Wir haben uns etwa auf Seite 33 der Folien zum Woche 2 am Mittwoch verabschiedet

- Ziel: noch nicht formulierter Jordanscher Normalformsatz (Satz 8): die beste Form der darstellenden Matrix des Endomorphismus f (von V der Dimension $n < \infty$).
  - Wir setzen voraus, dass χ_f sich als Produkt von linearen Faktoren schreiben lässt
  - Über $\mathbb{C}$ is es immer möglich
- Wir haben gezeigt (Seite 32): es gibt eine Basis sodass in der Basis die Matrix A von f Blockdiagonal ist:

  $$A := \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$$

  , sodass jede Matrix A_i die Eigenschaft hat: $(A_i - \lambda_i Id)^{\gamma_i} = \mathbf{0}$

  Also, wenn wir die (Matrizen von) Endomorphismen ϕ beschreiben sodass $\phi^{\gamma} = 0$, bekommen wir eine Beschreibung aller Endomorphismen (Standardannahmen oben vorausgesetzt). Solche Endomorphismen, und die entsprechende Matrizen, heißen nilpotent.

Zuerst ein Beispiel

- Wir betrachten die Matrix (die leere Einträge sind gleich Null)

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

  und fragen uns was N^k ist

- Sie haben die Antwort in der Anwesenheitsaufgabe 9 ausgerechnet: ich wiederhole sie für Sie. Die triviale Fälle sind $N^0 = Id$ (das ist Definition), $N^1 = N$. Auf den nächsten Folien berechne ich N^2, und zwar mit zwei Methoden.

Methode 1, um N^2 zu berechnen.

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Auf i, j Stelle von N^2 steht Standardskalarprodukt der i-ten Zeile mit den j-ten Spalte. Höchstens ein Eintrag den i-ten Zeile ist nicht 0; nämlich Eintrag Nummer $i + 1$. Höchstens ein Eintrag den j-ten Spalte ist nicht 0; nämlich Eintrag Nummer $j - 1$. Also, i, j-Element von N^2 ist nicht Null nur wenn $i + 1 = j - 1$; also wenn $j = i + 2$. Deswegen,

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Sebstverständlich kann man mit der gleichen Methode N^k berechnen

- Für etwa N^3: das (i, j)-Element von $N^3 = N\ N^2$ ist nicht Null (und ist dann 1) wenn $i + 1 = j - 2$
- Induktiv dann für alle k: das (i, j)-Element von $N^k = N\ N^{k-1}$ ist nicht 0 und dann ist 1 g.d.w. $i + 1 = j - k$, also steht 1 nur auf Plätze $(i, i + k + 1)$ (wobei i so ist, dass $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq i + k + 1 \leq n$ (und sonst steht 0) .
- Insbesonderem gilt: $N^n = 0$.

Jetzt mache ich das gleiche auf einer anderen Sprache

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

- Wir überlegen, was die Matrix N mit Standardbasisvektoren $e_1, ..., e_n$ macht : für $i = 1$ gilt $Ne_1 = \vec{0}$ und für $i > 1$ ist

$$Ne_i = \ i\text{-te Spalte von } N = e_{i+1}.$$

- Dann ist $N^2(e_1) = N^2(e_2) = \vec{0}$ und für $i > 3 \;\; N^2(e_i) = e_{i-2}$, sodass

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

- U.s.w.: $N^k(e_1) = N^k(e_2) = ... = N^k(e_k) = \vec{0}$ und für $i > k$ $N^k(e_i) = e_{i-k}$.

Bemerkung

- Wenn eine Basis $(b_1, ..., b_n)$ existiert sodass $\phi(b_1) = 0$ und $\phi(b_i) = e_{i-1}$, dann ist die Matrix ϕ in dieser Basis gleich N auf der vorherigen Folie.
- Ich zeige ein Beispiel, sodass solche Basis nicht existiert:
$\begin{pmatrix} \boxed{N_1} & & & \\ & \boxed{N_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{N_k} \end{pmatrix}$, sodass $N_1, N_2, ..., N_k$ das Aussehen haben wie N (können aber beliebige Dimensionen $\gamma_1, ..., \gamma_k$ haben):

Heute werden wir zeigen, dass jeden nilpotenten Endomorphismus in einer Basis die Form oben hat.Ausserdem zeigen wir, dass die "Freiheit, um so ein N zu konstruieren" (d.h., Anzahl und Dimensionen von "Kästchen") geometrisch bestimmt ist; also man kann die Form nicht weiter vereinfachen.