Warum Grundkurse an allen Universitäten Lineare Algebra enthalten

- LA ist ein Paradebeispiel für eine mathematisch saubere und vollständig aufgebaute Theorie.
  - Sie basiert nur auf dem Begriff der "reellen Zahlen", und eigentlich kann man sie auch abstrakt, d.h. ohne die reellen Zahlen, aufbauen (in diesem Fall hätten wir den Kurs mit der Einführung von Körpern beginnen sollen).
  - Alle Grundfragen sind vollständig gelöst: Wir haben alle Vektorräume (über $\mathbb{R}$ oder über $\mathbb{C}$; über anderen Körpern müssten wir zuerst alle Körper beschreiben — man kann das machen. Ansätze habe ich in der Vorlesung und in den Hausaufgaben gezeigt) beschrieben.

LA ist in mehreren Bereichen anwendbar

- In der Mathematik werden Sie sich ständig mit linearalgebraischen Objekten beschäftigen und sie verwenden, um andere mathematische Objekte zu beschreiben. Beispiele dafür, die Sie eventuell im Laufe des Studiums sehen werden, sind:
  - Lie-Theorie (mit mehreren Anwendungen in Physik und Differentialgleichungen)
  - Algebra und Darstellungstheorie
  - Algebraische Topologie
  - Analysis und Funktionenraumentheorie
  - Differentialgeometrie
  - Mathematische Physik
  - Theorie von integrablen Systemen

In reinen Anwendungen

- Lineare Algebra hat eine unglaublich starke rechnerische Kraft. Man kann fast alle expliziten linearalgebraischen Probleme algorithmisch und damit mithilfe von Rechnern lösen. Wir haben es in LA I gesehen, z. B. beim Berechnen der Formel für die Fibonacci-Zahlen, und auch in LA II, als wir analytische Funktionen von Matrizen eingeführt haben. Ein Standardgrundkurs der numerischen Mathematik ist im Wesentlichen Lineare Algebra.
- In der diskreten Optimierungstheorie (eine eigene Disziplin, z. B. in den USA unter dem Namen "Operational Research").
- In der Visualisierung.
- Im maschinellen Lernen und in der KI. Die ersten KI-Algorithmen basierten vollständig auf linearer Algebra. In modernen KI-Algorithmen ist Nichtlinearität eingebaut, allerdings in linearalgebraische Konstruktionen.
- Vektorräume über endlichen Körpern spielen eine wichtige Rolle in der Informatik (Rechner arbeiten über $\mathbb{Z}_2$) und in der Kodierungstheorie.

Im LA-Kurs haben wir einige Objekte mehrmals betrachtet, aus verschiedenen Blickwinkeln

- Wir haben LA I mit der Behandlung von linearen Gleichungssystemen begonnen (Gauss-Algorithmus).
- Später haben wir die Formel für das Lösen von (quadratischen, nicht ausgearteten) linearen Gleichungssystemen gefunden, die Leibniz-Cramer-Formel. Sie ist nicht offensichtlich und basiert auf der Theorie der Determinantenabbildungen.
- Wir haben auch die Menge der Lösungen von linearen inhomogenen Gleichungssystemen beschrieben:
  - Alle Lösungen = eine Lösung plus alle Vektoren aus dem Kern der Koeffizientenmatrix.
- Wir haben dies auch in der affinen Geometrie betrachtet: Wir haben gezeigt, dass die Lösungsmenge ein affiner Unterraum ist.

Basis

- Den Begriff “Basis” haben wir auch gleich zu Beginn von LA I eingeführt.
- Mithilfe der Basis kann man den Hauptsatz der Linearen Algebra beweisen.
  - Mithilfe der Basis haben wir lineare Abbildungen durch Matrizen beschrieben. Die Schlüsselaussage war: Wenn zwei lineare Abbildungen auf den Basisvektoren übereinstimmen, dann sind sie gleich.
  - Mithilfe der Basis kann man auch multilineare Abbildungen beschreiben. Das haben wir für bilineare Formen in LA I gemacht, für Tensoren in LA II. Die Beweise sind im Wesentlichen gleich: Die Schlüsselaussage ist wie oben — wenn zwei multilineare Abbildungen auf allen möglichen Kombinationen von Basisvektoren übereinstimmen, dann sind sie gleich.
  - Mithilfe von Basen haben wir auch euklidische und hermitesche Räume beschrieben. Die Ergebnisse haben wir dann verwendet, um z. B. Quadriken zu beschreiben und zu klassifizieren.

Den unendlichdimensionalen Fall haben wir erst am Ende behandelt

- Im unendlichdimensionalen Fall heißt die Basis Hamel-Basis (ohne tieferen mathematischen Grund).
  - Ich habe es in der Vorlesung nicht betont, aber man kann zeigen (vollständig analog zum endlichdimensionalen Fall), dass Vektorräume über demselben Körper, deren Basen die gleiche Kardinalität haben (d.h. gleich mächtig sind), auch isomorph sind.
  - Man kann auch alle Abbildungen (nicht konstruktiv) beschreiben, indem man angibt, was die Bilder der Basisvektoren sind.
- Für unendlichdimensionale Vektorräume ist die Hamel-Basis ein theoretisch nützliches Werkzeug, allerdings kann man damit nicht viel ausrechnen, weil man die Hamel-Basis nicht explizit angeben kann.
  - Wir haben trotzdem eine Anwendung beim Lösen des Hilbert-Problems gesehen.

- In den meisten Anwendungen unendlichdimensionaler Räume spielen separable Hilberträume und abzählbare Hilbert-Basen eine besondere Rolle, etwa in Analysis, Physik und der Theorie stochastischer Prozesse.
    - Die Hilbert-Basis ist keine Basis im Sinne der ursprünglichen Definition und benötigt zusätzlich zur Struktur des Vektorraums die Struktur des metrischen Raums, die aus einer euklidischen oder hermiteschen Form stammt.
    - Die Hilbert-Basis spielt in der Theorie separabler Hilberträume die Rolle der Basis in der Theorie endlichdimensionaler Räume und erlaubt, alles auf ℓ^2 zurückzuführen, welches die Rolle von $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ spielt.

Kategorientheoretische Sicht

- Kategorientheorie ist ein Gebiet der reinen Mathematik; sie entstand in der algebraischen Geometrie und Topologie, ist aber eng mit der mathematischen Logik verwurzelt.
- Derzeit ist die Kategorientheorie kein sehr aktives Forschungsgebiet. Allerdings sind die ursprünglichen Fragestellungen der Kategorientheorie nützlich, da es Fragen sind, die man in fast jeder mathematischen Theorie stellen sollte.
- Die Kategorientheorie untersucht Strukturen, indem sie nicht nur einzelne mathematische Objekte (wie Mengen, Gruppen, Vektorräume, topologische Räume usw.) betrachtet, sondern auch die Morphismen (Abbildungen, Homomorphismen) zwischen diesen Objekten systematisch studiert.

Kategorientheoretischer Ansatz auf LA

- Die Grundstruktur ist die Struktur des Vektorraums.
    - Diese haben wir vollständig beschrieben (mindestens im endlichdimensionalen Fall).
- Morphismen sind die struktur-erhaltenden Abbildungen, also lineare Abbildungen.
    - Wir haben die linearen Abbildungen vollständig beschrieben, im endlichdimensionalen Fall durch Matrizen. Wir haben auch die beste Form der darstellenden Matrix gefunden.
    - Wir haben die linearen Abbildungen auf sich selbst vollständig beschrieben, durch quadratische Matrizen. Wir haben auch die beste Form der darstellenden Matrix gefunden (Jordan-Normalform).
    - Wir haben alle euklidischen, hermiteschen und separablen Hilberträume beschrieben sowie die entsprechenden Endomorphismen.

Wir haben zusammen Mathematik gemacht

Wir haben mehrere mathematische Ideen, Werkzeuge und Methoden kennengelernt.

- Beweismethoden
  - Sie haben verstanden, was es bedeutet, eine Aussage sauber zu beweisen.
- Algebraische Werkzeuge
  - Gruppen, Ringe, Körper
  - Hauptsatz der Algebra, komplexe Zahlen und Anwendungen
  - Dividieren mit Rest: Zuerst für die Konstruktion von $\mathbb{Z}_p$ eingeführt, später für Polynome.

Feedback

Ich bin mit dem Kurs, so wie ich ihn vorgelesen habe, sehr zufrieden. Ich habe mehr geschafft als letztes Mal, bin hoffentlich aber trotzdem verständlich geblieben. Sie haben die Klausur LA I relativ gut (vergleichbar mit vorherigen Jahren) bestanden; auch mit den Ergebnissen der Probeklausur bin ich zufrieden. Allerdings wird die Hauptklausur selbstverständlich schwierig für Sie sein, bitte bereiten Sie sich gut vor und beginnen Sie rechtzeitig.

- Am Mo, 28.07.2025, von 14–17 Uhr (Die Klausur dauert 120 Minuten, beginnt etwa ab 14:30. Genaue Information wird gegeben) findet im Helmholtzweg 5 / HS 4 Physik (JENOPTIK-Hörsaal) die Klausur statt.
- Die Klausur ist ähnlich zur Probeklausur aufgebaut.
- Keine Hilfsmittel (außer einem Stift) sind zugelassen. Bitte keinen roten Stift benutzen. Papier wird bereitgestellt.
- Essen, Trinken und das einzelne Verlassen des Raumes sind erlaubt, aber nicht erwünscht.
- Die Klausur besteht in der Regel aus 5 Aufgaben.
- Die Noten werden über Moodle zurückgegeben. Danach haben Sie die Möglichkeit zur Einsicht. Die Standard-Termine für die Klausureinsicht werden ebenfalls in Moodle angekündigt.
- Bitte Lichtbildausweis mitbringen (Thoska reicht; Ausweis oder Pass selbstverständlich auch).

- Eine Klausuraufgabe wird sein, einen Satz/ein Lemma aus der Vorlesung zu beweisen (inkl. Definitionen).
- Eine Aufgabe ist eine Verständnisaufgabe (z. B. falsche Aussagen mit Begründung identifizieren oder Multiple-Choice).
- Eine Aufgabe ist eine unveränderte Beweis-Hausaufgabe. Alle Hausaufgaben sind relevant.
- Zwei Aufgaben sind Rechenaufgaben.

Die Liste von Themen für die erste Aufgabe

(1) Satz 32 (LA I); algebraische und geometrische Vielfachheit; Satz 1.

(2) Satz 2 (Hamilton-Cayley) mit allen Hilfsaussagen; Polynome über beliebige Körper und von Matrizen; Satz 5 (ggT von Polynomen); Minimalpolynom.

(3) Beweis des Jordan-Normalformsatzes (Satz 8): Direktprodukt von Untervektorräumen; Satz 6; verallgemeinerte Eigenräume; nilpotente Endomorphismen; Lemma 3; Lemma 4 (Zerlegungslemma für nilpotente Endomorphismen); Satz 7 (Zerlegungssatz für nilpotente Endomorphismen).

(4) Anwendungen der Jordan-Normalform; analytische Funktionen von Matrizen; Komplexifizierung von $\mathbb{R}$-Vektorräumen und deren Endomorphismen; reelle Jordan-Form.

(5) Affine Geometrie (Definitionen sowie Lemmata 7b, 8, 9); affine Abbildungen; Satz 12; Satz 13 (Hauptsatz der affinen Geometrie); affine Unterräume und drei äquivalente Definitionen (inkl. Satz 14).

(6) Fundamentalsatz 15 der reellen affinen Geometrie mit allen zugehörigen Hilfslemmata.

(7) Metrische Räume; euklidische Räume; Satz 17 (Isometriegruppe von $\mathbb{R}^n$); Klassifikation orthogonaler 2×2-Matrizen.

(8) Quadriken; Gleichung einer Quadrik in Matrixform; Lemma 12; Sätze 18, 19, 20.

(9) Mengenlehre: höchstens gleichmächtige und gleichmächtige Mengen, Hilberts Hotel und Sätze 22, 23, 24. Kardinalzahlen.

(10) Auswahlaxiom und Lemma von Zorn (ohne Beweis, aber mit allen zugehörigen Definitionen). Satz 35 (Existenz von Hamel-Basis).

(11) Prä-Hilbert Raum, Cauchy-Schwarz Ungleichung für hermitische Formen. Dichte Teilmengen in metrischen Räumen und separablen Räume. Beweis, dass $C^0([a, b], \mathbb{R})$ separabel ist. Definition von Hilbertraum und Hilbertbasis. Beweis der Existenz von abzählbaren Hilbertbasis in einem separablem Hilbertraum (aus dem Beweis von Klassifikationssatz).

(12) Dualraum, Dualbasis, Lemma 13. Beispiel welches zeigt, dass Dualbasis nicht immer eine Basis ist. Bidualraum, Satz 38. Definition von Tensoren. Lemma 14. Wedge-Produkt von Linearformen und Satz 39

Empfehlungen zur Klausurvorbereitung

- Arbeiten Sie alle Beweise der Aussagen aus der Liste systematisch durch. Stellen Sie sich zu jedem Schritt die Frage “Warum?”. Schreiben Sie die Beweise selbst auf.
- Wiederholen Sie alle Hausaufgaben. Stellen Sie ähnliche Aufgaben und lösen Sie diese.

Wir gehen jetzt die Liste zusammen durch

(1) Satz 32 (LA I); algebraische und geometrische Vielfachheit; Satz 1.

Satz 32 sagt, dass ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen V genau dann diagonalisierbar ist, wenn es eine Basis gibt, sodass jeder Basisvektor ein Eigenvektor ist (plus noch etwas).
Der Beweis folgt mehr oder weniger sofort aus der Definition der darstellenden Matrix eines Endomorphismus. Ich wollte den Satz wiederholen, weil er sehr gut zum Thema der ersten 3 Wochen passte.
Satz 1 ist anspruchsvoller. Satz 1 ist ein Kriterium für Diagonalisierbarkeit, das man algebraisch anwenden kann (vorausgesetzt, man kann die Nullstellen des charakteristischen Polynoms finden).

(2) Satz 2 (Hamilton-Cayley) mit allen Hilfsaussagen; Polynome über beliebige Körper und von Matrizen; Satz 5 (ggT von Polynomen); Minimalpolynom.

- Die Aussage des Satzes 2 ist ganz hübsch: Das charakteristische Polynom einer Matrix annihiliert die Matrix. Der Beweis ist relativ komplex und olympiadenartig – man kann alle Schritte wiederholen und überprüfen, dass der Beweis korrekt ist; versteht aber nicht unbedingt sofort, warum der Satz natürlich ist. Deswegen habe ich den Satz zuerst für diagonalisierbare Matrizen bewiesen.
- Wenn wir über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ arbeiten, reicht der Beweis für diagonalisierbare Matrizen fast aus, d.h. mit Hilfe von Standardmethoden aus der Analysis kann man aus der Aussage für diagonalisierbare Matrizen die Aussage für alle Matrizen folgern.
- Ich habe selbstverständlich auch einen Beweis gegeben, der über allen Körpern gilt.
- Das Thema „Polynome von Matrizen" wiederholt im Wesentlichen und verallgemeinert die entsprechenden Themen aus LA I.

(3) Beweis des Jordan-Normalformsatzes (Satz 8): Direktprodukt von Untervektorräumen; Satz 6; verallgemeinerte Eigenräume; nilpotente Endomorphismen; Lemma 3; Lemma 4 (Zerlegungslemma für nilpotente Endomorphismen); Satz 7 (Zerlegungssatz für nilpotente Endomorphismen).

(4) Anwendungen der Jordan-Normalform; analytische Funktionen von Matrizen; Komplexifizierung von $\mathbb{R}$-Vektorräumen und deren Endomorphismen; reelle Jordan-Form.

Sehr wichtige und schwierige Themen. Wir haben uns damit 3 Wochen beschäftigt; die Themen 1 und 2 waren die Vorbereitung auf Thema 3. Bitte auf jeden Fall verstehen, mindestens Thema 3.

(5) Affine Geometrie (Definitionen sowie Lemmata 7b, 8, 9); affine Abbildungen; Satz 12; Satz 13 (Hauptsatz der affinen Geometrie); affine Unterräume und drei äquivalente Definitionen (inkl. Satz 14).

Ich hoffe, dass Ihnen das Thema gefallen hat und Sie es einfach fanden. Im Wesentlichen ist das Thema parallel zum Aufbau der Theorie der Vektorräume. Allerdings ist die konzeptuelle Wichtigkeit von Geraden betont: etwa Satz 14 sagt, dass eine affin abgeschlossene, nichtleere Teilmenge ein Unterraum ist.

(6) Fundamentalsatz 15 der reellen affinen Geometrie mit allen zugehörigen Hilfslemmata.

Satz 15 sagt, dass eine geradentreue bijektive Abbildung eine Affinität ist. Aus kategorischer Sicht sagt er, dass die Menge der Geraden die Struktur des affinen Raums eindeutig bestimmt. Wie in Satz 14 tritt der Begriff „Geraden“ in den Vordergrund.
Der Beweis ist lang und benutzt beides, Algebra und Geometrie. Allerdings besteht der Beweis aus einfach nachvollziehbaren Schritten. Sie sollen auf jeden Fall die Logik des Beweises verstehen und dann die einzelnen Schritte.

(7) Metrische Räume; euklidische Räume; Satz 17 (Isometriegruppe von $\mathbb{R}^n$); Klassifikation orthogonaler 2×2-Matrizen.

Der Begriff „metrische Räume" ist ein wichtiger, universeller Begriff in der Mathematik und kommt in mehreren Gebieten vor. Sie haben ihn in der Analysis bereits gesehen. Satz 17 sagt, dass isometrische Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ Affinitäten sind, sodass die zugehörige lineare Abbildung orthogonal ist. Wie bei den vorherigen Themen sagt er aus kategorischer Sicht, dass die Abstandsfunktion die Struktur des euklidischen Raums eindeutig bestimmt.

(8) Quadriken; Gleichung einer Quadrik in Matrixform; Lemma 12; Sätze 18, 19, 20.

Die Untersuchung von Quadriken ist ein Urgebiet der Mathematik. In mathematischen Zeitschriften vom Anfang des 19. Jahrhunderts sind die meisten Arbeiten über Quadriken zu finden. In gewissem Sinne ist die Theorie der Quadriken noch vor der linearen Algebra entstanden.
In LA I bewiesene Aussagen über die Diagonalisierung symmetrischer Bilinearformen erleichtern die Behandlung von Quadriken. Die Schlusssaussage ist die Übersetzung von der Sprache der Gleichungen in die Sprache der Matrizen.

(9) Mengenlehre: höchstens gleichmächtige und gleichmächtige Mengen, Hilberts Hotel und Sätze 22, 23, 24. Kardinalzahlen.

Mengenlehre gehört nicht zum Kerngebiet der linearen Algebra, allerdings zur allgemeinen mathematischen Ausbildung und muss einmal verstanden sein. Sie müssen auf jeden Fall die Beispiele (etwa Hilberts Hotel) verstehen. Auch die Aussage, dass $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}|$, wird bestimmt ein paar Mal im Laufe Ihres Studiums angewendet werden.

Das Thema ist wichtig, um die nächsten zwei Themen zu verstehen.

(10) Auswahlaxiom und Lemma von Zorn (ohne Beweis, aber mit allen zugehörigen Definitionen). Satz 35 (Existenz einer Hamel-Basis).

Auch dieses Thema gehört nicht zum Kerngebiet der linearen Algebra, allerdings zur allgemeinen mathematischen Ausbildung und muss einmal verstanden sein. Das Auswahlaxiom wird später z. B. in der Maßtheorie benutzt. Ich habe auch Anwendungen der Hamel-Basis gezeigt, etwa in der Lösung des klassischen Zerlegungsproblems von Hilbert. Außerdem erlaubt die Hamel-Basis – wie ganz oben erwähnt – den unendlichdimensionalen Fall des Hauptsatzes der linearen Algebra zu beweisen.

(11) Prä-Hilbertraum, Cauchy-Schwarz-Ungleichung für hermitesche Formen. Dichte Teilmengen in metrischen Räumen und separable Räume. Beweis, dass $C^0([a,b],\mathbb{R})$ separabel ist. Definition von Hilbertraum und Hilbertbasis. Beweis der Existenz einer abzählbaren Hilbertbasis in einem separablen Hilbertraum (aus dem Beweis des Klassifikationssatzes).

Obwohl die Hamel-Basis alle Klassifizierungsfragen von linearen Vektorräumen löst, gibt es kaum Anwendungen dafür. Der Grund ist, dass man in unendlichdimensionalen Räumen die Hamel-Basis in der Regel nicht explizit beschreiben kann.

Allerdings sind unendlichdimensionale Vektorräume für Anwendungen wichtig. Sie kommen oft automatisch mit einem Skalarprodukt (oder einer hermiteschen Form) ausgestattet.

Die Hilbertbasis ist ein Ersatz für eine orthonormale Basis in Hilberträumen. Sie ist in der Regel keine Basis im ursprünglichen Sinn, allerdings kann man damit dieselben Ideen benutzen, die wir am Anfang von LA I in der Theorie der Vektorräume und linearen Abbildungen sowie in den Kapiteln über euklidische Räume benutzt haben. Ich hoffe, dass Sie die entsprechenden Kapitel wiederholen und eventuell besser verstehen.

(12) Dualraum, Dualbasis, Lemma 13. Beispiel, das zeigt, dass die Dualbasis nicht immer eine Basis ist. Bidualraum, Satz 38. Definition von Tensoren. Lemma 14. Wedge-Produkt von Linearformen und Satz 39.

Dualraum, Dualbasis und Bidualraum gehören zu Themen, die Sie noch mehrmals sehen werden. Tensoren sind für Physiker besonders wichtig, auch für Mathematiker. Die Theorie der Tensoren sollte für Sie einfach sein, wenn Sie den kanonischen Isomorphismus zum Bidualraum verstehen. Das Wedge-Produkt kommt in mehreren Gebieten der Mathematik vor und gehört zum Grundwissen.

Wir sehen uns später wieder

- Falls nötig, bin ich gern bereit, morgen eine Konsultation durchzuführen. Ich bin am Tag der Klausur eventuel nicht da (vielleich, doch), allerdings wird Herr Quaschner eine Konsultation kurz vor der Klausur anbieten.
- Lineare Algebra und Analysis bilden das Fundament des Mathematikstudiums; LA ist aber nur ein Teil meiner Lehraufgaben.
- Die Geometrie-Gruppe bietet an: Vorlesungen in Differentialgeometrie (klassisch und modern), Vorlesungen in metrischer und konvexer Geometrie, Seminare und Proseminare in Geometrie. Ich lese gelegentlich auch „Mathematische Methoden der Mechanik" und vieles mehr.
- Im WS 2025/26 hat der andere Geometrie-Professor, T. Wannerer, ein Sabbatical (Forschungsfreisemester); deswegen muss ich alle Pflichtaufgaben übernehmen, vor allem für Lehramtsstudierende. Im SS 26 und darüber hinaus werde ich mehrere Wahlpflichtkurse anbieten und würde mich freuen, wenn Sie sich dafür entscheiden.