

Lernziele der 7. Woche: Die Studierenden sollen ...

- ▶ ... die (abstrakte) Definition der Determinantenabbildung verstehen und die grundlegenden Eigenschaften der Determinantenabbildung (D4–D6) herleiten können.
- ▶ ... die Determinante von Matrizen mithilfe von Elementarzeilenumformungen berechnen können.
- ▶ ... die Determinante von Matrizen durch eine Kombination von Elementarzeilenumformungen und Entwicklungssätzen berechnen können.
- ▶ ... die Formeln für die Determinanten von 2×2 - und 3×3 -Matrizen anwenden können.
- ▶ ... die Determinante von Dreiecksmatrizen berechnen können.
- ▶ ... die inverse Matrix mithilfe der Leibniz-Kramer-Formel konstruieren können.

Abschnitt: Determinante

Bezeichnung Die i -te Zeile werden wir mit $[a_i]$ bezeichnen. Die Null-Zeile

werden wir mit $\mathbf{0}$ bezeichnen. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$.

Def. Eine Abbildung $\det : \text{Mat}(n, n) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine **Determinantenabbildung**, falls die folgende Eigenschaften erfüllt sind

D1 Eine Determinante ist linear in jeder Zeile, d.h.

$$\det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] + [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \quad ; \quad \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ \lambda [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

D2 (Eine Determinante ist alternierend): Stimmen zwei Zeilen der Matrix A überein, so ist $\det(A) = 0$.

D3 (Eine Determinante ist normiert): $\det(\text{Id}) = 1$

Fragen Existiert solche Funktion? Ist sie eindeutig? Wie kann man sie ausrechnen?

Satz 17

Sei $\det : M(n, n) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Determinantenabbildung. Dann gilt für alle $A, B \in \text{Mat}(n, n)$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$:

D4 Ist eine Zeile von A gleich $\mathbf{0}$, so ist $\det(A) = 0$.

D5 Entsteht B aus A durch Vertauschung zweier Zeilen, so ist $\det(B) = -\det(A)$.

D6 Entsteht B aus A durch Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen, so ist $\det(B) = \det(A)$.

Beweis für (D4):

$$\det(A) =_{\det} \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ 0 \cdot \mathbf{0} \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \stackrel{\text{Linearität}}{=} 0 \cdot \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = 0$$

Beweis für (D5):

$$0 \stackrel{(D2)}{=} \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] + [a_j] \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \vdots \\ [a_i] + [a_j] \leftarrow j\text{-te Zeile} \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \stackrel{\text{Linearität}}{=} \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_i] + [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_i] + [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\text{Linearität}}{=} \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \stackrel{(D2)}{=} 0 + \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + 0;$$

$$0 + \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + 0; \quad \text{Also } \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

□

Beweis für (D6)

$$\det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] + \lambda [a_j] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \leftarrow j\text{-te Zeile} \end{array} \stackrel{\text{Linearität}}{=} \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + \lambda \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \stackrel{(D2)}{=} \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + \lambda 0$$



Folgerung Sind die Zeilen von $A \in \text{Mat}(n, n)$ linear ~~un~~abhängig, so ist $\det(A) = 0$.

Beweis. Angenommen $\sum_{i=1}^n \lambda_i [a_i] = \mathbf{0}$, wobei nicht alle λ_i gleich 0 sind. OBdA ist dann $\lambda_1 \neq 0$, sonst die Zeilen vertauschen. Dann ist

$[a_1] = -\sum_{i=2}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_1} [a_i]$, also

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} -\sum_{i=2}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_1} [a_i], \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \stackrel{\text{Linearität}}{=} -\sum_{i=2}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \det \begin{pmatrix} [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \stackrel{\text{(D2)}}{=} \sum_{i=2}^n 0 = 0$$



Die Eigenschaften (D1–D6) erlauben uns, Determinanten von einigen Matrizen auszurechnen

$$\begin{aligned} \text{Bsp. } \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} &\stackrel{\text{(D6); } Z2 := Z2 - 2 Z1}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{(D1); } Z2 := (-1) \cdot Z2}{=} \\ -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\stackrel{\text{(D6); } Z1 := Z1 - 2 Z2}{=} -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{(D3)}}{=} -1. \end{aligned}$$

Bsp. $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 0$. In der Tat, die Zeilen der Matrix sind linear abhängig:

$$-Z1 + 2 \cdot Z2 - Z3 = -[1, 2, 3] + 2 \cdot [4, 5, 6] - [7, 8, 9] = [0, 0, 0].$$

Dann ist $\det = 0$ nach Folgerung aus Satz 17.

Wiederh. — Schwächere Version von Wicht. Anw. der 1. Dimensionsformel; Vorl. 9 Sei $f : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus, $\dim(V) = n < \infty$. Dann gilt:

$$f \text{ ist injektiv} \iff f \text{ ist ein Isomorphismus.}$$

Hilfssatz \Rightarrow Wicht. Anw. 1. Dimensionsformel

$f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist kein Isomorphismus $\iff \exists x \in \mathbb{R}^n, x \neq \vec{0}$ s.d. $Ax = \vec{0}$

Beweis. In der Tat, nach Lemma 11(c) ist f_A genau dann injektiv, wenn $\text{Kern}_A = \{\vec{0}\}$, also wenn kein $x \neq \vec{0}$ existiert mit $Ax = \vec{0}$.

Also wenn ein solches x existiert, dann ist f_A kein Isomorphismus.

Wenn f_A kein Isomorphismus ist, dann ist f_A nicht injektiv. In der Tat, f_A ist nicht injektiv oder nicht surjektiv; aber nach **Wicht. Anw. 1.**

Dimensionsformel gilt

$$f_A \text{ injektiv} \iff f_A \text{ surjektiv.}$$

Wenn f_A nicht injektiv ist, dann ist $\text{Kern}_A \stackrel{\text{Lem. 11(c)}}{\neq} \{\vec{0}\}$, also $\exists x \neq \vec{0}$ mit $Ax = \vec{0}$.

Satz 18 *Ist A ausgeartet, so ist $\det(A) = 0$*

Bemerkung. Wir werden heute auch beweisen (Lemma 20), dass aus $\det(A) = 0$ folgt, dass A ausgeartet ist.

Satz 18 Ist A ausgeartet, so ist $\det(A) = 0$

Beweis. Sei $A \in \text{Mat}(n, n)$ ausgeartet. $\xrightarrow{\text{Hilfssatz}}$ es gibt ein

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } Ax = \vec{0}. \text{ OBdA ist } x_1 \neq 0.$$

Wir betrachten $\text{Mat}(1, n) = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{R}\}$ und

$$f : \text{Mat}(1, n) \rightarrow \text{Mat}(1, n), \quad f(y) := yA = (y_1, \dots, y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung f ist offensichtlich linear. Wir zeigen: f ist kein Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, \dots, y_n)$ mit $yA = (1, 0, \dots, 0)$.

Dann ist

$$(y_1, \dots, y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{cases} (0), \text{ weil } Ax = \vec{0} \\ (x_1) \neq (0), \text{ weil } (y_1, \dots, y_n)A = (1, 0, \dots, 0) \\ \text{und } (1, 0, \dots, 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1) \end{cases} \quad \text{Der}$$

Widerspruch zeigt, dass f kein Isomorphismus ist. $\xrightarrow{\text{Hilfssatz}}$ Es gibt ein

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq \mathbf{0} \text{ mit } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda_1 [a_1] + \dots + \lambda_n [a_n] = \mathbf{0}$$

Folgerung $\xrightarrow{\implies} \det(A) = 0.$



Ziel: zu zeigen, dass eine Determinantenfunktion (falls sie existiert) eindeutig ist

Frage 1 Angenommen, wir kennen $\det(A)$. Was ist $\det(E_{ij}A)$, $\det(E_{ij}^\lambda A)$, $\det(E_i^\lambda A)$?

Antwort: Sei A eine Matrix. Wir wissen (Vorl. 12), dass eine Multiplikation von links mit E_{ij} die i -te und die j -te Zeile der Matrix A vertauscht.

Die Matrix $B := E_{ij}A$ entsteht also aus A durch Vertauschung der i -ten und j -ten Zeile. Nach (D5) aus Satz 17 ist

$\det(B) = \det(E_{ij}A) = -\det(A)$. Wenn wir also $\det(A)$ kennen, kennen wir auch $\det(E_{ij}A)$.

Analog für die zwei weiteren Typen von Elementarmatrizen:

$$\det(E_{ij}^\lambda A) \stackrel{(D6)}{=} \det(A),$$

$$\det(E_i^\lambda A) \stackrel{(D1)}{=} \lambda \det(A).$$

Außerdem gilt: ist $\det(A) \neq 0$, so sind $\det(E_{ij}A)(= \pm \det(A))$, $\det(E_{ij}^\lambda A)(= \det(A))$, $\det(E_i^\lambda A)(= \lambda \cdot \det(A))$ auch nicht 0; man bemerke hier, dass λ in E_i^λ nicht 0 ist.

Frage 2. Was ist $\det(E_{ij})$, $\det(E_{ij}^\lambda)$, $\det(E_i^\lambda)$?

Antwort. Wir wissen, dass $\det(E_{ij}) = \det(E_{ij} \cdot Id)$. Außerdem wissen wir, dass $\det(Id) \stackrel{(D3)}{=} 1$. Oben haben wir gesehen, dass $\det(E_{ij}A) = -\det(A)$ für $i \neq j$ und $\det(E_{ii}A) = \det(A)$. Für die Matrix $A = Id$ und $i \neq j$ haben wir $\det(E_{ij}) = \det(E_{ij} \cdot Id) = -\det(Id) \stackrel{(D3)}{=} -1$.

Analog für die zwei weiteren Typen von Elementarmatrizen:

$$\det(E_{ij}^\lambda) = \det(E_{ij}^\lambda Id) \stackrel{\text{s.o.}}{=} \det(Id) \stackrel{(D3)}{=} 1.$$

$$\det(E_i^\lambda) = \det(E_i^\lambda Id) \stackrel{\text{s.o.}}{=} \lambda \det(Id) \stackrel{(D3)}{=} \lambda.$$

Antworten auf Fragen 1,2 als Rechenregeln

Rechenregeln: Für jede Matrix $A \in \text{Mat}(n, n)$ gilt:

- ▶ $\det(E_{ij}^\lambda A) = \det(A)$,
- ▶ $\det(E_i^\lambda A) = \lambda \cdot \det(A)$
- ▶ $\det(E_{ij} A) = -\det(A)$ für $i \neq j$ und $\det(E_{ii} A) = \det(A)$

Daraus folgt (Antwort auf Frage 2; für A setzen wir Id ein und benutzen, dass nach (D3) $\det(Id) = 1$ ist):

- ▶ $\det(E_{ij}^\lambda) = 1$,
- ▶ $\det(E_i^\lambda) = \lambda$
- ▶ $\det(E_{ij}) = -1$ für $i \neq j$ und $\det(E_{ii}) = 1$

Wir kombinieren diese zwei Antworten in einem Lemma:

Lemma 19. Für jede Matrix A und für jede Elementarmatrix E gilt:
 $\det(EA) = \det(E) \cdot \det(A)$.

Lemma 20 (Eindeutigkeit der Determinante) *Es gibt höchstens eine Determinantenabbildung. Ferner gilt: ist $A \in \text{Mat}(n, n)$ nichtausgeartet, so ist $\det(A) \neq 0$*

Beweis. Ist A ausgeartet, so ist $\det(A) \stackrel{\text{Satz 18}}{=} 0$. Ist A nichtausgeartet, so kann man A in ein Produkt von Elementarmatrizen zerlegen (Satz 16):
 $A = E_1 \dots E_{m-1} E_m \text{Id}$.

Durch mehrfache Anwendung von Lemma 19 bekommen wir:

$$\det(A) = \det(E_1 E_2 E_3 \dots E_m) \stackrel{\text{Lem. 19}}{=} \det(E_1) \cdot \det(E_2 E_3 \dots E_m) \stackrel{\text{Lem. 19}}{=} \\ \det(E_1) \cdot \det(E_2) \det(E_3 \dots E_m) = \dots = \det(E_1) \cdot \det(E_2) \cdot \det(E_3) \cdot \dots \cdot \det(E_m).$$

Aber die Determinanten der Elementarmatrizen sind eindeutig bestimmt; siehe vorherige Folie. Dann sind alle Faktoren im Produkt

$\det(A) = \det(E_1) \cdot \det(E_2) \cdot \det(E_{m-1}) \cdot \dots \cdot \det(E_m)$ eindeutig bestimmt; also ist $\det(A)$ auch eindeutig bestimmt, □

Folgerung. Für $A = E_1 \dots E_m$ (wobei E_i Elementarmatrizen sind) gilt:
 $\det(A) = \det(E_1) \cdot \dots \cdot \det(E_m)$.

Bemerkung. Bis jetzt wissen wir nicht, ob eine Determinantenfunktion existiert – Lemma 20 sagt uns, dass falls sie existiert, sie eindeutig ist (d.h. es könnte keine zwei verschiedenen Funktionen $\det, \det' : \text{Mat}(n, n) \rightarrow \mathbb{R}$ geben, die die Bedingungen (D1), (D2), (D3) erfüllen).

Bsp. zum Beweis von Lemma 20

In Vorl. 11 haben wir eine Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ in ein Produkt von Elementarmatrizen gefunden:

$$A = E_{12} E_{31}^{-1} E_{32}^2 E_{23}^6 E_{13}^{11} E_{12}^1 E_2^3 E_1^2.$$

Wir zeigen, dass diese Zerlegung uns erlaubt, $\det(A)$ zu berechnen: nach Folgerung aus Lem. 19 gilt:

$$\det(A) = \underbrace{\det(E_{12})}_{-1} \underbrace{\det(E_{31}^{-1})}_{1} \underbrace{\det(E_{32}^2)}_{1} \underbrace{\det(E_{23}^6)}_{1} \underbrace{\det(E_{13}^{11})}_{1} \underbrace{\det(E_{12}^1)}_{1} \underbrace{\det(E_2^3)}_{3} \underbrace{\det(E_1^2)}_{2} = -6$$

Wir haben gesehen, dass die Eigenschaften (D1), (D2), (D3) (und (D4), (D5), (D6) sowie Lemma 19, die aus (D1), (D2), (D3) folgen)

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ eindeutig bestimmen!!!}$$

Satz 19 $A, B \in \text{Mat}(n, n)$. Dann ist $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Beweis. 2 Fälle: A ausgeartet und A nichtausgeartet.

Fall 1 Sei A ausgeartet. $\xrightarrow{\text{Hilfssatz}}$ f_A ist keine Surjektion. Dann ist $f_A \circ f_B$ auch keine Surjektion (weil ein $v \in \mathbb{R}^n$, das nicht in der Form $f_A(u)$ darstellbar ist, auch nicht in der Form $f_A(f_B(w))$ darstellbar ist.)

Dann ist AB ausgeartet nach Satz 15

$$\xrightarrow{\text{Satz 18}} \det(AB) = 0 = \underbrace{\det(A)}_{=0} \det(B), \quad \square.$$

Fall 2 Sei A nichtausgeartet. $\xrightarrow{\text{Satz 16}}$ $A = E_1 E_2 \dots E_m$.

$$\begin{aligned} \text{Dann ist } \det(AB) &= \det(E_1 E_2 \dots E_m B) = \det(E_1) \det(E_2 \dots E_m B) = \\ &= \det(E_1) \det(E_2) \det(E_3 \dots E_m B) = \dots \end{aligned}$$

$$= \underbrace{\det(E_1) \det(E_2) \dots \det(E_m)}_{\det(A)} \det(B) = \det(A) \det(B), \quad \square$$

$\det(A)$ nach Folg. aus Lem. 19

Satz 20 Es gibt genau eine Determinantenabbildung

Beweis. Eindeutigkeit ist bewiesen (Lemma 20). Wir zeigen Existenz.
Induktion nach n .

I.A. $n = 1$. $Mat(1, 1) = \{(x), \text{ wobei } x \in \mathbb{R}\}$. Definiere $det((x)) := x$.
Die Eigenschaften (D1), (D2), (D3) sind erfüllt.

I.V. Es gibt eine Determinantenabbildung $det : Mat(n-1, n-1) \rightarrow \mathbb{R}$.

I.S. Z.z.: Es gibt eine Determinantenabbildung $det : Mat(n, n) \rightarrow \mathbb{R}$.
Sei $A \in Mat(n, n)$. Wir wählen ein $j \in \{1, \dots, n\}$ und setzen

$$det(A) := \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

, **Laplace-Spaltenentwicklung**

wobei A_{ij}^{Str} diejenige $(n-1) \times (n-1)$ Matrix bezeichne, welche durch Streichen der i -ten Zeile und der j -ten Spalte entsteht.

$$A_{ij}^{Str} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\ j-1} & a_{1j} & a_{1\ j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\ 1} & \dots & a_{i-1\ j-1} & a_{i-1\ j} & a_{i-1\ j+1} & \dots & a_{i-1\ n} \\ a_{i+1\ 1} & \dots & a_{i+1\ j-1} & a_{i+1\ j} & a_{i+1\ j+1} & \dots & a_{i+1\ n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\ j-1} & a_{nj} & a_{n\ j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Bsp: Laplace-Spaltenentwicklung für $n = 2$

$$\det(A) := \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}^{Str}),$$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$j \stackrel{\text{z.B.}}{=} 2$

$$\det(A) = (-1)^{1+2} a_{12} \det(A_{12}^{Str}) + (-1)^{2+2} a_{22} \det(A_{22}^{Str}) = -a_{12} a_{21} + a_{22} a_{11}$$

$$\det(A_{12}^{Str}) = a_{21}; \quad \det(A_{22}^{Str}) = a_{11};$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Mnemonicische Regel: \det einer (2×2) Matrix ist das Produkt der Diagonalelemente minus das Produkt der Antidiagonalelemente.

Bsp: Determinante einer (3×3) Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad j \stackrel{\text{z.B.}}{=} 1$$

$$\begin{aligned} \det(A) &\stackrel{\text{Folgerung}}{=} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}^{\text{Str}}) = \\ &(-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}^{\text{Str}}) + (-1)^{2+1} a_{21} \det(A_{21}^{\text{Str}}) + (-1)^{3+1} a_{31} \det(A_{31}^{\text{Str}}) = \\ &(-1)^2 a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) + (-1)^3 a_{21} (a_{12} a_{33} - a_{32} a_{13}) + \\ &(-1)^{3+1} a_{31} (a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13}) = \end{aligned}$$

$$a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{21} a_{12} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}$$

Mnemonicische Regel von Sarrus (Rechenverfahren)

Dabei schreibt man die ersten beiden Spalten der Matrix rechts neben die Matrix und bildet Produkte von je 3 Zahlen, die durch die schrägen Linien verbunden sind. Dann werden die nach unten verlaufenden Produkte addiert und davon die nach oben verlaufenden Produkte subtrahiert. Man erhält auf diese Weise die Determinante von A:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\ & \backslash & & \times & & \times & & / & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\ & / & & \times & & \times & & \backslash & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32} \end{array}$$

Z.z.: $\det(A) := \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}^{Str})$ erfüllt die Eigenschaften (D1)–(D3).

D1 \tilde{A} entstehe aus A durch Multiplikation der k -ten Zeile mit λ . Vor dem Multiplizieren:

$$\det(A) := (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A_{kj}^{Str}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}^{Str})$$

Nach dem Multiplizieren:

$$\begin{aligned} \det(\tilde{A}) &:= (-1)^{k+j} \underbrace{\tilde{a}_{kj}}_{\lambda a_{kj}} \underbrace{\det(\tilde{A}_{kj}^{Str})}_{\det(A_{kj}^{Str})} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (-1)^{i+j} \underbrace{\tilde{a}_{ij}}_{a_{ij}} \underbrace{\det(\tilde{A}_{ij}^{Str})}_{\lambda \det(A_{ij}^{Str})} \\ &= \lambda \det(A) \end{aligned}$$

Die Additivität zeigt man analog.

Beweis (D2)

Angenommen, die k -te und die m -te Zeile von A stimmen überein ($k < m$); Z.z: $\det(A) = 0$. Wir haben

$$\begin{aligned} \det(A) &:= (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A_{kj}^{Str}) + (-1)^{m+j} a_{mj} \det(A_{mj}^{Str}) + \\ &+ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq m}}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}^{Str}) \stackrel{(D2)}{=} \end{aligned}$$

$$(-1)^{k+j} a_{kj} \det(A_{kj}^{Str}) + (-1)^{m+j} a_{mj} \det(A_{mj}^{Str}) + 0 \quad (*)$$

Da die k -te und die m -te Zeile gleich sind, ist $a_{kj} = a_{mj}$. Da A_{kj}^{Str} aus A_{mj}^{Str} durch $m - k - 1$ Zeilenvertauschungen hervorgeht. Also

$\det(A_{kj}^{Str}) = (-1)^{m-k-1} \det(A_{mj}^{Str})$. Dann ist (*) gleich

$$((-1)^{k+j+m-k-1} + (-1)^{m+j}) \det(A_{mj}^{Str}) =$$

$$((-1)^{j+m-1} + (-1)^{m+j}) \det(A_{mj}^{Str}) = 0$$

Beweis (D3)

Für $A = Id$ ist

$$\det(Id) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}^{Str})$$

$$\text{mit } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

Also aus der Summe $\sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}^{Str})$ ist nur i -te Summande nicht 0; deswegen $\det(Id) = (-1)^{i+i} \det(Id) = 1$. □

Folgerung (Spaltenentwicklungssatz von Laplace) Für jedes $A \in Mat(n, n)$ gilt

$$(D7) \quad \det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}^{Str}) \quad (*),$$

Beweis: Es gibt nur eine Determinantenabbildung (Lemma 20) und wir haben sie mit Hilfe von (*) konstruiert, □

Weitere Anwendungen der Laplace-Spaltenentwicklung

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \stackrel{\text{Spaltenentw. j=1}}{=} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1}^{Str})$$

nur $a_{11} \neq 0$

$$\stackrel{=}{=} a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Wiederh. — **Satz 18** Ist A ausgeartet, so ist $\det(A) = 0$

Wiederh. — **Lemma 20 (Zweite Aussage)** Ist $A \in \text{Mat}(n, n)$ nichtausgeartet, so ist $\det(A) \neq 0$

Folgerung. Für jede $(n \times n)$ -Matrix gilt:
 A ist ausgeartet $\iff \det(A) = 0$

Satz 21 *(D1)' Determinantenabbildung ist linear in den Spalten:*

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} + b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} + b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \lambda a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \lambda a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

Beweis: Wir benutzen die Laplace-Spaltenentwicklung

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}^{Str}),$$

Nach Multiplikation der j -ten Spalte mit λ wird jedes a_{ij} mit λ multipliziert. $\det(A_{ij}^{Str})$ bleibt unverändert. Dann wird die Determinante mit λ multipliziert. Ähnlich mit der Addition, □

Wiederholung – Def. Sei A eine $(m \times n)$ -Matrix,

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ Die **transponierte** Matrix A^t ist die folgende

$(n \times m)$ Matrix: $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, d.h. an der Stelle (i, j) von A^t steht das (j, i) -Element von A .

Bsp. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bemerkung Für quadratischen Matrizen ist transponieren gleichbedeutend mit einer Spiegelung an der Hauptdiagonalen.

$$M = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{---} \rightarrow \text{Hauptdiagonale} \\ \text{---} \rightarrow \text{Nebendiagonale} \end{array} \quad M^T = \begin{pmatrix} 11 & 21 & 31 \\ 12 & 22 & 32 \\ 13 & 23 & 33 \end{pmatrix}$$

Bemerkung $(A^t)^t = A$

Bemerkung Die i -te Spalte von A^t ist die i -te Zeile von A ; die j -te Zeile von A^t ist die j -te Spalte von A (falls $A \in \text{Mat}(m, n)$, dann $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$).

$$M = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix} \quad M^T = \begin{pmatrix} 11 & 21 & 31 \\ 12 & 22 & 32 \\ 13 & 23 & 33 \end{pmatrix}$$

Satz 22 Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Dann gilt: $\det(A) = \det(A^t)$.

Beweis. Wir definieren die folgende Abbildung $\widetilde{\det} : \text{Mat}(n, n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$,
 $\widetilde{\det}(A) := \det(A^t)$. Wir zeigen: die Abbildung ist die
Determinantenabbildung. Z.z.: Die Abbildung erfüllt Eigenschaften (D1),
(D2), (D3):

(D1), weil die Abbildung \det linear in den Spalten ist (Satz 21, (D1)'),
D2, weil eine Matrix deren zwei Spalten gleich sind, ausgeartet ist (Satz
15). Und deswegen ist die Determinante gleich Null (Satz 18).

D3, weil $Id^t = Id$.

Nach Lemma 20 (Eindeutigkeit) ist $\widetilde{\det} = \det$. □

Folgerung Die Determinantenabbildung hat die folgenden Eigenschaften
für jedes $A \in \text{Mat}(n, n)$

(D5)' nach der elementaren Spaltenumformung (S3) (zwei Spalten
vertauschen) wird die Determinante mit (-1) multipliziert,

(D6)' die elementare Spaltenumformung (S1) (λ - faches einer Spalte zur
einer anderen addieren) ändert die Determinante nicht.

(D7)' (Laplace-Zeilentwicklungssatz) $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{j+i} a_{ji} \det(A_{ji}^{\text{Str}})$,

Beweis: Zuerst transponieren, dann Eigenschaften (D5), (D6), (D3),
(D7) anwenden, □

$$\text{Bsp } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Determinante mit dem Entwicklungssatz,
Entwicklung nach Zeile 3:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$(-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot (-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$(-1)^{3+3} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{3+4} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$0 + 1(0 + 12 + 2 - 1 + 4 - 0) + 2(0 - 8 + 6 - 3 + 12) - 2(-3 - 2 + 18 - 9 + 3 + 4) =$$

$$17 + 14 - 22 = 9$$

Die Determinante einer Dreiecksmatrix

Eine schöne Anwendung der Entwicklungsformel ist:

Lemma 21 Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1\ n-1} & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ eine obere

Dreiecksmatrix. Dann gilt $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$.

Beweis. Wir verwenden Induktion nach n .

IA: Für $n = 1$ ist alles klar.

IV: Die Aussage gelte für $(n - 1 \times n - 1)$ -Matrizen.

IS: $n - 1 \rightarrow n$. Für $n > 1$ entwickeln wir $\det(A)$ nach der letzten Zeile (also $j = n$ in (D7)') und erhalten $\det(A) = a_{nn} \cdot \det(A_{nn}^{Str})$ (weil außer a_{nn} alle Einträge in der letzten Zeile gleich 0 sind). Dabei ist A_{nn}^{Str} eine $((n - 1) \times (n - 1))$ -Matrix in Dreiecksform, die nach Induktionsvoraussetzung die Determinante $a_{11} \cdots a_{n-1\ n-1}$ hat, \square

Bemerkung. Ein entsprechendes Resultat gilt für untere Dreiecksmatrizen, weil nach Transponieren einer unteren Dreiecksmatrix bekommen wir eine obere Dreiecksmatrix

Effiziente Berechnung von Determinanten (Empfehlungen)

Für (2×2) - Matrizen: mnemonische Regel.

Für (3×3) - Matrizen: mnemonische Regel oder Laplace-Entwicklung.

Für größere n : Durch eine Kombination der Verfahren

- ▶ Elementare Zeilen- bzw. Spaltentransformationen. In diesem Fall protokollieren wir
 1. die Faktoren $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ der verwendeten Multiplikationen von Spalten, wir müssen später durch diesen Zahlen dividieren
 2. die Anzahl t der Spaltenvertauschungen; jede Spaltenvertauschung ändert das Vorzeichen

- ▶ Entwicklung nach Zeilen bzw. Spalten.

formen wir die zu berechnende Determinante solange in eine Summe von Determinantentermen um, bis für die verbleibenden Determinanten der Wert sofort ablesbar ist (wie bei Dreiecksmatrizen) oder aber leicht berechenbar ist (wie bei 2×2 - bzw. 3×3 -Matrizen). Danach berücksichtigen wir die Zahlen λ und t Vorzeichenänderungen.

Beispiel Determinantenberechnung

Zu berechnen ist die Determinante der 3×3 -Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Mit $v'(i, j)$, $m'(i, \lambda)$, $a'(i, j, \alpha)$ bezeichnen wir die Spaltentransformationen "Vertauschen von i -ter und j -ter Spalte", "Multiplikation der i -ten Spalte mit $\lambda \neq 0$ " bzw. "Addition des α -fachen der i -ten Spalte zur j -ten Spalte". Dann gilt

1. $m'(1, \frac{1}{2})$ liefert $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. $a'(1, 2, -3)$ und $a'(1, 3, -5)$ liefern $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & -7 & -12 \end{pmatrix}$.

3. $a'(2, 1, 1)$, $a'(2, 3, -1/2)$ und $m'(2, -1)$ liefern dann $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

Wir haben eine Unterdiagonalmatrix bekommen; deren Determinante ist $1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$.

Protokolle. Keine Spaltenvertauschungen. Zwei Spaltenmultiplikationen mit den Faktoren $1/2$ bzw. -1 . Die Determinante von A ist deswegen

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-1} = -4.$$

Noch ein Bsp

$$\text{Bsp. } \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 12 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Z.1 und Z.2} \\ \text{vertauschen} \\ = \end{array} - \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{array}{l} \text{Z.3} - \text{Z.1} \\ \text{Z.4} - 2 \cdot \text{Z.1} \\ = \end{array} - \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Z.4} - 3 \cdot \text{Z.3} \\ = \end{array}$$

$$- \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Dreiecksform} \\ = \end{array} - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = -4$$

Anwendung der Determinante: Charakterisierung der linearen Unabhängigkeit

Folgerungen aus Satz 15/Satz 18/Lemma 20 Sei

$(a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, a_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix})$ ein n -Tupel von Vektoren des \mathbb{R}^n . Es

gilt:

(a_1, \dots, a_n) ist genau dann linear unabhängig, wenn

$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \neq 0$ ist.

Beweis Nach Satz 15 ist (a_1, \dots, a_n) genau dann linear abhängig,

wenn die Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ausgeartet ist;

Nach Satz 18/Lemma 20 ist die Matrix genau dann ausgeartet,

wenn $\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = 0$,



Die Cramersche Regel

Satz 23 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \text{Mat}(n, n)$ sei invertierbar, $b \in \mathbb{R}^n$. Wir

betrachten das lineare Gleichungssystem
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (\text{in})$$

Matrixform: $Ax = b$. Dann ist die (nach Folg. 3 aus den Satz 15 eindeutige) Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$x_j := \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det(A)} \quad (*)$$

Die Matrix, deren Determinante im Zähler steht, ist wie folgt definiert: Wir haben die j -te Spalte in A mit b ersetzt.

Für den Beweis der Cramerschen Regel führen wir die folgenden Bezeichnungen ein: Für Vektoren $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir die Matrix, deren Spalten die Vektoren a_1, \dots, a_n sind (für jedes i ist die i -te Spalte der Vektor a_i), mit $[a_1, \dots, a_n]$.

Die Cramersche Regel mit der neuen Bezeichnung.

Satz 23 Sei $A \cdot x = b$ ein lineares Gleichungssystem mit invertierbarer Matrix $A = [a_1, \dots, a_n]$.

Der Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ der eindeutig bestimmten Lösung des Systems ist dann gegeben durch

$$x_1 = \frac{\det[b, a_2, \dots, a_n]}{\det(A)}, \dots, x_i = \frac{\det[a_1, \dots, b, \dots, a_n]}{\det(A)}, \dots, x_n = \frac{\det[a_1, \dots, a_{n-1}, b]}{\det(A)}.$$

(In der Formel für x_i steht b in der i -ten Spalte.)

Bemerkenswert ist die Einfachheit des Beweises (dieser folgt unmittelbar!).

Beweis der Cramerschen Regel

Beweis. Die Gleichung

$$x_1 \cdot a_1 + \cdots + x_i \cdot a_i + \cdots + x_n \cdot a_n = b$$

können wir in der Form

$$x_1 \cdot a_1 + \cdots + 1 \cdot (x_i \cdot a_i - b) + \cdots + x_n \cdot a_n = 0$$

schreiben. Die Vektoren

$$a_1, \dots, x_i \cdot a_i - b, \dots, a_n$$

sind daher linear abhängig und es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \det[a_1, \dots, x_i \cdot a_i - b, \dots, a_n] \\ &= x_i \cdot \det[a_1, \dots, a_i, \dots, a_n] - \det[a_1, \dots, b, \dots, a_n], \end{aligned}$$

weswegen $x_i = \frac{\det[a_1, \dots, b, \dots, a_n]}{\det(A)}$ wie wir behauptet haben, □

$$1x_1 + 2x_2 = 3$$

$$4x_1 + 5x_2 = 6$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{3}{-3} = -1 \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{-3} = 2$$

Aufgabe Verwende die Cramersche Regel, um das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ zu lösen. Dabei seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Nach der Regel von Sarrus ist

$$\begin{aligned}\det A &= 1 \cdot (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \\ &= -4 + 6 + 12 + 9 - 2 - 16 \\ &= 5.\end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}\det \left(\vec{b} \left| \begin{array}{cc} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{array} \right. \right) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 0 \cdot 4 \\ &= -4 + 2 + 3 - 2 \\ &= -1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det \left(\begin{array}{cc} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{array} \left| \vec{b} \right. \right) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot 0 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 4 - 1 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= 3 + 6 - 8 - 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det \left(\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} \left| \vec{b} \right. \right) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 2 \\ &= -1 + 4 + 3 - 4 \\ &= 2.\end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich also

$$\mathbf{x} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Anwendung der Determinante: eine Formel für die inverse Matrix

Def. Sei $A \in \text{Mat}(n, n)$. Die Matrix deren (i, j) -Eintrag gleich $(-1)^{i+j} \det(A_{ji}^{\text{Str}})$ heißt die **adjunkte Matrix** (oder **Komatrix**) und wird mit $\text{Co}(A)$ bezeichnet.

Zu beachten: Um die adjunkte Matrix zu bekommen, ersetzen wir zuerst den (i, j) - Eintrag durch $(-1)^{i+j} \det(A_{ji}^{\text{Str}})$ und transponieren danach noch.

Bsp. Sei $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Dann ist $\text{Co}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Bsp.

Für

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

haben wir

$$\begin{aligned} \text{adj}(A) &= \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} b & c \\ h & i \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} a & c \\ g & i \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} a & b \\ g & h \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} ei - hf & fg - di & dh - eg \\ ch - bi & ai - cg & bg - ah \\ bf - ce & cd - af & ae - bd \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} ei - hf & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Satz 24 (Leibnitz – Laplace– Cramer – Formel für die inverse Matrix)

$A \in \text{Mat}(n, n)$ sei nichtausgeartet. Dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Co}(A)$.

Bemerkung. Nach Lemma 20 ist $\det(A) \neq 0$, da A nichtausgeartet ist.

Beweis. Z.z.: $\text{Co}(A)A = \det(A)\text{Id}$. Den (j, i) -Eintrag von $\text{Co}(A)$

bezeichnen wir mit $c_{ji} \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{i+j} \det(A_{ij}^{\text{Str}})$. Nach Definition der Multiplikation von Matrizen ist der (j, k) -Eintrag von $\text{Co}(A)A$ gleich

$$\sum_{i=1}^n c_{ji} a_{ik} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ik} \det(A_{ij}^{\text{Str}}). \quad (*)$$

Für $k = j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung; also sind die Diagonalelemente von $A \text{Co}(A)$ gleich $\det(A)$.

Für $k \neq j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung der Matrix \tilde{A} , wobei \tilde{A} aus A entsteht, indem man die j -te Spalte von A mit der k -ten Spalte ersetzt.

Da \tilde{A} zwei gleiche Spalten hat, ist $\det(\tilde{A}) = 0$ ($(D2)'$).

Also sind die Elemente außerhalb der Diagonalen von $A \text{Co}(A)$ gleich 0. Also $\text{Co}(A)A = \det(A)\text{Id}$, und deswegen $\frac{1}{\det(A)} \text{Co}(A)A = \text{Id}$, □

Inverse zu 2×2 -Matrix

$$\mathbf{Bsp.} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{\det} & -\frac{b}{\det} \\ -\frac{c}{\det} & \frac{a}{\det} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}.$$

Noch ein Bsp

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Zuerst bestimmen wir die Determinante: $\det(A) = 30$

Und dann die 9 Ko-Faktoren: (Beachte: schachbrettartiger Vorzeichenwechsel!)

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \quad C_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 8 \quad C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 16 \quad C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

Also ist die inverse Matrix:

$$M^{-1} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 8 & -4 & -2 \\ -2 & 16 & -3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \frac{2}{15} & \frac{-1}{15} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{15} & \frac{-2}{15} & \frac{-1}{15} \\ \frac{-1}{15} & \frac{8}{15} & \frac{-1}{10} \end{pmatrix}^t$$