sein, weil die letzten $n-i+1$ Einträge der ersten i Spalten gleich 0 sind. Dann sind die Vektoren $A^{(k)}e_j$ (wobei $j \leq i$) Linearkombinationen der Vektoren $e_1, ..., e_{i-1}$. Dann ist $dim(Span(\{A^{(k)}e_j,\ j = 1, .., i)) \leq i-1$. Folglich sind die Vektoren $A^{(k)}e_j$ linear abhängig nach Folg (a) aus dem Austauschsatz, was nach Satz 15 unmöglich ist (weil $A^{(k)}$ nichtausgeartet ist). Der Widerspruch zeigt, dass alle Diagonalelemente $a_{ii}^{(k)} \neq 0$ sind.

Schritt 2 Wir wollen jetzt die Elemente über der Diagonalen mit Hilfe einer Multiplikation von links mit Elementarmatrizen E_{ij}^{λ}, also mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen vom Typ 1, auf 0 bringen.

Um ein Element $a_{ij}^{(k)}$ (wobei $i < j$) auf Null zu bringen, multiplizieren wir die Matrix mit E_{ij}^{λ} , wobei $\lambda = -\frac{a_{ij}^{(k)}}{a_{jj}^{(k)}}$. Diese Multiplikation addiert zur i-ten Zeile die j-te Zeile der Matrix $A^{(k)}$ und ändert die Elemente unter der Diagonalen der Matrix nicht. Auf dem Platz (i, j) des Ergebnisses steht $a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ij}^{(k)}}{a_{jj}^{(k)}} a_{jj}^{(k)} = 0$. Wir tun das zuerst für die zweite Spalte, dann für die dritte u.s.w.

Wir bekommen eine Matrix bei der nur die Elemente auf der Diagonalen von 0 verschieden sind (man bemerke, dass die Elemente auf der Diagonalen dieselben wie in der Matrix $A^{(k)}$ und deswegen nicht 0 sind.)
Also existieren Elementarmatrizen $E_1, ..., E_m$, sodass $A^{(m)} := E_1....E_m \cdot A$ Diagonalform hat,

$$A^{(m)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & \dots & 0 \\ \vdots & & 0 \\ 0 & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Schritt 3. Mit Hilfe einer Multiplikation mit geeigneten E_i^{λ} können wir auch die Elemente auf der Diagonalen zu 1 machen. Wir bekommen die Id Matrix, also
$E_1 E_2 ... E_r A = Id$. □

Beispiel zum Beweis/ Konstruktion der inversen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix} \qquad E_{31}^{1}E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12} = \begin{pmatrix} 22 & 10 & -11 \\ 13 & -6 & -6 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{12}^{-1}E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{3}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_{12}^{-1}E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12} = \begin{pmatrix} 9 & -4 & -5 \\ 13 & -6 & -6 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{1}^{1/2}E_{2}^{1/3}E_{12}^{-1}E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_{1}^{1/2}E_{2}^{1/3}E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12} = \begin{pmatrix} 9/2 & -2 & -5/2 \\ 13/3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Also ist die inverse Matrix $E_{1}^{1/2}E_{2}^{1/3}E_{12}^{-1}E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}Id$

Also haben wir die inverse Matrix zur $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ konstruiert: sie ist $A^{-1} = E_1^{1/2} E_2^{1/3} E_{12}^{-1} E_{13}^{-11} E_{23}^{-6} E_{32}^{-2} E_{31}^{1} E_{12}$ (wir haben sie auch ausgerechnet; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 9/2 & -2 & -5/2 \\ 13/3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, aber diese lange Formel ist nützliche für uns.)

Dann können wir sie invertieren: da $(A^{-1})^{-1} = A$ nach rechnenregeln (direkt nach Folg. 1 aus Satz 15).

$$A = (A^{-1})^{-1} = \left(E_1^{1/2} E_2^{1/3} E_{12}^{-1} E_{13}^{-11} E_{23}^{-6} E_{32}^{-2} E_{31}^{1} E_{12} \right)^{-1}$$

$$= E_{12} E_{31}^{-1} E_{32}^{2} E_{23}^{6} E_{13}^{11} E_{12}^{1} E_2^{3} E_1^{2}$$

Methode der Elementarmatrizen zum Berechnen der inversen Matrix

Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Die Idee: um mit dem Gauß-Algorithmus die Zerlegung von A in ein Produkt von Elementarmatrizen zu bekommen, haben wir Elementarmatrizen $E_1, ..., E_r$ gefunden, sodass $E_1 ... E_r \cdot A = Id$. Dann ist das Produkt $E_1 ... E_r$ gleich der inversen Matrix von A.

Die Matrizen $E_1, ..., E_r$ entsprechen den elementaren Zeilenoperationen, die wir durchgeführt haben, um aus A die Einheitmatrix zu bekommen. Wenn wir dieselben Zeilenoperationen in derselben Reihenfolge auf Id anwenden, bekommen wir die Matrix $E_1 ... E_r$, also die zu A inverse Matrix.

Algorithmus. Schreibe die Matrix Id neben A.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

Mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen überführen wir die Matrix A in Id. Jede elementare Zeilenumformung wird auch auf der rechten Seite angewendet. Wenn links Id steht, steht rechts A^{-1}.

Bsp: Invertiere die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$ Zeile II:= Zeile II- 2(Zeile I)

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$ Zeile I:= Zeile I -2 (Zeile II)

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$ Rechts steht die inverse Matrix zu A.

Wir machen es für $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Vertausche die erste und die dritte Zeile

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Subtrahiere das doppelte der ersten Zeile von der zweiten

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Subtrahiere das dreifache der ersten Zeile von der dritten

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Vertausche die zweite und die dritte Zeile und multipliziere diese mit -1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Subtrahiere das doppelte der zweiten Zeile von der ersten

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -8 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Addiere das achtfache der dritten Zeile zur ersten $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 8 & -21 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$

Subtrahiere das fünffache der dritten Zeile von der zweiten $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 8 & -21 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -5 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$

Links steht Id, also steht rechts A^{-1}. Also $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -21 \\ -1 & -5 & 13 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$