- Mit dem Thema “Jordansche Normalformen” sind wir durch, in Wochen 5 fangen wir Affine Geometrie an.

# Neues Thema: Affine Geometrie

**Def.** *Ein Affiner Raum über einem $\mathbb{K}$-Vektorraum $V$ ist eine Menge $\mathcal{A} \neq \varnothing$ mit einer Abbildung $+ : \mathcal{A} \times V \to \mathcal{A}$, für die gilt*

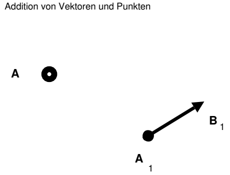
($A_1$) *für alle $a \in \mathcal{A}$, $v, w \in V$ gilt*
$$(a + v) + w = a + \underbrace{(v + w)}_{\text{Übliche Addition von Vektoren}}$$

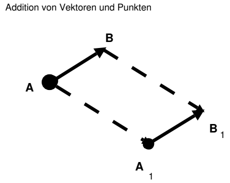
($A_2$) *für alle $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ existiert genau ein $v \in V$ s.d. $a_2 = a_1 + v$ (Der Vektor $v$ wird $\overrightarrow{a_1 a_2}$) bezeichnet.*

*Die Dimension des affinen Raums ist die Dimension von $V$. Die Elemente von $\mathcal{A}$ heißen Punkte.*

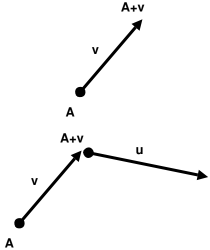
**Standardbsp.** Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Wir setzen $\mathcal{A} = V$. "+" sei die übliche Addition in $V$. Das ist ein affiner Raum:
($A_1$): $(a + v) + w = a + (v + w)$ entspricht Assoziativität der Addition,
($A_2$) entspricht der Existenz eindeutiger Inverser
(weil $a_2 = a_1 + v \iff v \overset{\text{eindeutig}}{=} a_2 - a_1$.)

**Motivationsbsp:** $\mathcal{E} =$ Übliche („schulgeometrische“) Ebene, $V$ – die Menge der geometrischen Vektoren (geordnete Strecken) mit Anfang in $A_1$, “+” sei die Addition von Vektoren und Punkten in der Ebene Sei $A \in \mathcal{E}$, $\vec{v} = \overrightarrow{A_1 B_1}$ sei ein Vektor auf $\mathcal{E}$,. Die Summe $A + \vec{v}$ ist ein Punkt $B \in \mathcal{E}$ so dass die geordnete Strecke $\overrightarrow{AB}$ gleich $\vec{v}$ ist ( $=$ parallel und hat die gleiche Länge und die gleiche Richtung).




Eigenschaft $(A_1)$: $A$ sei ein Punkt, $\vec{v}, \vec{u}$ seien Vektoren. Es gilt: $(A + \vec{v}) + \vec{u} = A + (\vec{u} + \vec{v})$.



Sehen wir uns noch einmal die Eigenschaften $(A1)$, $(A2)$ an.

$(A_1)$ für alle $a \in \mathcal{A}$, $v, w \in V$ gilt $(a+v)+w = a+(v+w)$

$(A_2)$ für alle $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ existiert genau ein $v \in \mathcal{A}$ s.d. $a_2 = a_1 + v$ (Der Vektor $v$ wird mit $\overrightarrow{a_1a_2}$ bezeichnet.)

Falls wir einen festen Punkt $a \in \mathcal{A}$ gewählt haben, ist $\mathcal{A}$ "fast" ein Vektorraum: jedem $a_1$ ist eindeutiges $\overrightarrow{aa_1}$ zugeordnet. Also gibt es eine natürliche Bijektion zwichen den Elementen von $\mathcal{A}$ und den Elementen von $V$: Element $a_1 \in A$ wird auf das Element $\overrightarrow{aa_1}$ abgebildet.
Die Umkehrabbildung zu dieser Bijektion ist eine Abbildung von $V$ nach $\mathcal{A}$ und bildet den Vektor $v$ auf den Punkt $a + v$ ab.

# Plan

Theorie von affinen Räumen

- Affiner Raum
- Affiner Unterraum
- Affine Abbildungen
- Affine Koordinaten
- Hauptsatz der affinen Geometrie
- Fundamentalsatz der affinen Geometrie

**Lemma 7b** *Für alle $a, a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{A}$ gilt: $a + \vec{0} = a$, $\overrightarrow{aa} = \vec{0}$, $\overrightarrow{a_1a_2} = -\overrightarrow{a_2a_1}$, $\overrightarrow{a_1a_2} + \overrightarrow{a_2a_3} = \overrightarrow{a_1a_3}$.*

**Beweis:** Hausaufgabe.

**Def.** *Sei $\mathcal{A}$ ein affiner Raum über dem $\mathbb{K}$- Vektorraum $V$. Eine Teilmenge $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}$ heißt ein affiner Unterraum, falls ein Untervektorraum $V_{\mathcal{U}}$ und ein $a_0 \in \mathcal{A}$ existieren, so dass*

$$\mathcal{U} = \{a_0 + v, \quad wobei\ v \in V_{\mathcal{U}}\ \}.$$

*$dim(\mathcal{U}) := dim(V_{\mathcal{U}})$. Die affinen Unterräume der Dimension 1 heißen Gerade, die affinen Unterräume der Dimension 2 heißen Ebenen.Falls $V$ n-dimensional ist, heißen die affinen Unterräume der Dimension $n-1$ Hyperebenen.*

**Triviales Bsp.** Jede 1-Punkt-Menge $\{a\} \subseteq \mathcal{A}$ ist ein affiner Unterraum (weil $\{\vec{0}\}$ ein Vektoraum ist, und $a + \vec{0} \overset{\text{Lem. 7b}}{=} a$ ) der Dimension 0 .
$\mathcal{A}$ selbst ist auch ein affiner Unterraum, da nach $(A_2)$
$\{a_0 + v, \quad \text{wobei } v \in V\ \} = \mathcal{A}$. $\quad dim(\mathcal{A}) = dim(V)$

**Bemerkung** *Ein affiner Unterraum $\mathcal{U}$ ist ein affiner Raum über $V_{\mathcal{U}}$*

# Bsp. Unterräume von $\mathcal{E}_2$

***Unteräume von Ebene***


Punkt ist ein 0-dim. aff. Unterraum


Gerade={ B+ t v, wobei t aus R ist} ist ein 1-dim. aff. Unterraum

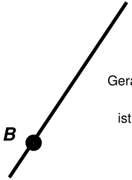
=Hyperebene

Die ganze Ebene ist ein 2-dim. aff. Unterraum

# Bsp. Unterräume von $\mathcal{E}_3$

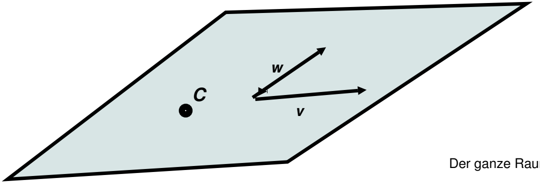
***Unteräume vom Raum***


Punkt ist ein 0-dim. aff. Unterraum




Gerade={ B+ t v, wobei t aus R ist}

ist ein 1-dim. aff. Unterraum




Der ganze Raum

ist ein 3-dim. aff. Unterraum

Die Ebene {C+t v + r w, wobei t,r aus R sind}

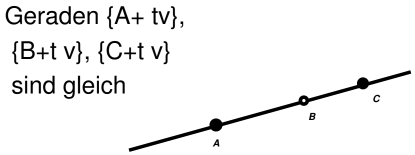
und v, w linear unabhängig sind

ist ein 2-dim. aff. Unterraum

ist ein Hyperebene

**Lemma 8** Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}$ affiner Unterraum (d.h. $\mathcal{U} = \{a_0 + v, \text{ wobei } v \in V_{\mathcal{U}}\}$). Wähle $a_1 \in \mathcal{U}$. Dann gilt: $\mathcal{U} = \{a_1 + v, \text{ wobei } v \in V_{\mathcal{U}}\}$.

In Worten: Als Fusspunkt können wir einen beliebigen Punkt des Unterraums wählen.




**Beweis.** Wir zeigen: Jeder Punkt $a$ aus $\{a_0 + v, \text{ wobei } v \in V_{\mathcal{U}}\}$ liegt auch in $\{a_1 + v, \text{ wobei } v \in V_{\mathcal{U}}\}$. Tatsächlich, $a = a_0 + v$, wobei $v \in V_{\mathcal{U}}$. Dann ist

$$a_0 + v \overset{Lem.7b}{=} a_0 + v + \vec{0} \overset{Lem.7b}{=} a_0 + v + \overrightarrow{a_0 a_1} + \overrightarrow{a_1 a_0} \overset{(A1)}{=} \underbrace{(a_0 + \overrightarrow{a_0 a_1})}_{a_1} + \underbrace{(v + \overrightarrow{a_1 a_0})}_{\in V_{\mathcal{U}}} \in \{a_1 + u, \text{ wobei } u \in V_{\mathcal{U}}\}.$$

Genauso liegt auch jedes $a$ aus $\{a_1 + v, \text{ wobei } v \in V_{\mathcal{U}}\}$ in $\{a_0 + v, \text{ wobei } v \in V_{\mathcal{U}}\}$. Also sind die Mengen gleich. $\square$

**Lemma 9** *Sind $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ affine Unterräume s.d. $\mathcal{U}_1 \bigcap \mathcal{U}_2 \neq \varnothing$, so ist $\mathcal{U}_1 \bigcap \mathcal{U}_2$ auch ein affiner Unterraum und $V_{\mathcal{U}_1 \bigcap \mathcal{U}_2} = V_{\mathcal{U}_1} \bigcap V_{\mathcal{U}_2}$.*

**Beweis:** Wähle $a_0 \in \mathcal{U}_1 \bigcap \mathcal{U}_2$. Nach Lemma 8 gilt
$\mathcal{U}_1 = \{a_0 + v, \ \text{ wobei } v \in V_{\mathcal{U}_1}\}$,
$\mathcal{U}_2 = \{a_0 + v, \ \text{ wobei } v \in V_{\mathcal{U}_2} \ \}$.
Dann ist $\mathcal{U}_1 \bigcap \mathcal{U}_2 = \{a_0 + v \ \text{ wobei } v \in V_{\mathcal{U}_1} \bigcap V_{\mathcal{U}_2}\}$. $\square$

**Bsp.** Betrachte den affinen Raum aus dem Standardbsp., wobei $V = \mathbb{K}^n$. D.h. $\mathcal{A} = V = \mathbb{K}^n$ und die Addition ist die übliche Addition in $\mathbb{K}^n$. Sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$. Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. Angenommen, das System ist lösbar.
Dann ist die Lösungsmenge $\mathcal{U}$ ein affiner Unterraum und $V_{\mathcal{U}} = Kern_{f_A}$.
Tatsächlich, nach LA I ist die Lösungsmenge $\{\tilde{x} + v \text{ wobei } v \in Kern_{f_A}\}$.

# Affine Abbildungen

**Def.** *Seien $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ affine Räume über $V_1, V_2$. Eine Abbildung $F : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ heißt affin, wenn es eine lineare Abbildung $f : V_1 \to V_2$ gibt, so dass für jedes $a, b \in \mathcal{A}_1$ gilt*

$$f(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{F(a)\,F(b)}. \qquad (*)$$

*Eine bijektive affine Abbildung heißt Affinität oder ein affiner Isomorphismus.*

Bedingung $(*)$ umformulieren: Für alle $a_1 \in \mathcal{A}_1$, $v \in V_1$ gilt

$$F(a_1 + v) = F(a_1) + f(v). \qquad (**)$$

Für eine affine Abbildung $F$ gibt es eine lineare Abbildung $f : V_1 \to V_2$, so dass $\forall a, b \in \mathcal{A}_1$ gilt

$$f(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{F(a)\,F(b)} \qquad (*)$$

Alternative Formulierung:

$$\forall a_1 \in \mathcal{A}_1,\ v \in V_1 \ \text{ gilt } \ F(a_1 + v) = F(a_1) + f(v) \qquad (**)$$

## Lemma 10

*Eine affine Abbildung $F$ ist eine Affinität $\Longleftrightarrow$ $f$ ist ein Isomorphismus.*

**Beweis** Nach Definition, Bijektiv = surjektiv und injektiv. Wir zeigen zuerst , dass $F$ g.d.w. injektiv ist, wenn $f$ injektiv ist. Danach zeigen wir, dass $F$ g.d.w. surjektiv ist, wenn $f$ surjektiv ist.

Sei $f$ injektiv. Man betrachte $a \neq b \in \mathcal{A}_1$. Nach Lemma 7b $\overrightarrow{ab} \neq \vec{0}$. Dann ist $\overrightarrow{F(a)\,F(b)} = f(\vec{ab}) \neq \vec{0}$. Dann ist $F(a) \neq F(b)$, also $F$ ist injektiv. Sei jetzt $F$ injektiv. Dann ist $\overrightarrow{F(a)\,F(b)} \neq \vec{0}$ für $a \neq b$. Dann ist $f(\vec{ab}) \neq \vec{0}$ und $f$ ist injektiv.

# Wir zeigen jetzt, dass $f$ g.d. surjektiv ist, w. $F$ surjektiv ist.

Für eine affine Abbildung $F$ gibt es eine lineare Abbildung $f : V_1 \to V_2$, so dass $\forall a, b \in \mathcal{A}_1$ gilt

$$f(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{F(a)\,F(b)} \qquad (*)$$

Alternative Formulierung:

$$\forall a_1 \in \mathcal{A}_1,\ v \in V_1 \ \text{ gilt } \ F(a_1 + v) = F(a_1) + f(v) \qquad (**)$$

$f$ sei surjektiv. Betrachte $a_1 \in \mathcal{A}_1$, $a_2 := F(a_1) \in \mathcal{A}_2$. Nach $(A_2)$ gilt:

$$\mathcal{A}_1 := \{a_1 + v_1 \ \mid \ v_1 \in V_1\} \quad \mathit{und} \quad \mathcal{A}_2 := \{a_2 + v_2 \ \mid \ v_2 \in V_2\}.$$

Da alle $v_2 \in V_2$ Bilder von Elementen von $V_1$ sind, ist wegen $(**)$ auch $\mathit{Bild}_F = \mathcal{A}_2$, also $F$ ist surjektiv.

Sei $F$ surjektiv. Dann gilt: $\{F(b_1) \mid b_1 \in \mathcal{A}_1\} = \mathcal{A}_2$. Dann gilt $V_2 = \{\overrightarrow{F(a_1)\,F(b_1)} \mid b_1 \in \mathcal{A}_1\}$, und $f$ ist deswegen surjektiv. $\square$

Wir wollen alle affinen Abbildungen von $\mathcal{A}_1$ nach $\mathcal{A}_2$ beschreiben.

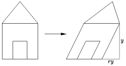
**Satz 12.** *Seien $\mathcal{A}_1 = \mathbb{K}^n$, $\mathcal{A}_2 = \mathbb{K}^m$ Standard-Räume. (Diese sind affine Räume über $\mathbb{K}^n$ bzw. $\mathbb{K}^m$.) Dann kann man jede affine Abbildung $F : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ als $F(x) = a + Ax$ schreiben, wobei $a \in \mathbb{K}^m$ und $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$ sind.*

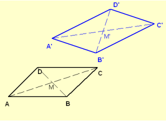
**Beweis.** Setze $a = F(\vec{0})$. Da $\vec{0} + x = x$, ist
$F(x) = F(\vec{0} + \vec{x}) \overset{(**)}{=} F(\vec{0}) + f(x) = a_1 + Ax$ für eine Matrix $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$. $\square$

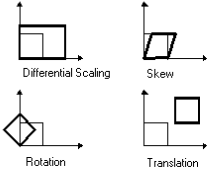
# Affine Abbildungen und Affinitäten: Zusammenfassung

**Def (Wiederholung).** Seien $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$ zwei affine Räume. Die Abbildungen der Form $F_{f,w}(v) := T_w \circ f(v) := f(v) + w$, wobei $f$ eine lineare Abbildung ist, sind affine Abbildungen. Aus Satz 12 folgt, dass jede affine Abbildung ist so darstellbar.

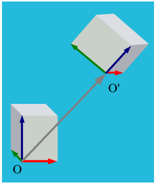
Ist $m = n$ und $f$ eine Bijektion ( also ein (linearer) Isomorphismus), so heißt $F$ eine Affinität.






**Dasselbe in Koordinaten:** Sei $A$ eine $m \times n-$Matrix über $\mathbb{K}$ und $w \in \mathbb{K}^m$. Dann sind die affinen Abbildungen die Abbildungen der Form $F_{A,w} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ , $F_{A,w}(x) := Ax + w$. Ist $m = n$ und $A$ nichtausgeartet, so ist $F_{A,w}$ eine Affinität.



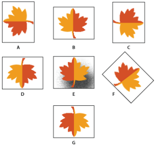



Bild von adobe.com

# Affine Koordinaten

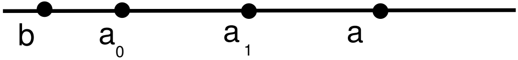
**Def.** *Sei $\mathcal{A}$ ein affiner Raum über einem $\mathbb{K}$- Vektorraum $V$, $dim(V) = n \geq 1$. Ein $(n+1)$-Tupel $(a_0, ..., a_n)$ von Punkten $a_0, ..., a_n$ aus $\mathcal{A}$ heißt* Koordinatensystem *für $\mathcal{A}$, falls die Vektoren $\overrightarrow{a_0 a_1}, \overrightarrow{a_0 a_2}, \overrightarrow{a_0 a_3}, ..., \overrightarrow{a_0 a_n}$ linear unabhängig sind (und damit eine Basis von $V$ bilden). Ist $x \in \mathcal{A}$ ein beliebiger Punkt, so gilt*

$$\overrightarrow{a_0 x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \overrightarrow{a_0 a_i}$$

*mit durch $x$ eindeutig bestimmten $x_i \in \mathbb{K}$. Diese $x_i$ heißen die* Koordinaten *von $x$ bzgl. des Koordinatensystems $(a_0, ..., a_n)$ und $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ heißt der* Koordinatenvektor *von $x$.*

# Koordinaten auf einer Gerade

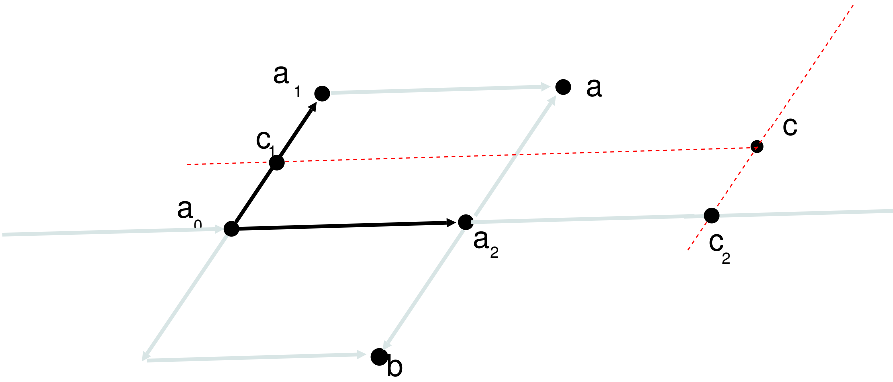
Gerade $=$ 1-dimensionaler affiner Raum
Koordinatensystem besteht aus $n+1=2$ Punkten $(a_0, a_1)$ s.d. $a_0 \neq a_1$.
Koordinatenvektor eines Punktes $a$ besteht aus einem Zahl $x$ s.d. $a_0 + x\overrightarrow{a_0 a_1} = a$




| Punkt | Koordinate |
|---|---|
| $a_1$ | 1 |
| $a_0$ | 0 |
| $a$ | 2 |
| $b$ | -1/2 |

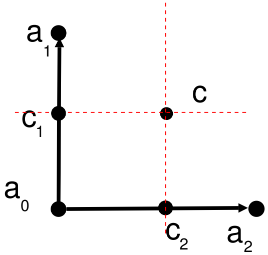
# Koordinaten auf einer Ebene

Ebene = 2-dimensionaler affiner Raum
Koordinatensystem besteht aus $n+1=3$ Punkten $(a_0, a_1, a_2)$ s.d. $\{\overrightarrow{a_0 a_1}, \ \overrightarrow{a_0 a_2}\}$ linear unabhängig sind. Dann sind auch $\overrightarrow{a_0 a_1}$ $\overrightarrow{a_0 a_2}$ nichtproportional.
Koordinatenvektor eines Punkts $a$ ist $\binom{x_1}{x_2}$ s.d. $a_0 + x_1\overrightarrow{a_0 a_1} + x_2\overrightarrow{a_0 a_2} = a$
Für $a$ auf dem Bild: $\binom{1}{1}$ Für $b$: $\binom{-1}{1}$ Für $c$: $\binom{1/2}{2}$



**Frage** *Wann sind affine Koordinaten auf der (üblichen) Ebene kartesisch?*

**Antwort** Wenn die Strecken $(a_0, a_i)$ die Länge 1 haben und paarweise orthogonal sind.
Weil in diesem Fall das Parallelogramm $a_0 c_1 c c_2$ ein Rechteck ist und deswegen die Punkte $c_1, c_2$ die Projektionen von $c$ auf die Geraden $a_0 a_1$, $a_0 a_2$ sind. Da die Länge von $\lambda \vec{v}$ gleich $|\lambda||\vec{v}|$ ist, sind die Koordinaten von $c$ die Längen von $(a_0, c_1)$ und $(a_0, c_2)$ (mit Vorzeichen).



**Satz 13(Hauptsatz der affinen Geometrie)** *Seien $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ zwei affine Räume der gleichen Dimension $n$ (über $\mathbb{K}-$Vektorräumen $V_1$ bzw. $V_2$). Seien $(a_0, ...a_n)$ und $(b_0, ..., b_n)$ die Koordinatensysteme in $\mathcal{A}_1$ bzw. $\mathcal{A}_2$. Dann existiert genau eine affine Abbildung $F : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ s.d. $F(a_i) = b_i$. Diese Abbildung ist eine Affinität.*

**Beweis.** Nach Definition sind $(\overrightarrow{a_0a_1}, \overrightarrow{a_0a_2}, \overrightarrow{a_0a_3}, ..., \overrightarrow{a_0a_n})$ und $(\overrightarrow{b_0b_1}, \overrightarrow{b_0b_2}, \overrightarrow{b_0b_3}, ..., \overrightarrow{b_0b_n})$ Basen von $V_1$ bzw. $V_2$. Nach Satz 30 LAAG I gibt es genau eine lineare Abbildung $f$, so dass $f(\overrightarrow{a_0a_i}) = \overrightarrow{b_0b_i}$. Da die Tupel Basen sind, ist $f$ ein Isomorphismus. Betrachte die Abbildung

$$F : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2, \quad F(a) := b_0 + f(\overrightarrow{a_0a}) \ \text{(aus dem Hauptbsp.)}$$

Die Abbildung ist eine Affinität nach Lemma 10. Z.z.: $F(a_i) = b_i$. $F(a_0) = b_0$, da $\overrightarrow{a_0a_0} \overset{Lem.7b}{=} \vec{0}$ und $b_0 + f(\vec{0}) \overset{Lem.7b}{=} b_0$

$$F(a_i) = F(a_0 + \overrightarrow{a_0a_i}) = F(a_0) + f(\overrightarrow{a_0a_i}) = b_0 + \overrightarrow{b_0b_i} = b_i.$$

$\square$

**Folgerung** *Alle affinen Räume (über einem $\mathbb{K}$ − Vektorraum) der gleichen endlichen Dimension sind affin isomorph.*

Diese Aussage erlaubt, alle Probleme der (endlichdimensionalen) affinen Geometrie in einem $\mathbb{K}^n$ zu betrachten.

# Affine Hülle

**Wiederholung.** Der Vektor $x \in \mathbb{K}^n$ ist eine lineare Kombination der Vektoren $x_1, ..., x_k \in \mathbb{K}^n$, wenn es Zahlen $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ gibt mit $x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_k x_k$.

**Def.** Gibt es solche Zahlen $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ mit $\lambda_1 + ... + \lambda_k = 1$, so ist der Punkt $x \in \mathbb{K}^n$ eine affine Kombination der Punkte $x_1, ..., x_k \in \mathbb{K}^n$.

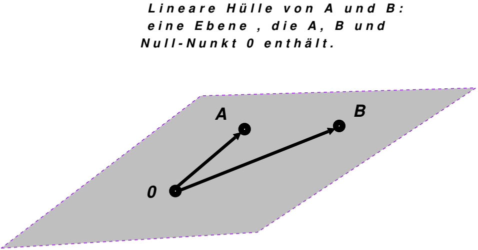
Eine affine Kombination ist also eine Linearkombination, sodass die Summe der Koeffizienten gleich 1 ist (hat in jedem Körper Sinn, da 1 in jedem Körper wohldefiniert ist, als neutrales Element der Gruppe $(\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$).

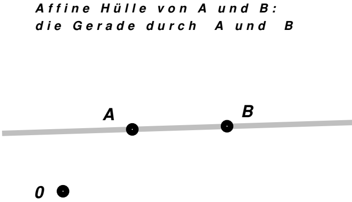
**Bemerkung.** Dies ist äquivalent zu „$x - x_1$ ist lineare Kombination der Vektoren $x_2 - x_1, x_3 - x_1, ..., x_k - x_1$."
Tatsächlich, in diesem Fall ist $\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \lambda_3 - ... - \lambda_k$, und

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_k x_k \\ &= x_1 + (-\lambda_2 - ... - \lambda_k) x_1 + \lambda_2 x_2 ... + \lambda_k x_k \\ &= x_1 + \lambda_2 (x_2 - x_1) + \lambda_3 (x_3 - x_1) + ... + \lambda_k (x_k - x_1) \end{aligned}$$

**Wiederholung.** Für $A \subseteq \mathbb{K}^n$ ist die lineare Hülle $Span(A)$ die Menge aller (endlichen) linearen Kombinationen von Elementen von $A$. $Span(A)$ ist zugleich der kleinste lineare Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$, der $A$ enthält, und die Schnittmenge von allen linearen Untervektorräumen von $\mathbb{K}^n$, die $A$ enthalten (LA I).

**Def.** Für $A \subseteq \mathbb{K}^n$ ist die affine Hülle $Aff(A)$ die Menge aller (endlichen) affinen Kombinationen von Elementen von $A$.



**Lemma 11.** Sei $A = \{x_1, ..., x_k\} \subseteq \mathbb{K}^n$. Dann gilt: $\mathit{Aff}(A)$ ist ein affiner Unterraum über dem Untervektorraum $\mathit{span}(x_2 - x_1, x_3 - x_1, ..., x_k - x_1)$.

(**Wiederhol. –** aff. Raum über $U$ ist die Menge $\{a_0 + u \mid u \in U\}$.)

Ferner gilt: Enthält ein affiner Unterraum $\mathcal{U}$ alle Punkte $x_1, ..., x_k$, so gilt $\mathit{Aff}(A) \subseteq \mathcal{U}$.

**Bemerkung.** Die letzte Aussage des Lemmas kann man wie folgt umformulieren: $\mathit{Aff}(A)$ ist der kleinste affine Unterraum von $\mathbb{K}^n$, der $A$ enthält (vergl. die analoge Aussage über Untervektorräume aus LA I).

**Bemerkung.** Wir sehen, dass die Dimension von $\mathit{Aff}(A)$ höchstens $k - 1 = \#A - 1 = \#\{x_2 - x_1, x_3 - x_1, ..., x_k - x_1\}$ ist.

**Beweis.** Z.z.:

(i) $\mathit{Aff}(A) \subseteq \{x_1 + v \mid v \in \mathit{span}(x_2 - x_1, x_3 - x_1, ..., x_k - x_1)\}$, d.h., Jedes $x \in \mathit{Aff}(A)$ kann man als $x_1 + v$ darstellen, wobei $v \in \mathit{span}(x_2 - x_1, x_3 - x_1, ..., x_k - x_1)$.

(ii) $\mathit{Aff}(A) \supseteq \{x_1 + v \mid v \in \mathit{span}(x_2 - x_1, x_3 - x_1, ..., x_k - x_1)\}$, d.h., für jedes $v \in \mathit{span}(x_2 - x_1, x_3 - x_1, ..., x_k - x_1)$ gilt: $x_1 + v \in \mathit{Aff}(A)$.

(iii) Für jeden affinen Unterraum $\mathcal{U}$ mit $A \subseteq \mathcal{U}$ gilt: $\mathit{Aff}(A) \subseteq \mathcal{U}$.

# Beweis von (i): $Aff(A) \subseteq \{x_1 + v \mid v \in span(x_2 - x_1, x_3 - x_1, ..., x_k - x_1)\}$

Wir haben diese Aussage praktisch in der Bemerkung nach der Definition der affinen Hülle gezeigt.

Angenommen $x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_k x_k$ wobei $\lambda_1 + ... + \lambda_k = 1$.

Dann ist $\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \lambda_3 - ... - \lambda_k$, und

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_k x_k \\ &= x_1 + (-\lambda_2 - ... - \lambda_k) x_1 + \lambda_2 x_2 ... + \lambda_k x_k \\ &= x_1 + \lambda_2 (x_2 - x_1) + \lambda_3 (x_3 - x_1) + ... + \lambda_k (x_k - x_1) \end{aligned}$$

Dann ist $x - x_1$ eine lineare Kombination der Vektoren $x_2 - x_1, x_3 - x_1, ..., x_k - x_1$, also ein Element (z.B. $v$) von $span(x_2 - x_1, x_3 - x_1, ..., x_k - x_1)$. Also, $x = x_1 + v$. $\square$

# Beweis von (ii): $Aff(A) \supseteq \{x_1 + v \mid v \in span(x_2 - x_1, x_3 - x_1, ..., x_k - x_1)\}$

Z.z.: für jedes $v = \lambda_2(x_2 - x_1) + \lambda_3(x_3 - x_1) + ... + \lambda_k(x_k - x_1)$ liegt $x_1 + v$ in $Aff(A)$.

$x_1 + v = x_1 + \lambda_2(x_2 - x_1) + \lambda_3(x_3 - x_1) + ... + \lambda_k(x_k - x_1)$
$= \underbrace{(1 - \lambda_2 - \lambda_3 - ... - \lambda_k)}_{\lambda_1} x_1 + (\lambda_2 + \lambda_3 + ... + \lambda_k)x_1 + \lambda_2(x_2 - x_1) +$
$\lambda_3(x_3 - x_1) + ... + \lambda_k(x_k - x_1)$
$= \lambda_1 x_1 + \lambda_2(x_1 + (x_2 - x_1)) + \lambda_3(x_1 + (x_3 - x_1)) + ... + \lambda_k(x_1 + (x_k - x_1)) =$
$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_k x_k$.
Da die Summe der Koeffizienten $\lambda_1, ..., \lambda_k$ gleich $(1 - \lambda_2 - \lambda_3 - ... - \lambda_k) + \lambda_2 + \lambda_3 + ... + \lambda_k = 1$ ist, ist $x_1 + v$ eine affine Kombination von $x_1, ..., x_k$.

# Beweis (iii): Ist $A \subseteq \mathcal{U}$, so ist $Aff(A) \subseteq \mathcal{U}$

> **Wied. – Lemma 8.** Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{K}^n$ affiner Unterraum über dem Untervektorraum $V_{\mathcal{U}}$, d.h., $\mathcal{U} = \{a_0 + v \mid v \in V_{\mathcal{U}}\}$. Sei $a_1 \in \mathcal{U}$ ein beliebiger Punkt. Dann gilt: $\mathcal{U} = \{a_1 + v, \quad \text{wobei } v \in V_{\mathcal{U}}\ \}$.

Wegen Lemma 8 können wir oBdA annehmen, dass $\mathcal{U} = \{x_1 + u \mid u \in V_{\mathcal{U}}\}$.
Dann sind alle Punkte $x_2, \ldots, x_k \in A$ gleich $x_2 = x_1 + u_2$, $x_3 = x_1 + u_3$, ..., $x_k = x_1 + u_k$ wobei $u_2, \ldots, u_k \in V_{\mathcal{U}}$. Dann sind $(x_2 - x_1)$, $(x_3 - x_1)$,...,$(x_k - x_1) \in V_{\mathcal{U}}$. Dann ist
$span(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_k - x_1) \subseteq V_{\mathcal{U}}$. $\qquad (*)$

Dann gilt $Aff(A) \overset{(i)}{\subseteq} \{x_1 + v \mid v \in span(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_k - x_1)\} \overset{(*)}{\subseteq} \{x_1 + v \mid v \in V_{\mathcal{U}}\} = \mathcal{U}$. $\square$

**Lemma 11.** Sei $A = \{x_1, \dots, x_k\}$. Dann gilt: $Aff(A)$ ist ein affiner Raum über dem Untervektorraum $span(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_k - x_1)$. Ferner gilt: Enthält ein affiner Unterraum $\mathcal{U}$ alle Punkte $x_1, \dots, x_k$, so gilt $Aff(A) \subseteq \mathcal{U}$.

**Folgerung.** Jeden affinen Unterraum von $\mathbb{K}^n$ kann man als affine Hülle einer endlichen Teilmenge darstellen.

**Beweis.** In der Tat, sei $\mathcal{U} = \{x_1 + v \mid v \in V\}$. Wir nehmen eine Basis $(v_2, \dots, v_k) \in V$ (endlich, weil $dim(\mathbb{K}^n)$ endlich ist). Sei $x_i := x_1 + v_i$, $i = 2, \dots, k$ Dann ist $Aff(x_1, \dots, x_k) \overset{\text{Lem. 11}}{=} \{x_1 + v \mid v \in span(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_k - x_1)\} = \{x_1 + v \mid v \in V\}$.

**Def.** *Sei $M \neq \varnothing$ eine Teilmenge des affinen Raums $\mathbb{K}^n$. Sie heißt affin abgeschlossen, falls $M$ mit je zwei Punkten $a \neq b$ auch die Gerade $L(a,b) := \{a + \lambda(b-a) \text{ wobei } \lambda \in \mathbb{K}\}$ durch $a$ und $b$ enthält.*

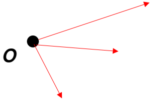
**Bemerkung.** Die Menge $L(a,b) := \{a + \lambda(b-a) \text{ wobei } \lambda \in \mathbb{K}\}$ ist tatsächlich die Gerade durch $a$ und $b$: Sie ist eine Gerade ($=$ 1-dim affiner Raum), weil sie die Form $\{a + v \in v \in span(b-a)\}$ hat. Sie enthält die Punkte $a$ (entspricht $\lambda = 0$) und $b$ (entspricht $\lambda = 1$).

**Bsp.** Ein affiner Unterraum ist eine affin abgeschlossene Teilmenge.

In der Tat, sei $\mathcal{U}$ ein affiner Raum sodass $a, b \in \mathcal{U}$. Nach Lemma 8 können wir oBdA den Punkt $a$ als den Punkt unseres affinen Unterraums $\mathcal{U}$ nehmen. Dann besteht der Unterraum aus Punkten der Form $a + v$ wobei $v$ in einem Untervektorraum $V_{\mathcal{U}}$ liegen. Liegt $b$ im affinen Unterraum, so liegt $b - a$ im Untervektorraum $V_{\mathcal{U}}$. Dann liegen alle Punkte der Geraden $L(a,b) := \{a + \lambda(b-a) \text{ wobei } \lambda \in \mathbb{K}\}$ in $\mathcal{U}$.

**Bsp. einer affin abgeschlossenen Teilmenge, die kein Unterraum ist:**

Man betrachte $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ und den affinen Raum $(\mathbb{Z}_2)^2$.




Nach Definition besteht die Gerade, die die Punkte $a, b$ enthält aus allen Punkten der Form $a + \lambda(b - a)$. Da $\lambda \in \{0, 1\} = \mathbb{Z}_2$, besteht die ganze Gerade nur aus 2 Punkten $a$ und $b$. Deswegen ist jede Menge in $(\mathbb{Z}_2)^2$ affin abgeschlossen.
Aber die Menge $(\mathbb{Z}_2)^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ist kein Unterraum (weil die Vektoren $\binom{1}{0} - \binom{1}{1} = \binom{0}{1}$, $\binom{0}{1} - \binom{1}{1} = \binom{1}{0}$ linear unabhängig sind; also jeder diese Punkte enthaltende affine Unterraum mit $(\mathbb{Z}_2)^2$ zusammenfallen muss. )

**Def – Wiederh.** *Sei $M \neq \varnothing$ eine Teilmenge des $\mathbb{K}-$ affinen Raums $\mathbb{K}^n$. Sie heißt affin abgeschlossen, falls $M$ mit je zwei Punkten $a \neq b$ auch die Gerade $L(a,b) := \{a + \lambda(b-a) \text{ wobei } \lambda \in \mathbb{K}\}$ durch $a$ und $b$ enthält.*

**Satz 14** *Angenommen, in dem Körper $\mathbb{K}$ gilt: $1+1 \neq 0$. Dann gilt: Eine affin abgeschlossene Teilmenge $M$ des affinen Raums $\mathbb{K}^n$ ist ein affiner Unterraum.*

**Bemerkung.** Es gibt Körper, so dass $1+1=0$. Z.B. ist in $\mathbb{Z}_2$ $1+1=0$. Das erklärt auch, warum wir für das Beispiel auf der vorherigen Folie einen affinen Raum über $\mathbb{Z}_2$ gewählt haben.

**Konvention.** Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Das neutrale Element der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{K}^* := \mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ bezeichnen wir mit $1$.
Wir werden Element $1+1$ mit 2 bezeichnen; $1+1+1$ mit 3 usw.
**Bsp:** in $\mathbb{Z}_2$ ist „2“$=0$; „3“$=1$. In $\mathbb{Z}_3$ ist „2“ $=2$,„3“ $=0$, „4“ $=1$ usw.
**Bsp:** in $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ gilt „$k$“$=k$.
Falls ein Element $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{k \text{ Stück}} \neq 0$ ist, werden wir das inverse Element mit $\frac{1}{k}$ bezeichnen.
**Bsp:** In $\mathbb{Z}_2$ ist “$\frac{1}{2}$“ nicht definiert, da „2“$=0$. In $\mathbb{Z}_2$ ist “$\frac{1}{3}$“ $=1$
In $\mathbb{Z}_3$ ist „$\frac{1}{2}$“ $=2$, weil $2 \cdot 2 = 1 \quad (= 4 \mod 3)$.
**Bsp:** in $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ gilt „$\frac{1}{k}$“$=\frac{1}{k}$.

# $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Wie in der Konvention: $\frac{1}{2}$ ist das Element von $\mathbb{K}$ so dass $\frac{1}{2} \cdot \underbrace{(1+1)}_{„2“} = 1$.

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \overset{\text{Distributionsgesetz}}{=} \frac{1}{2}(1+1) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$

**Def** *Sei $M \neq \varnothing$ eine Teilmenge des $\mathbb{K}-$ affinen Raums $\mathbb{K}^n$. Sie heißt affin abgeschlossen, falls $M$ mit je zwei Punkten $a \neq b$ auch die Gerade $L(a,b) := \{a + \lambda(b-a) \text{ wobei } \lambda \in \mathbb{K}\}$ durch $a$ und $b$ enthält.*

**Satz 14.** *Angenommen, in dem Körper $\mathbb{K}$ gilt : $1+1 \neq 0$. Dann gilt: Eine affin abgeschlossene Teilmenge $M$ des affinen Raums $\mathbb{K}^n$ (über $\mathbb{K}$- Vektorraum $V$) ist ein (affiner) Unterraum.*

**Beweis.** Angenommen, $M$ ist affin abgeschlossen und $a_0 \in M$. Z.z.: $U := \{a - a_0 \text{ wobei } a \in M\}$ ist ein Untervectorraum. (Da $M := \{a_0 + u \text{ wobei } u \in U\}$, ist dann $M$ ein affiner Unterraum).

Z.z:. (i) Ist $v \in U$, so ist $\lambda v \in U$. (ii) Sind $v, w \in U$, so ist $v + w \in U$.
Wir zeigen (i). Es gilt: $\overrightarrow{0} = a_0 - a_0 \in U$. Sei $v \in U$, $v \neq \overrightarrow{0}$, d.h. $v = a - a_0$ für $a \in M$, $a \neq a_0$. Dann liegen alle Punkte der Geraden $L(a_0, a) := \{a_0 + \lambda(a - a_0) \text{ wobei } \lambda \in \mathbb{K}\}$ in $M$, also $\lambda(a - a_0) \in U$.
Wir zeigen (ii). Seien $v = a - a_0 \in U$, $w = b - a_0 \in U$ mit $a, b \in M$. Gilt $v = w$, so folgt nach (i) $v + w = 2v \in U$. Wir können also annehmen, dass $v \neq w$ und damit $a \neq b$. Nach Voraussetzungen gilt dann $L(a,b) \subseteq M$. Wegen
$b - a = a_0 - a + (b - a_0) = -(a - a_0) + (b - a_0) = w - v$ gilt dann
$L(a,b) = \{a + \lambda(w - v) \text{ wobei } \lambda \in \mathbb{K}\} =$
$\{a_0 + (1-\lambda)v + \lambda w \text{ wobei } \lambda \in \mathbb{K}\}$. Für $\lambda = \frac{1}{2}$ erhalten wir
$a_0 + (1 - \frac{1}{2})v + \frac{1}{2}w = a_0 + \frac{1}{2}(v + w) \in M$, also $\frac{1}{2}(v+w) \in U$. Nach (i) folgt $2 \cdot \frac{1}{2}(v + w) \in U$. $\square$

# Zusammenfassung: 4 äquivalente Definitionen eines affinen Unterraums von $\mathbb{K}^n$

Wir betrachten den affinen Raum $\mathbb{K}^n$.

**Ursprüngliche Definition 0.** *Ein Affiner Unterraum ist eine Teilmenge* $\mathcal{U}$ *der Form* $\{a_0 + v, \quad wobei\ v \in V_{\mathcal{U}}\ \}$, *wobei* $V_{\mathcal{U}}$ *ein Untervektorraum von* $V$ *ist.*

**Def a.** Die affine Hülle $Aff(A)$ von einer (endlichen) Teilmenge von $\mathbb{K}^n$ heißt ein affiner Unterraum.

Equivalenz von Definitionen 0 und $a$: Lemma 11

**Def. b** Ein affiner Unterraum ist die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ (unter der Annahme, dass das System mind. eine Lösung hat).

Äquivalenz von Definitionen 0 und $b$: Eine Richtung: Lemma 8. Andere Richtung: Hausaufgabe.

**Def. c** Ein affiner Unterraum ist eine affin abgeschlossene nichtleere Teilmenge von $\mathbb{K}^n$

Äquivalenz von Definitionen 0 und $c$: Satz 14

Man bemerke: Definition c benötigt nur Geraden

- Die Mehrheit der Aussagen aus dem Abschnitt “Affine Geometrie” haben wir nach folgendem Muster bewiesen:
  - Wir haben die Aussage auf eine Aussage aus der Linearen Algebra reduziert (mit Hilfe der Eigenschaften $A_1$, $A_2$, Lemma 7b und Lemma 8).
  - Diese Aussage haben wir bereits in LA I bewiesen.
- Satz 14 “(die äquivalente Definition von Unterraum als affin abgeschlossene Menge)” war die einzige Ausnahme. Obwohl die affinen Unterräume mit Hilfe von Untervektorräumen definiert wurden, benötigen wir laut Satz 14 eigentlich nur Informationen über Geraden, um zu verstehen, ob eine Teilmenge ein Unterraum ist.
- Die nächste Aussage, der Fundamentalsatz der affinen Geometrie, ist eine weitere Ausnahme. Dieser Satz zeigt, dass auch Affinität nur Geraden benötigt.

# Fundamentalsatz der reellen affinen Geometrie

**Satz 15 (Fundamentalsatz der affinen Geometrie über $\mathbb{R}$)** Wir betrachten den $(n \geq 2)$-dimensionalen reellen affinen Raum $\mathbb{R}^n$.
Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Bijektion, welche Geraden auf Geraden abbildet.
Dann ist $F$ eine Affinität.

**Wiederholung Def.** Eine Affinität ist eine affine bijektive Abbildung.

**Wiederholung Def.** Eine affine Abbildung (von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$) ist eine Abbildung der Form $F(x) = a_0 + f(x)$, wobei $a_0 \in \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung ist.

**Wie wird der Satz sonst formuliert. Def:** Eine bijektive Abbildung $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt Kollinearität, wenn sie geradentreu ist, also wenn sie Geraden auf Geraden abbildet.

**Satz 15'.** Eine Kollinearität $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist eine Affinität.

Der nicht ganz einfache Beweis vom Satz 15 wird durch eine Reihe von Hilfslemmata (1 – 6) durchgeführt. Wir brachewn vorher noch eine Definition, von parallelen affinen Unterräumen, und die Aussage, dass auf der Ebene zwei verschidenen Geraden g.d.w. parallel sind, wenn sie keine Schnittpunkte haben. Wir nehmen stets an, dass $n \geq 2$, dass $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, und dass $F$ wie im Satz ist, also

- bijektiv ist und
- Geraden auf Geraden abbildet .

# Parallele Unterräume

Sei $\mathcal{A}$ ein affiner Raum und $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ zwei Unterräume.
Sie heißen parallel, wenn $V_{\mathcal{U}_1} \subseteq V_{\mathcal{U}_2}$ oder $V_{\mathcal{U}_2} \subseteq V_{\mathcal{U}_1}$. ("oder" ist mathematisch zu verstehen, d.h. $V_{\mathcal{U}_2} = V_{\mathcal{U}_1}$ ist auch erlaubt).
**Bsp.** Jeder Unterraum $\mathcal{U}$ ist immer zu sich selbst parallel.
Als Hausaufgabe werden Sie zeigen: Seien $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ zwei Unterräume von $\mathcal{A}$, sodass $\mathcal{U}_2 \neq \mathcal{A}$ und $\dim(\mathcal{U}_1) + 1 = \dim(\mathcal{A})$. Dann gilt: Sie sind genau dann parallel, wenn eine der folgenden Aussagen erfüllt ist:

- $\mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}_1$,
- $\mathcal{U}_1 \bigcap \mathcal{U}_2 = \varnothing$

In den nächsten Folien werden wir den folgenden Spezialfall dieser Hausaufgabe benötigen: Zwei Geraden in einem 2-dimensionalen affinen Raum sind genau dann parallel, wenn sie zusammenfallen oder keine Schnittpunkte haben.

# Exkurs: Ebenen als affine Räume

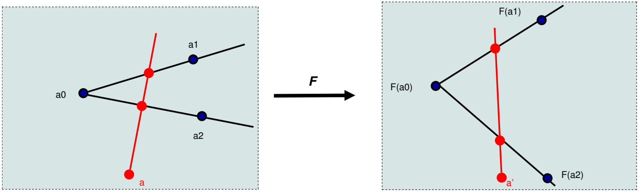
Wir identifizieren jede Ebene $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^n$ mit dem affinen Raum $\mathbb{R}^2$: Die Ebene ist ein 2-dim. Unterraum, also eine Menge der Form $\{a + s \cdot v + t \cdot u \mid s, t \in \mathbb{R}\}$, wobei $u, v$ zwei linear unabhängige Vektoren sind. Wir identifizieren dann die Ebene $\mathcal{E}$ mit $\mathbb{R}^2$ wie folgt: Der Punkt $\binom{s}{t} \in \mathbb{R}^2$ wird mit $a + s \cdot v + t \cdot u$ identifiziert. Diese Abbildung ist offensichtlich eine Bijektion. Im späteren Beweis wird für uns wichtig sein, dass (i) die Geraden auf $\mathcal{E}$ den Geraden auf $\mathbb{R}^2$ entsprechen und dass (ii) die parallelen Geraden auf $\mathcal{E}$ den parallelen Geraden auf $\mathbb{R}^2$ entsprechen.

Beweis (i). Für die Gerade $\{a_0 + \lambda w \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, die auf $\mathcal{E}$ liegt, gilt: $w = s_1 v + t_1 u$ und $a_0 = a + s_2 v + t_2 u$ für irgendwelche $s_i, t_i$. Dann gilt: $\{a_0 + \lambda w = a + s_2 v + t_2 u + \lambda \cdot (s_1 v + t_1 u) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ entspricht nach dem Identifizieren der Geraden $\{\binom{s_2}{t_2} + \lambda \binom{s_1}{t_1} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ (und umgekehrt).

Beweis (ii). Für die parallelen Geraden $\{a_0 + \lambda w \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ und $\{a_0' + \lambda w \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, die auf $\mathcal{E}$ liegen, gilt: $w = s_1 v + t_1 u$ und $a_0 = a + s_2 v + t_2 u$ bzw. $a_0' = a + s_2' v + t_2' u$ für irgendwelche $s_i, t_i, s_2', t_2'$. Wie oben erklärt, entsprechen die Geraden nach dem Identifizieren den Geraden $\{\binom{s_2}{t_2} + \lambda \binom{s_1}{t_1} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ und $\{\binom{s_2'}{t_2'} + \lambda \binom{s_1}{t_1} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, die offensichtlich parallel sind.

**Hilfslemma 1.** Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine affine Ebene. Dann ist $Bild_F(\mathcal{E}) \subseteq \mathbb{R}^n$ ebenfalls eine affine Ebene.

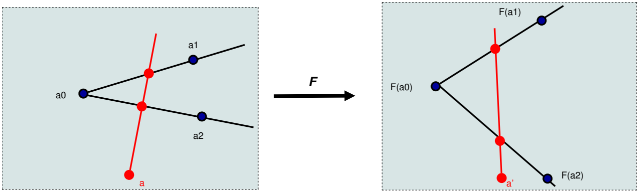
**Beweis.** Wir betrachten ein nicht kollineares Punktetripel $(a_0, a_1, a_2)$ von Punkten aus $\mathcal{E}$. Dann gilt: $L(a_0, a_1) \cap L(a_0, a_2) = \{a_0\}$ (wobei $L(a_0, a_i)$ die Gerade durch $a_0, a_i$ ist).




Da $F$ injektiv ist und $Bild_F(L(a_0, a_1)) = L(F(a_0), F(a_1))$, sowie $Bild_F(L(a_0, a_2)) = L(F(a_0), F(a_2))$, folgt $L(F(a_0), F(a_1)) \cap L(F(a_0), F(a_2)) = \{F(a_0)\}$.

Deshalb existiert genau eine Ebene $\mathcal{E}_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, die $L(F(a_0), F(a_1))$ und $L(F(a_0), F(a_2))$ enthält. Wir zeigen: $\mathcal{E}_0 = Bild_F(\mathcal{E})$. Dazu zeigen wir die folgenden zwei Aussagen: (i) $\mathcal{E}_0 \supseteq Bild_F(\mathcal{E})$, und (ii) $\mathcal{E}_0 \subseteq Bild_F(\mathcal{E})$

# Beweis (i): $\mathcal{E}_0 \supseteq Bild_F(\mathcal{E})$




Sei $a \in \mathcal{E} \setminus (L(a_0, a_1) \cup L(a_0, a_2))$. Z.z.: $F(a) \in \mathcal{E}_0$.
Es gibt eine Gerade $L \subseteq \mathcal{E}$ mit $a \in L$, die $L(a_0, a_1)$ und $L(a_0, a_2)$ schneidet, und zwar nicht in $a_0$.
Da $F$ Geraden auf Geraden abbildet, ist $Bild_F(L)$ eine Gerade. Da die Gerade $Bild_F(L)$ zwei Punkte der Ebene $\mathcal{E}_0$ enthält, liegt $Bild_F(L)$ in der Ebene $\mathcal{E}_0$; deswegen ist $F(a) \in \mathcal{E}_0$. Damit haben wir $Bild_F(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{E}_0$ bewiesen.

# Beweis (ii): $\mathcal{E}_0 \subseteq Bild_F(\mathcal{E})$

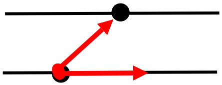
(ii) Da die Umkehrabbildung $F^{-1}$ auch
- eine Bijektion ist,
- Geraden auf Geraden abbildet,

gilt $Urbild(\mathcal{E}_0) = Bild_{F^{-1}}(\mathcal{E}_0) \subseteq \mathcal{E}$, deswegen gilt $\mathcal{E}_0 \subseteq Bild_F(\mathcal{E})$. $\square$

**Hilfslemma 2.** $F$ bildet parallele Geraden auf parallele Geraden ab.

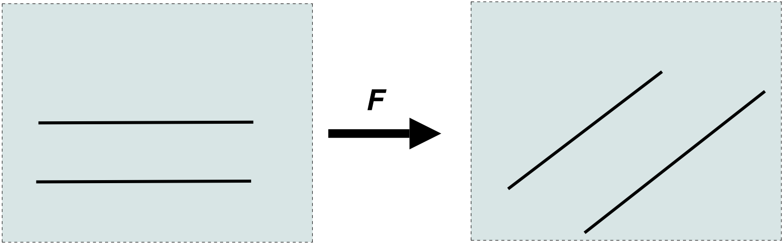
**Im Beweis benutzen wir die folgende Hausaufgabe:** *In jeder Ebene $\mathcal{E}$ sind zwei Geraden ohne Schnittpunkte parallel.*

**Beweis von HL 2.** Seien $L_0 \neq L_1$ parallele Geraden in $\mathbb{R}^n$, meinetwegen $L_0 := \{a_0 + \lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ und $L_1 := \{a_1 + \lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Dann existiert eine Ebene $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $L_i \subseteq \mathcal{E}$.



In der Tat, wir betrachten die Ebene $\mathcal{E} := \{a_0 + \lambda \cdot v + \mu \cdot u \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$, wobei $u := a_1 - a_0$. Die beiden Geraden liegen in $\mathcal{E}$: Die Punkte der Geraden $L_0$ erhalten wir, wenn wir $\mu = 0$ setzen, und die Punkte der Geraden $L_1$ erhalten wir, wenn wir $\mu = 1$ setzen.

Nach Hilfslemma 1 ist dann $Bild_F(\mathcal{E})$ auch eine Ebene $\mathcal{E}_0 \subseteq \mathbb{R}^n$.
Da $F$ Geraden in Geraden überführt, sind die Bilder von $L_i$ Geraden in $\mathcal{E}_0$(die wir ebenfalls als 2D-affinen Raum betrachten).




Da $F$ bijektiv und deswegen injektiv ist, haben sie keine Schnittpunkte und sind deswegen nach Hausaufgabe parallel. $\square$

# Plan des Beweises des Satzes 15

Um den Fundamentalsatz 15 zu beweisen, wählen wir einen festen Punkt $a_0 \in \mathbb{R}^n$, setzen $a_0' := F(a_0) \in \mathbb{R}^n$, und definieren $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ folgendermaßen: Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gelte

$$F(a_0 + v) = a_0' + G(v)$$

(oder, was dasselbe ist: $G(a - a_0) := F(a) - a_0'$.) Diese Formel ist fast die Formel für die affine Abbildung. Das einzige Problem ist, dass wir nicht wissen, ob $G$ linear ist.

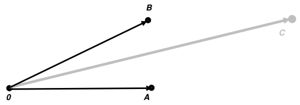
**Ziel:** Wir werden beweisen, dass $G$ eine lineare Abbildung ist, d.h., dass (i) $G(v + w) = G(v) + G(w)$ . Wir werden zwei Fälle betrachten: $v$ und $w$ sind linear unabhängig (Hilfslemma 3), und $v = \lambda w$ (Hilfslemma 4).

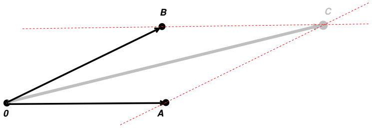
und (ii) $G(\lambda v) = \lambda G(v)$.
Dann wird $F$ eine affine Abbildung nach der Definition von affinen Abbildungen.

**Hilfslemma 3.** Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig.Dann gilt:$G(v + w) = G(v) + G(w)$

# Beweis von Hilfslemma 3: Zuerst Exkurs

**Konstruktionsaufgabe 1.** Angenommen, auf der Ebene $\mathcal{E}_2$ haben wir einen Punkt 0 und zwei Punkte $A$ und $B$ ausgewählt, so dass das Tripel $(0, A, B)$ nicht kollinear ist.Angenommen, wir haben ein spezielles Lineal,mit dem wir zu einer beliebigen Geraden durch einen beliebigen Punkt eine parallele Gerade konstruieren können.Wir sollen die Vektoren $A - 0$ und $B - 0$ addieren, d.h., wir sollen einen Punkt $C$ konstruieren,so dass $A - 0 + B - 0 = C - 0$.




**Lösung.** Wir ziehen (mit Hilfe des Speziallineals) eine Parallele $M_A$ zu $L(0, B)$ durch $A$, und eine Parallele $M_B$ zu $L(0, A)$ durch $B$.Der Schnittpunkt dieser Geraden ist der Punkt $C$ mit $A - 0 + B - 0 = C - 0$.

# Bemerkung.

Ein solches Lineal existiert als Bauzeichnungsgerät und wird tatsächlich benutzt. (Unten ist ein sogenanntes Reißbrett dargestellt. Außerdem kann man auch ein sogenanntes Parallellineal benutzen.)

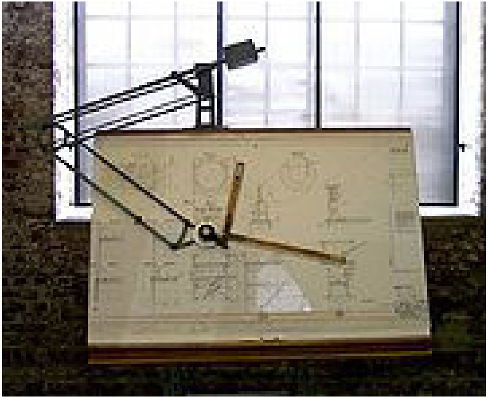


Bild von WiKipedia

# Beweis von HL 3 mit Hilfe von Konstruktionsaufgabe 1.

Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig.Wir setzen $0 = a_0$, $A = a_0 + u$ und $B = a_0 + v$.
Wir betrachten die Ebene $\mathcal{E} := \{a_0 + \lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
Nach HL1 wird eine Ebene $\mathcal{E}$ auf eine Ebene abgebildet (die wir mit $\mathcal{E}'$ bezeichnen).
Nach HL2 werden parallele Geraden auf parallele Geraden abgebildet.
**Nach Konstruktionsaufgabe 1** können wir die Vektoren $u = A - 0$ und $v = B - 0$ mit Hilfe des speziellen Lineals „addieren“,d.h., wir können einen Punkt $C$ konstruieren,so dass $A - 0 + B - 0 = C - 0$.
Wir führen dieselben Konstruktionsschritte in der Ebene $\mathcal{E}'$ durch.
In der Konstruktion haben wir nur Geraden, parallele Geraden und Schnittpunkte von Geraden benutzt.Da unsere Abbildung $F$ geradentreu und bijektiv ist und nach HL2 Parallelität erhält, ist sie mit unserer Konstruktion vertauschbar:Wir können dieselbe Konstruktion in $\mathcal{E}' = Bild_F(\mathcal{E})$ (ausgehend von den Punkten $F(0)$, $F(A)$, $F(B)$) durchführen.In diesem Fall erhalten wir in jedem Fall den Punkt $F(C)$. Dann gilt:

$$G(C-0) := F(C)-F(0) = F(A)-F(0)+F(B)-F(0) := G(A-0)+G(B-0),$$

wie wir in HL 3 behaupten. $\square$

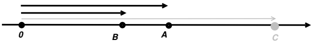
# Hilfslemma 4.

Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:
$G(\lambda v) + G(\mu v) = G((\lambda + \mu)v)$.

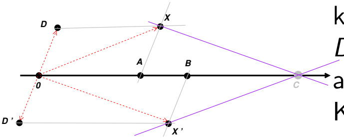
**Beweis.** Wegen der Injektivität von $F$ gilt $G(\vec{0}) = \vec{0}$. Deswegen genügt es, die Fälle zu betrachten, in denen $v \neq \vec{0}$, $\lambda \neq 0$ und $\mu \neq 0$ gilt. Aufgrund unserer Voraussetzung $n = \dim(\mathbb{R}^n) \geq 2$ existiert ein zu $v$ linear unabhängiger Vektor $w \in \mathbb{R}^n$.

# 1. Fall: $\lambda + \mu \neq 0$: Zuerst Exkurs

**Konstruktionsaufgabe 2.** Angenommen, auf der Ebene $\mathcal{E}_2$ haben wir einen Punkt 0 und zwei Punkte $A$ und $B$ auf einer Geraden $L$ ausgewählt, so dass $A - 0 \neq 0 - B$.



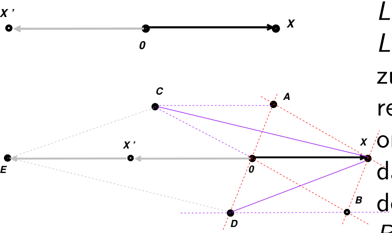

Wir sollen die Vektoren $A - 0$ und $B - 0$ mit Hilfe des speziellen Lineals addieren, d.h. wir sollen den Punkt $C$ konstruieren, so dass $A - 0 + B - 0 = C - 0$.




**Lösung.** Wir nehmen einen Punkt $D \notin L$. Wir konstruieren den Punkt $D'$, so dass $-(D - 0) = D' - 0$ (wie wir es mit unserem speziellen Lineal tun, zeige ich auf der nächsten Folie).Wie in Konstruktionsaufgabe 1 addieren wir die Vektoren $D - 0$ und $A - 0$ (d.h. wir finden $X$ mit $X - 0 = D - 0 + A - 0$). Wie in Konstruktionsaufgabe 1 addieren wir die Vektoren $D' - 0$ und $B - 0$ (d.h. wir finden $X'$ mit $X' - 0 = D' - 0 + B - 0$).Das Punktetripel $(0, X, X')$ ist nach Voraussetzung nicht kollinear. Wie in Konstruktionsaufgabe 1 addieren wir $X - 0$ und $X' - 0$ (d.h. wir finden $C$ mit $C - 0 = X' - 0 + X - 0$). Dann ist $C - 0 = A - 0 + D - 0 + B - 0 + D' - 0 = A - 0 + B - 0$. $\square$

# Wie versprochen: Wie konstruiert man den Vektor $0 - X$

**Hilfskonstruktion 1:** Gegeben sind zwei Punkte $X \neq 0$. Man konstruiere $X'$ mit $X' - 0 = 0 - X$ (mit dem speziellen Lineal).

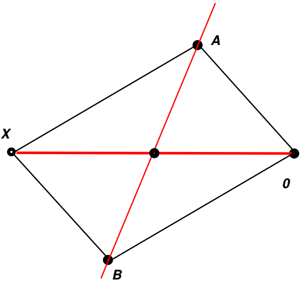



**Lösung.** Man nehme einen Punkt $A \notin L(0, X)$ und konstruiere das Parallelogramm $0AXB$ (man zeichne die Geraden $L(A, X)$, $L(0, B)$, die Gerade durch 0 parallel zu $L(A, X)$, und die Gerade durch $X$ parallel zu $L(0, A)$). Dann addiere man die Vektoren $A - X$ und $0 - X$ wie in Konstruktionsaufgabe 1: Man findet den Punkt $C$, so dass $C - X = A - X + 0 - X$. Analog findet man den Punkt $D$, so dass $D - X = B - X + 0 - X$.

Dann addiere man $C - X$ und $D - X$: Man findet den Punkt $E$, so dass $C - X + D - X = E - X$. Wir haben: $E - X = A - X + 0 - X + B - X + 0 - X \overset{\text{weil } B - X + A - X = 0 - X}{=} 3 \cdot (0 - X)$. Deswegen ist $\frac{1}{2} \cdot (E - 0) = 0 - X := -(X' - 0)$. Also: Um den Punkt $X'$ zu konstruieren, müssen wir für einen gegebenen Vektor $E - 0$ den Vektor $\frac{1}{2} \cdot (E - 0)$ konstruieren.

# Halbieren der Strecke mit Hilfe eines speziellen Lineals

Gegeben sind die Punkte 0 und $X$: Man konstruiere den Mittelpunkt der Strecke $\overrightarrow{0X}$ mit Hilfe des speziellen Lineals.




**Lösung.** Man nehme einen beliebigen Punkt $A$ und konstruiere ein Parallelogramm $A0BX$. Der Schnittpunkt $Y$ der Diagonalen ist der Mittelpunkt von $\overrightarrow{0X}$. Wir haben: $Y-0+A-Y=A-0$ und $Y-0+B-Y=B-0$. Wir addieren diese zwei Gleichungen und bekommen wegen $A-0+B=X-0$ die Gleichung $Y-0+A-Y+Y-0+B-Y=X-0$. Die Vektoren $Y-0, X-0$ liegen im Vektorraum zur Geraden $L(X,A)$, die Vektoren $A-Y$ und $B-Y$ liegen im Vektorraum zur Geraden $L(A,B)$. Da die Geraden nicht parallel sind, ist $Y-0+Y-0=X+0$, $\square$

# Beweis von HL 4: 1. Fall $\lambda + \mu \neq 0$.

**Hilfslemma 4.** Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:
$G(\lambda v) + G(\mu v) = G((\lambda + \mu)v)$.

Wir betrachten die Punkte $A = a_0 + \lambda v$ und $B = a_0 + \mu v$. Wir nehmen eine Ebene $\mathcal{E}$, die die Gerade $\{a_0 + t \cdot v \mid t \in \mathbb{R}\}$ enthält.
**Wie in der Konstruktionsaufgabe 2** können wir den Punkt $C := a_0 + (\lambda + \mu) \cdot v$ mit Hilfe folgender Operationen konstruieren:

- Gerade durch zwei Punkte ziehen
- Zu einer gegebenen Geraden eine Gerade durch einen gegebenen Punkt ziehen
- Schnittpunkt von zwei Geraden nehmen.

Da die Abbildung $F$ Geraden in Geraden, parallele Geraden in parallele Geraden überführt und wegen der Bijektivität auch Schnittpunkte von Geraden $(L, M)$ in Schnittpunkte der entsprechenden Geraden $(\mathrm{Bild}_F(L)$ und $\mathrm{Bild}_F(M))$, gilt $F(C) - F(a_0) = F(A) - F(a_0) + F(B) - F(a_0)$ und deswegen $G(\lambda v) + G(\mu v) = G(\lambda v + \mu v)$.

# 2. Fall: $\lambda = -\mu$

Da $\lambda v + w$ und $-\lambda v + w$ linear unabhängig sind, folgt aus Hilfslemma 3:

$$\begin{aligned} G(2w) = G((\lambda v + w) + (-\lambda v + w)) &= G(\lambda v + w) + G(-\lambda v + w) \\ &= G(\lambda v) + G(w) + G(-\lambda v) + G(w) \\ &= 2G(w) + G(\lambda v) + G(-\lambda v). \end{aligned}$$

Nach dem 1. Fall für $\lambda = \mu := 1$ gilt: $G(2w) = 2G(w)$; daraus folgt die Behauptung $G(\lambda v) + G(-\lambda v) = \vec{0}$.