Zusätzliche Lernziele der 8. Woche: Die Studierenden sollen ...

- ... beweisen können, dass der Rang einer Matrix der höchsten Dimension ihrer nicht ausgearteten quadratischen Untermatrix entspricht.
- ... die Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen mithilfe der Rangberechnung bestimmen können.

Rank der Matrix ist die grosste Dimension der quadratischen nichtausgearten Untermatrix

Man betrachte eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m,n)$. Seien $i_1 < i_2 < \dots < i_{m'} \in \{1, \dots, m\}$, $j_1 < j_2 < \dots < j_{n'} \in \{1, \dots, n\}$. Dann die zu $i_1, \dots, i_{m'}, j_1, \dots, j_{n'}$ zugeordnete Untermatrix von A ist die $(m' \times n')$ Matrix, deren $(p,q)-$Eintrag ist gleich $a_{i_p j_q}$.

Bsp. A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$, $i_1 = 1$, $i_2 = 3$, $j_1 = 2$, $j_2 = 4$. Dann die zugehörige Untermatrix ist die (2×2)- Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$.

Folgerung 3. Rank der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Beweis. Z.z.:

(i) $rk(A) \leq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

(ii) $rk(A) \geq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Folgerung 3. Rank der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

(i) $rk(A) \leq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Beweis (i): Wir müssen Existenz einer quadratischen Untermatrix der Dimension $rk(A)$ von A, deren Determinante nicht 0 ist, beweisen.
Sei $rk(A) = k$. Da nach Folgerung 2 $rk(A) = dim(span(\{[a_1], ..., [a_m]\}))$, kann man aus $\{[a_1], ..., [a_m]\}$ nach Satz 8 k linear unabhängige Zeilen $[a_{i_1}], [a_{i_2}]..., [a_{i_k}]$ auswählen.

Bsp. In A$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$, kann man z.B. $i_1 = 1$, $i_2 = 3$ setzen.

Sei A' die $(k \times n)$-Untermatrix, deren Zeilen $i_1, ..., i_k$ sind (bzw. Spalten $j_1 = 1, j_2 = 2, ..., j_n = n$). (Im Bsp.: $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \end{pmatrix}$.)Nach Konstruktion ist $rk(A') = k = rk(A)$.

Da $k = rk(A') = dim\left(\text{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} a'_{11} \\ \vdots \\ a'_{k1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a'_{1n} \\ \vdots \\ a'_{kn} \end{pmatrix}\right\}\right)\right)$, kann man aus den Spalten von A' nach Satz 8 k linear unabhängige Spalten (mit Nummern meinetwegen $j_1, ..., j_k$) auswählen. Die entsprechende (quadratische) Untermatrix bezeichnen wir mit A''.

(Im Bsp.: $A'' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$. Nach Konstruktion ist $rk(A'') = k = rk(A)$.)

Wir zeigen: $det(A'') \neq 0$. Tatsächlich, die Spalten von A'' sind linear unabhängig. Dann ist A'' nichtausgeartet, folglich $det(A'') \neq 0$. (i) ist bewiesen.

Beweis (ii)

(ii): $rk(A) \geq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Sei A' eine quadratische nichtausgeartete Untermatrix der Dimension k von A, $i_1, ..., i_k$ bzw. $j_1, ..., j_k$ seien die Nummern der ersprechanedne Zeilen bzw. Spalten. Z.z.: $rk(A) \geq k$.

Angenommen, $rk(A) < k$. Dann sind jede k von Zeilen linear abhängig. Dann gibt es $(\lambda_1, ..., \lambda_k) \neq (0, ..., 0)$mit $\lambda_1[a_{i_1}] + ... + \lambda_k[a_{i_k}] = 0$. Dann sind die Zeilen von A' linear abhängend,was widerspricht, dass die Matrix A' nichtausgeartet ist. $\square$

Weitere Beispiele.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Wir sehen 3 linear unabhängige Spalten; Rang $= 3$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang}(B) = 2$$

Rechnen Sie bitte selbst $rk(A)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem $\begin{cases} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$

(In Matrixform: $Ax = b$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$)

Wiederholung *Die $(m \times n)$ Matrix A heißt die Koeffizientenmatrix des Systems. Die $(m \times (n+1))$-Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ heißt die erweiterte Matrix.*

Bezeichnung *Die erweiterte Matrix für die Gleichung $Ax = b$ werden wir mit (A, b) bezeichnen.*

Satz 27 Man betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. Dann gilt:

(a) **(Lösbarkeitskriterium)** Das System ist genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich dem Rang der erweiterten Matrix ist.

(b) **(Die Menge der Lösungen)** Sei $\tilde{x}$ eine Lösung des Systems. Dann liegt für jede Lösung x der Vektor $x - \tilde{x}$ in $Kern_{f_A}$ und für jedes $v \in Kern_{f_A}$ ist $\tilde{x} + v$ auch eine Lösung. In anderen Worten,die Menge der Lösungen ist

$$\{\tilde{x} + v \ , \quad \text{wobei } \tilde{x} \text{ eine Lösung ist und } v \in Kern_{f_A}\}.$$

Hilfsaussage vor dem Beweis

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A,b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfsaussage $\Longleftarrow$. Sei b eine Linearkombination der Spalten,

d.h. $b = \mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$. Dann besteht

$span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b \right\}\right)$ aus allen Vektoren der Form

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} + \lambda_{n+1} \quad b =$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} + \lambda_{n+1} \left(\mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right)$$

$= (\lambda_1 + \lambda_{n+1}\mu_1) \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + (\lambda_n + \lambda_{n+1}\mu_n) \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$. Dann ist

$span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b \right\}\right) = span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$, also

$rk(A) = rk((A,b))$.

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A,b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*
Beweis der Hilfsaussage $\Longrightarrow$
Die Spalten von A bilden eine erzeugende Menge in
$span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1}\end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn}\end{pmatrix}\right\}\right)$. Nach Satz 9 kann man aus den Spalten von A eine Basis B' von $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1}\end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn}\end{pmatrix}\right\}\right)$ auswählen, nach Def. ist die Anzahl der Elemente in der Basis gleich $rk(A)$.
Es genügt zu zeigen: b ist eine Linearkombination der Basiselemente aus B'. Widerspruchsbeweis. Angenommen b ist keine Linearkombination der Basiselemente. Dann ist die Menge $B' \cup \{b\}$ linear unabhängig, weil in der Linearkombination
$\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_{rk(A)} b_{rk(A)} + \mu b = \vec{0}$
dann $\mu = 0$ ist (sonst kann man b als eine Linearkombination von Elementen aus B' darstellen), und dann sind alle $\lambda_i = 0$, weil die b_i linear unabhängig sind.
Dann ist die Dimension von $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1}\end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn}\end{pmatrix}, b\right\}\right)$ mindestens $rk(A) + 1$. Widerspruch. $\square$

Beweis des Satzes 27: (a): $Ax = b$ ist lösbar $\iff$ existiert ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\iff$ b ist eine Linearkombination der Spalten $\overset{\text{Hilfsaussage}}{\iff}$ $rk(A) = rk((A, b))$.

Beweis von (b): Seien $\tilde{x}, x$ Lösungen von $Ax = B$. Dann ist $A(x - \tilde{x}) = Ax - A\tilde{x} = b - b = \vec{0}$, also $x - \tilde{x} \in Kern_{f_A}$. Ferner gilt: ist $v \in Kern_{f_A}$, so ist $A(\tilde{x} + v) = A\tilde{x} + Av = b + \vec{0} = b$, also ist $\tilde{x} + v$ auch eine Lösung. $\square$