Wie werden die Vorlesungen/Übungen organisiert?

- Mein Name: Prof. Vladimir Matveev
- Sprechstunden: nach der Vorlesung oder kommen Sie vorbei oder schreiben Sie ein email
- Homepage der Vorlesung: `http://users.fmi.uni-jena.de/~matveev/Lehre/LA25/`. Hier werden die Vorlesungsinhalte bereit gestellt
- Das ist eine Pflichtveranstaltung für Mathematiker, kann aber auch für Physiker und anderen Naturwissenschaftler als Wahlpflichtversanstaltung anerkannt werden.

Was bedeutet „erfolgreiche Teilnahme“?

- Sie müssen an den Übungen regelmäßig und aktiv teilnehmen (Einzelheiten werden noch erklärt)
- Mind. 50% der Punkte von den Hausaufgaben sammeln. Wenn Sie dies wollen findet in der Mitte des Semesters eine Probe-Klausur statt. Dafür bekommen Sie auch Bonuspunkte (bis zu 20% der Hausaufgabenpunkte). Falls Probe-Klausur stattfindet, wird die Zulassung zu Hauptklausur auf 60% von Punkten gesetzt.
- Sie müssen die Hauptklausur oder die Wiederholungsklausur bestehen.

Zu Anwesenheitsübungen/Tutorium

- Verteilung in Ü-Gruppen wurde von Friedolin bereits vorgenommen.
  - An fast jeder Woche wird ein Übungsblatt mit in der Regel vier Aufgaben ins Netz gestellt, über Moodle.
  - Sie müssen die Aufgaben lösen und vor 9:00 der darauf folgenden Dienstagvorlesung über Moodle abgeben. Sie durfen, wie im WS, die Hausaufgaben zuzweit abgeben.
  - Die abgegebenen Lösungen werden individuell korrigiert, bepunktet und zurückgesendet.
  - Während des Tutoriums (voraussichtlich, Mittwoch; kein Pflichtversanstaltung, aber sehr zu emphelen) werden die Lösungen erklärt.

  - Fragen zu Übungen bitte an Dr. Manuel Quaschner `manuel.robert.quaschner@uni-jena.de`

Buchempfelungen

- Fast jedes Lineare-Algebra-Buch für Uni-Studenten der Mathematik ist gut
- Für vorgeschrittene Studenten: „Lineare Algebra“ von Briscorn
- Einfachere Versionen:
  - Repetitorium der Linearen Algebra I, II (Detlef Wille, Michael Holz)
  - Lineare Algebra von A. Beutelspacher
- Preiswerte Alternative: Vorlesungsskripte im Internet

Inhalt

- Jordan-Normalform und Anwendungen,
- Affine Geometrie
- Isometrien und Klassifikation von Quadriken
- Mengenlehre und Paradoxen; Kardinalität; unendlichdimensionale Vektorraumen

Lernziele dieser Woche

- Wiederholung der Diagonalisierbarkeit (aus LA I, Satz 32)
- Wiederholung von Polynomen (quadratischer) Matrizen
- Polynome, die eine Matrix annihilieren; Minimalpolynom
- Satz von Hamilton-Cayley
- Ein weiteres Kriterium zur Diagonalisierbarkeit (Satz 4)

Erstes Kapitel (3 Wochen): Jordansche Normalform

Wiederholung (LA I): Endomorphismus vom (Vektorraum) V ist eine lineare Abbildung von $f : V \to V$.

Frage: f sei ein Endomorphismus von $n-$dimensionalem VR. In welcher Basis ist die darstellende Matrix von f "einfach"?

- Wir wissen, dass die darstellende Matrix von f eine $n \times n$-Matrix ist, wobei n die Dimension von V ist.
- Wenn wir ein Basis-Tupel $(b_1, ..., b_n)$ in V auswählen (und deswegen auch V mit $\mathbb{K}^n$ mit Hilfe von Koordinatenabbildung identifizieren) ist die Matrix wie folgt Konstruiert:
  - Die k-te Spalte der Matrix ist $(a_{1k}, ..., a_{nk})^T$ sodass $a_{1k}b_1 + ... + a_{nk}b_n = f(b_k)$

Algebraische Umformulierung der Frage (LA I): In welche "einfachste" Form kann man einen gegebene $n \times n$ Matrix A mit der Ähnlichkeitstransformation $A \mapsto B^{-1}AB$, wobei B eine nichtausgeartete $n \times n$-Matrix ist, bringen.

- Ähnlichkeitsransformation entspricht der Basiswechsel.

Frage: f sei ein Endomorphismus von $n-$dimensionalem VR. In welcher Basis ist die darstellende Matrix von f "einfach"?

Eine Teilantwort haben wir in LA I gegeben (Folien zur Vorlesung stehen immer noch auf meiner Homeseite):

Satz 32 LA I *Ein Endomorphismus von einem endlichdimensionalen V ist g.d. diagonalisierbar (d.h., es gibt eine Basis s.d. die darstellende Matrix von f diagonal ist)* WENN ES EINE BASIS GIBT, S.D. JEDER BASISVEKTOR EIN EIGENVEKTOR IST. *Ferner gilt: die darstellende Matrix des Endomorphismus in dieser Basis ist diagonal; auf dem $(i,i)-$Platz der Diagonale steht der Eigenwert von $i-$ten Basisvektor*

Selbstverständlich sind die Matrizen in Diagonalform "einfach genug". Wir haben in LA I gesehen, dann mann sie schnell multiplizieren kann, dass man sie schnell invertieren kann. Auch Determinantenberechnung ist sehr einfach. Allerdings die Bedingung, dass es eine Basis gibt, dass jeder Vektor der Basis ein Eigenvektor ist, ist nicht bei allen Matrizen erfüllt, sodass Satz 32 LA I leider keine vollständige Antwort gibt.

Unseres Ziel: Wir werden in der nächsten 2-3 Wochen eine vollständige Antwort auf die oben formulierten Frage geben, für den Fall wenn der Körper $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$ ist: wir werden zeigen, dass jede Matrix zu einer Matrix von (relativ) einfachen Gestallt ähnlich ist.
Zuerst, um aufzuwärmen und nötigen Werkzeug zu entwickeln, werden wir Beweis von Satz 32 LA I wiederholen und dann noch untersuchen, wie kann man algorithmisch verstehen ob eine Matrix diagonalisierbar ist.

Beweis von Satz 32 LA I

Satz 32 LA I *Ein Endomorphismus von einem endlichdimensionalen V ist g.d. diagonalisierbar (d.h., es gibt eine Basis s.d. die darstellende Matrix von f diagonal ist) wenn es eine Basis gibt, s.d. jeder Basisvektor ein Eigenvektor ist. Ferner gilt: die darstellende Matrix des Endomorphismus in dieser Basis ist diagonal; auf dem $(i,i)-$Platz der Diagonale steht der Eigenwert von $i-$ten Basisvektor*

Beweis. Zuerst "$\Longrightarrow$". Ist ein Endomorphismus diagonalisierbar, so gibt es eine Basis $(b_1, ..., b_n)$, s.d. die Matrix des Endomorphismus diagonal ist: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Dann ist $f(b_i) = \lambda_i\, b_i$ (weil die Koordinaten von $f(b_i)$ in der Basis $(b_1, ..., b_n)$ die $i-$te Spalte von A bilden, weil $f(b_i) = 0 \cdot b_1 + ... + \lambda_i b_i + ... + 0 \cdot b_n = \lambda_i b_i$).

" $\Longleftarrow$ ". Sind die Basisvektoren b_i Eigenvektoren, so ist $f(b_i) = \lambda_i\, b_i = 0\, b_1 + ... + \lambda_i b_i + ... + 0\, b_n$, also ist $\lambda_i \cdot e_i$ der Koordinatenvektor von $f(b_i)$ in der Basis $(b_1, ..., b_n)$und die Matrix der Abbildung ist eine Diagonalmatrix. $\square$

Satz und Beweis auf der “algebraischen” Sprache.

Satz 32 LA I auf der “algebraischen” Sprache. Sei A eine $n \times n$-Matrix. Sie ist genau dann zu einer Diagonalmatrix ähnlich, wenn es eine Basis gibt, s.d. jeder Basisvektor ein Eigenvektor ist. Ferner gilt: die Diagonaleinträge sind die Eigenwerte von A

Beweis (nur in die Richtung “$\Longleftarrow$”). Sei $(b_1, ..., b_n)$ die Basis s.d. alle b_i Eigenvektoren sind mit Eigenwerte λ_i. Wir betrachten die Matrix B deren Spalten die Vektoren $b_1, ..., b_n$ sind. Sie ist nichtausgeartet, da die Spalten linear unabhängig sind. Deswegen können wie sie invertieren; B^{-1} ist deswegen wohldefiniert.

Wir zeigen jetzt, dass $B^{-1}AB$ eine Diagonalmatrix $diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ ist. Um dies zu zeigen, sollen wir zeigen, dass für diese Matrix gilt: $B^{-1}ABe_i = \lambda_i e_i$ (für alle $i = 1, ..., n$), weil die $i$te Spalte von $A' := B^{-1}AB$ ist der Vektor $A'e_i = B^{-1}ABe_i$.

Wie wir es oft in LA I gemacht haben, benutzen wir, dass die Produkt von Matrizen assoziativ ist.

Es gilt:

$$B^{-1}ABe_i \overset{(1)}{=} B^{-1}Ab_i \overset{(2)}{=} \lambda_i B^{-1}b_i \overset{(3)}{=} \lambda_i e_i :$$

1. Weil nach konstruktion von B gilt $Be_i = b_i$ (weil b_i die i-te Spalte von B ist).
2. Weil $Ab_i = \lambda b_i$ ist (weil b_i ein Eigenvektor ist)
3. Weil $Be_i = b_i$ und deswegen $e_i = B^{-1}b_i$.

Es könnte aber sein, dass eine Matrix nicht diagonalisierbar ist

Bsp. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht diagonalisierbar. Tatsächlich, nach Satz 32 LA I ist die Matrix diagonalisierbar g.d.w. es eine Basis aus Eigenvektoren gibt. Wir werden jetzt zeigen, dass für diese Matrix es keine Basis aus Eigenvektoren gibt.

Dazu berechnen wir zuerst die Eigenwerte, und dann Eigenvektoren.

Wir wissen (Satz 29 LA I), dass die Eigenwerte die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A = det(A - t\ Id)$ sind.

In unseren Fall $\chi_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = det\begin{pmatrix} -t & 1 \\ 0 & -t \end{pmatrix} = t^2$.

Wir haben nur eine Nullstelle $\lambda = 0$, also nur einen Eigenwert. Kann man eine Basis aus Eigenvektoren finden? Nein, denn $Kern \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat nach der Dimensionsformel die Dimension $\underbrace{2}_{dim(V)} - \underbrace{1}_{rk(A)} = 1$. Also gibt es keine zwei linear unabhängigen Eigenvektoren und die Matrix ist nach Satz 32 LA I nicht diagonalisierbar.

Es könnte aber andere Gründe sein, dass eine Matrix nicht diagonalisierber ist

Bsp. Wenn z.B. wir über $\mathbb{R}$ arbeiten, könnte es sein dass die Matrix nicht genug (z.B. gar keine) Eigenwerte hat. Z.B. betrachten wir die Matrix $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ für $\beta \neq 0$. Die Eigenwerte davon (wenn sie existieren) sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$\chi_{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}} = det\begin{pmatrix} \alpha - t & \beta \\ -\beta & \alpha - t \end{pmatrix} = (\alpha - t)^2 + \beta^2$, das keine (reellen) Nulstellen hat (da $(\alpha - t)^2$ nichtnegativ ist und β^2 positiv ist). Wir sehen dass, über $\mathbb{R}$, die Matrix ist nicht diagonalisierbar, weil es keine Basis aus Eigenvektoren gibt, weil es keine Eigenvektoren und Eigenwerte gibt.

Bemerkung. Wir haben dieses Problem in LA I angeschaut. Wenn die Eigenwerte einer Matrix keine komplexwertig sind (also, nicht reel) sind, kann man immer noch die Matrix mit einer Ähnlichkeitsransformation in eine einfache Form bringen. Man bemerke aber dass über etwa $\mathbb{Z}_2$ das Polynom $t^2 + t + 1$ überhaupt keine Nullstellen hat, sodass der Trick mit der Körpererweiterung viel schwieriger ist. Diese Fragestellungen werden u.a. in Algebra I, II diskutiert.

Erstes (kleines) Ziel: wie kann man algorithmisch verstehen ob eine Matrix (NICHT) diagonalisierbar ist

Wir haben zwei Phänomene gesehen, dass für Nichtdiagonalisierbarkeit einer Matrix verantwortlich sein können:

(1) Matrix hat keine Eigenwerte, wie z.B. $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

(2) Matrix hat Eigenwerte, aber die Dimensionen der entsprechenden Eigenräumen nicht genug gross sind, wie z.B. bei $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Wir werden heute sehen, dass diese "Hindernisse" wesentlich alle Hindernisse zur Diagonalisierbarkeit einer Matrix sind.

Def.

Zerfält χ_A in Linearfaktoren $\chi_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)

Bsp. Für $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ ist $\chi_A = (1-t)^2(2-t) = (1-t)(1-t)(2-t)$. Der Eigenwert 1 hat algebraische Vielfachheit 2. Eigenwert 2 hat algebraische Vielfachheit 1.

Bemerkung. Wir wissen, dass jedes Polynom in Linearfaktoren zerfält, wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$; über $\mathbb{R}$ gibt es Polynome, die nicht in Linearfaktoren zerfallen.

Bsp. Id_n hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist n (da $\chi_{Id} = (1-t)^n$).

Bsp.

Die Algebraische Vielfachheit von Eigenwerten $1, 2$ von $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist gleich 1, da $\chi_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2 = (1-t)(2-t)$.

Def. *A sei die Matrix eines Endomorphismus $f : V \to V$. Dann heißt die Zahl $dim(Eig_\lambda)$ geometrische Vielfachheit (Bez. $geo_A(\lambda)$) (oder auch geometrische Multiplizität des Eigenwerts λ.*

Bemerkung. Algebraische und geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes einer Matrix brauchen nicht Übereinzustimmen.

Bsp. $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat $\chi_A = det \begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^2$, also der einzige Eigenwert ist 1.

Dessen algebraische Vielfachheit ist 2

Dessen geometrische Vielfachheit ist

$$dim\left(Kern_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}\right) \overset{\text{Bsp. Heute}}{=} 2 - dim(Bild_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}) = 2 - rk\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Lemma 1. *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich: wir wissen dass für jeden Eigenwert ein Eigenvektor $(\neq \vec{0})$ gibt, und die lineare Hülle davon ist ein Untervektorraum von Eig_λ.

Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ..., b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & \mathrm{C} \end{array} \right).$$

Tatsächlich, für $i = 1, ..., k$ ist $B^{-1}AB\, e_i = B^{-1}Ab_i = \lambda B^{-1}b_i = \lambda e_i$. Also, die $i-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist $\lambda_i e_i$.

Dann ist $\chi_A \overset{\text{LA I}}{=} \chi_{B^{-1}AB} =$

$$det\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda - t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda - t \end{matrix}} & * \\ & (C - t \cdot Id) \end{pmatrix} \overset{\text{Nach } k \text{ Laplace-Spaltenentw.}}{=}$$

$(\lambda - t)^k det(C - t \cdot Id)$. $\square$

Def (Wiederholung von LA I). *Seien $V_1, ..., V_m$ Unterverktorräume von V. Die Menge $W := \{v_1 + ... + v_m : wobei\ v_i \in V_i\ \}$ heißt die Summe von V_i und wird $V_1 + ... + V_m$ bezeichnet. Das ist ein Untervektorraum. Wir sagen, dass die Summe direkt ist (Bezeichung: $W = V_1 \oplus ... \oplus V_m$), falls jedes $w \in W$ schreibt sich* **eindeutig** *in der Form $w = v_1 + ... + v_m$ mit $v_i \in V_i$*

Satz 1. *$n \times n$ Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Es gilt: Die folgende Aussagen sind äquivalent:*
(i) A ist diagonalisierbar.
(ii) χ_A zerfällt in Linearfaktoren und $alg_A(\lambda_i) = geo_A(\lambda_i)$ für alle $i = 1, ..., m$.
(iii) $geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m) = n$
(iv) $V = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$

Schema des Beweises: (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$(iii) $\Longrightarrow$(iv) $\Longrightarrow$ (i)

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

Sei A diagonalisierbar. Z.z: χ_A zerfällt in Linearfaktoren. Weil A diagonalisierbar ist, gibt es nach Satz 32 LA I eine Basis aus Eigenvektoren $(b_1, ..., b_n)$. Ordne die Basis so an, dass $b_1, ..., b_{k_1}$ Eigenvektoren zu λ_1 sind, $b_{k_1+1}, ..., b_{k_1+k_2}$ die Eigenvektoren zu λ_2 sind, usw., wobei $k_i := geo_A(\lambda_i)$. Wir haben Heute (im Beweis von Satz 32 LA I) gezeigt, dass

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_2 \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_m & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Dann ist $\chi_A = \chi_{B^{-1}AB} = (\lambda_1 - t)^{k_1}(\lambda_2 - t)^{k_2} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, $\square$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

(ii) χ_A zerfällt in Linearfaktoren und $alg_A(\lambda_i) = geo_A(\lambda_i)$ für alle $i = 1, ..., m$.
(iii) $geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m) = n$

Nun zerfalle χ_A in Linearfaktoren, d.h.
$\chi_A = (\lambda_1 - t)^{k_1}(\lambda_2 - t)^{k_2}...(\lambda_m - t)^{k_m}$, und es gelte
$geo_A(\lambda_i) = alg_A(\lambda_i) = k_i$ für alle λ_i.
Dann ist

$$n = Grad(\chi_A) = \underbrace{Grad((\lambda_1 - t)^{k_1})}_{k_1} + ... + \underbrace{Grad((\lambda_m - t)^{k_m})}_{k_m}.$$

Weil nach Voraussetzungen fur jedes $i = 1, ..., m$ gilt:

$$Grad((\lambda_1 - t)^{k_i}) \stackrel{\text{def}}{=} alg_A(\lambda_i) \stackrel{\text{Voraussetz.}}{=} geo_A(\lambda_i),$$

wir haben $n = geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m)$

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

(iii) $geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m) = n$
(iv) $V = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$
(i) A ist diagonalisierbar.

Im Beweis benutzen wir Satz 31 aus LA I; ich wiederhole den Satz und erkläre noch noch einmal wie man den Satz beweist:

Satz 31 LA I. *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_1, \ldots, v_m \in V$ Eigenvektoren von f zu den paarweise verschiedenen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$. Dann sind $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig.*

Beweisidee (in LA I hatten wir einen anderen Beweis). Man betrachte die Gleichung

$$\vec{0} = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_m v_m.$$

und multipliziere die beide Seiten mit der Matrix $\tilde{A} := (A - \lambda_2 Id)(A - \lambda_3 Id)\ldots(A - \lambda_m Id)$ (also, mit dem Produkt von Matrizen $(A - \lambda_i Id)$ für $i = 2, 3, \ldots, m$.

Man bemerke, dass

$$(*) \quad \begin{cases} \tilde{A} v_1 &= (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)\ldots(\lambda_1 - \lambda_m) v_1 \\ \text{für } i \geq 2 \ \tilde{A} v_i &= \vec{0}. \end{cases}$$

(Beweis von $(*)$ bitte selbst machen: Assoziativität von Matrizenprodukt benutzen). Dann ist

$$\vec{0} = \tilde{A}(\vec{0}) = \tilde{A}(\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_m v_m) = \mu_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)\ldots(\lambda_1 - \lambda_m)}_{\neq 0} v_1.$$

Deswegen ist $\mu_1 = 0$. Analog zeigt man, dass auch alle andere $\mu_i = 0$. Die Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ sind deswegen linear unabhängig.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

(iii) $geo_A(\lambda_1) + \ldots + geo_A(\lambda_m) = n$
(iv) $V = Eig_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus Eig_{\lambda_m}$
(i) A ist diagonalisierbar.

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + \ldots + Eig_{\lambda_m}$. ("+"= Produkt, aber nicht unbedingt Direktprodukt)

Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus Eig_{\lambda_m}$. ("$\oplus$"=Direktprodukt)

Beweis. Ist $v_1 + \ldots + v_m = v_1' + \ldots + v_m'$, so ist $\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + \ldots + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 31 LA I sind $u_i = 0$, also $v_i = v_i'$. □

Seien $(b_1, \ldots, b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, \ldots, b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis in W. Tatsächlich, jedes $w \overset{\text{Eindeutig nach Hilfsaussage}}{=} v_1 + \ldots + v_m \overset{\text{Eindeutig, weil Basis}}{=} \sum_{i=1}^{k_1} \mu_i b_i + \ldots + \sum_{i=k_1+\ldots+k_{m-1}+1}^{n} \mu_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i$. Dann ist $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis in W. Dann ist $dim(W) = n$. Da $dim(V) = n$, ist $W = V$ (damit ist der Teil (iii) $\Longrightarrow$ (iv) bewiesen), und $(b_1, \ldots, b_n)$ ist deswegen eine Basis in V. Da jedes b_i ein Eigenvektor ist, ist A nach Satz 32 LA I diagonalisierbar, was (iv) $\Longrightarrow$ (i) beweist. □

Satz 1 als ein Algorithmus

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

$\boxed{\text{Berechne } \chi_A}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Berechne alle versch. NSt. } \lambda_1, \ldots, \lambda_m \text{ von } \chi_A}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Zerfällt } \chi_A \text{ in Linearfaktoren?}} \quad \stackrel{\text{nein}}{\rightarrow} \quad \boxed{A \text{ ist nicht diagonalisierbar}}$

$\downarrow$ Ja

$\boxed{\text{Berechne alle } geo_A(\lambda_i)}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Ist } \sum_{i=1}^{m} geo_A(\lambda_i) = n?} \quad \stackrel{\text{nein}}{\rightarrow} \quad \boxed{A \text{ ist nicht diagonalisierbar}}$

$\downarrow$ Ja

$\boxed{A \text{ ist diagonalisierbar}}$

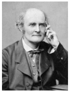
Satz 32 LA I: Wenn wir außerdem in jedem Eig_{λ_i} eine Basis B_i finden, dann ist die Vereinigung $\cup_{i=1}^{m} B_i$ eine Basis in V, und A ist in der Basis diagonal.

Nächstes Ziel: Satz von Hamilton-Cayley.

Def. *Sei $P = a_n x^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ und A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Dann heißt die $n \times n$ Matrix $P(A) := a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 Id$ das Polynom von Matrix A. Wir sagen, dass ein Polynom $P \in \mathbb{K}[x]$ annihiliert A, falls $P(A) = 0$.*

Bsp. *Für $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ und $P := x^2 - 3x + 2$ ist $P(A) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und P annihiliert die Matrix $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.*

Bemerkung $P(A) \cdot Q(A) = (P \cdot Q)(A) = (Q \cdot P)(A)$. (Obwohl $P(A) \cdot Q(B) \overset{\text{in der Regel}}{\neq} Q(B) \cdot P(A)$.)

Satz 2 (Hamilton-Cayley)  —  $\chi_A(A) = \mathbf{0}$

1805 --1856 1821 --1895

In worten: Charakteristisches Polynom einer Matrix annihiliert die Matrix.

Falscher Beweis: $\chi_A(A) = det(A - A \cdot Id) = det(\mathbf{0}) = 0$.
(Bitte, überlegen Sie selbst warum der Beweis falsch ist.)

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Sei $A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $P = a_k x^k + ... + a_0$. Dann ist

$$P(A) = a_k \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k + ... + a_0 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\chi_A(A) = \begin{pmatrix} \chi_A(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \chi_A(\lambda_n) \end{pmatrix} \overset{\text{Weil } \lambda_i \text{ Nullstellen von } \chi_A}{=} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

Sei A diagonalisierbar, also $A := B\Lambda B^{-1}$ für eine Diagonalmatrix Λ.

Dann ist $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{k\text{mal}} = B\Lambda \underbrace{B^{-1}B}_{Id} \Lambda B^{-1} ... B\Lambda B^{-1} = B\Lambda^k B^{-1} =$

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k \cdot B^{-1} = B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1}.$$

Also, $P(A) = a_k B\Lambda^k B^{-1} + a_{k-1} B\Lambda^{k-1} B^{-1} + ... + a_0 BB^{-1} \overset{\text{Linearität}}{=}$
$B(a_k\Lambda^k + ... + a_0 Id)B^{-1} = BP(\Lambda)B^{-1}$. Dann
$\chi_A(A) = B\chi_A(\Lambda)B^{-1} = B\chi_\Lambda(\Lambda)B^{-1} = B\mathbf{0}B^{-1} = \mathbf{0}$.

Hilfssatz 1 *Sei* $A = \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$, *wobei* B *eine* $(k \times k)$*-Matrix und* C *eine* $(m \times m)$*-Matrix sind. Dann ist* $det(A) = det(B)det(C)$*.*

Bemerkung. Wir haben diese Aussage in LA I gehabt, mit einer anderen Beweismethode.

Beweis. Ist $det(B) = 0$, so gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^k$, $x \neq \vec{0}$ s.d. $Bx = \vec{0}$.

Dann liegt $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ in $Kern_A$, weil $\begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bx \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Wir sehen, dass A einen nichttrivialen Kern hat, und deswegen $det(A) = 0$. Also, die Formel $\underbrace{det(A)}_{=0} = \underbrace{det(B)}_{=0} det(C)$ ist richtig, falls B ausgeartet ist.

Sei $det(B) \neq 0$. Wir zeigen zuerst, dass
$det \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$ ist.
Da $det(B) \neq 0$, ist $rk_s(B) = k$ und deswegen bilden die Spalten $(b_1), (b_2), ..., (b_k) \in \mathbb{K}^k$ eine Basis in $\mathbb{K}^k$. Dann sind die Spalten $(d_1), ..., (d_m)$ von D Linearkombinationen von (b_i): $(d_j) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_j^i (b_i)$.
Dann kann mann mit Hilfe von Elementarspaltenumtauschungen der Form $(a_j) \mapsto (a_j) + \lambda(a_i)$ mit $j > k$ und $i \leq k$ die Matrix A in die Form
$det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$ bringen, weil solche Elementarspaltenumtauschungen die Matricen B, C nicht ändern. Da solche Elementarumtauschungen die Determinante nicht ändern, ist
$det \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$.
Offensichtlich, ist
$\begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & Id_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Id_k & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$. Dann ist
$det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det \left(\begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & Id_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Id_k & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} \right) =$
$det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & Id_m \end{pmatrix} \cdot det \begin{pmatrix} Id_k & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det(B) \cdot det(C)$. $\square$

Hilfssatz 2. *Für* $A = \begin{pmatrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{pmatrix}$ *ist*

$\chi_A = (-1)^{m+1}(-t^m + \alpha_{m-1}t^{m-1} + ... + \alpha_0)$.

Beweis: Ausrechnen.

$$\det \begin{pmatrix} -t & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & -t & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} - t \end{pmatrix} \overset{\text{Entwickl. nach der } m\text{-ten Spalte}}{=}$$

$$(-1)^{m+1}\alpha_0 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & -t & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & -t \\ & & & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{m+2}\alpha_1 \cdot det \begin{pmatrix} -t & 0 & & & \\ 0 & 1 & -t & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -t \\ & & & & 1 \end{pmatrix} +$$

$$... + (-1)^{m+m}(\alpha_{m-1} - t) \cdot det \begin{pmatrix} -t & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -t \end{pmatrix} =$$

$(-1)^{m+1}\alpha_0 + (-1)^{m+2}\alpha_1(-t) + ... + a_{m-1}(-t)^{m-1} + (-t)^m =$
$(-1)^{m+1}(-t^m + \alpha_{m-1}t^{m-1} + ... + \alpha_0)$, $\square$

Beweis des Satzes 2 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Z.z.: $\chi_A(A)v = \vec{0}$. Ohne Einschränkung sei $v \neq \vec{0}$. Setze $v_1 = v$, $v_2 := Av_1$, ... ,$v_i := Av_{i-1} = A^{i-1}v_1$. Wähle m so, dass $\{v_1, ..., v_m\}$ linear unabhängig, aber $\{v_1, ..., v_{m+1}\}$ linear abhängig ist. Dann ist $1 \leq m \leq n$. Schreibe $v_{m+1} = \alpha_0 v_1 + ... + \alpha_{m-1} v_m$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Menge v_1, ..., v_m bis zu einer Basis in $\mathbb{K}^n$ ergänzen: es gibt Vektoren $u_{m+1}, ..., u_n$ s.d. $(b_1 := v_1, ..., b_m := v_m, b_{m+1} := u_{m+1}, ..., b_n := u_n)$ eine Basis ist. Sei B die Matrix s.d. $Be_i = b_i$. Es genügend z.z., dass

$$(*) \quad B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{matrix}} & \boxed{\text{Egal was}} \\ & \boxed{\text{C}} \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich, in dem Fall

$\chi_A = \chi_{B^{-1}AB} \overset{\text{HS 1,HA 2}}{=} (-1)^{m+1}(-t^m + \alpha_{m-1}t^{m-1} + ... + \alpha_0) \cdot \chi_C$. Also,
$\chi_A(A)v = (-1)^{m+1}(-A^m + \alpha_{m-1}A^{m-1} + ... + \alpha_0) \cdot \chi_C(A)v =$
$\chi_C(A) \cdot (-1)^{m+1}(-A^m + \alpha_{m-1}A^{m-1} + ... + \alpha_0)v =$
$\chi_C(A) \cdot (-1)^{m+1}(-A^m v + \alpha_{m-1}A^{m-1}v + ... + \alpha_0 v) =$
$\chi_C(A) \cdot (-1)^{m+1}(-v_{m+1} + \alpha_{m-1}v_m + ... + \alpha_0 v_1) = \vec{0}$.

Wir zeigen: $B^{-1}AB = \left(\begin{array}{cc} \boxed{\begin{matrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{matrix}} & \boxed{\text{Egal was}} \\ & \boxed{\text{C}} \end{array}\right)$.

Die $i-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist
$B^{-1}AB\ e_i = B^{-1}Ab_i \overset{\text{für } i<m}{=} B^{-1}Av_i = B^{-1}v_{i+1} = e_{i+1}$.
Die $m-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist $B^{-1}AB\ e_m = B^{-1}Av_m =$
$B^{-1}v_{m+1} = B^{-1}(\alpha_0 v_1 + ... + \alpha_{m-1}v_m) = \alpha_0 e_1 + ... + \alpha_{m-1}e_m$. $\square$

Minimalpolynom

Def. *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, des kleinsten Grads s.d. $P(A) = \mathbf{0}$ heißt* Minimalpolynom *zu A. Bezeichnung: Min_A.*

Satz 3. *Minimalpolynom zu A existiert und ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Ferner gilt: $P(A) = \mathbf{0}$ g.d.w. $P \vdots Min_A$.*

Beweis: Existenz ist trivial nach (Hamilton-Cayley) Satz 2: χ_A annihiliert die Matrix A.

Wir zeigen, dass $P(A) = \mathbf{0}$ g.d.w. $P \vdots Min_A$: Die richtung "$\Longleftarrow$" ist trivial: falls $P \vdots Min_A$, also falls $Min_A \cdot g = P$, dann $P(A) = Min_A(A) \cdot g(A) = \mathbf{0} \cdot g(A) = \mathbf{0}$.

Wir zeigen die Richtung "$\Longrightarrow$": Ist $P(A) = \mathbf{0}$, so $P \vdots Min_A$. Wir dividieren mit Rest und bekommen $P = Min_A \cdot g + r$, wobei $Grad(r) < Grad(Min_A)$. Dann ist $\underbrace{P(A)}_{=\mathbf{0}} = \underbrace{Min_A(A)}_{=\mathbf{0}} \cdot g(A) + r(A)$. Dann ist $r(A) = 0$. Da Min_A der Annihilator des kleinsten Grades ist, ist $r \equiv \mathbf{0}$.

Eindeutigkeit. Angennomen $P(A) = \mathbf{0}$, $Grad(P) = Grad(Min_A)$. Da $P \vdots Min_A$, ist $P = Min_A \cdot g$. Also $Grad(P) = Grad(Min_A) + Grad(g)$. Dann $Grad(g) = 0$, also g ist eine Konstante. □

Lemma 2. *Sei* $P = (t-\lambda_1)^{k_1}...(t-\lambda_m)^{k_m}$*. Dann gilt: teilt* Q P*, so ist* $Q = \alpha \cdot (t-\lambda_1)^{k'_1}...(t-\lambda_m)^{k'_m}$*, wobei* $\alpha \in \mathbb{K}$ *und* $0 \leq k'_i \leq k_i$*.*

Wiederspruchsbeweis: OBdA sind λ_i paarweise verschieden. Angenommen, $P \vdots Q$, also $P = Q \cdot g$, und $Q = (t-\lambda_1)^{k'_1}...(t-\lambda_m)^{k'_m} \cdot Q'$ und $g = (t-\lambda_1)^{j_1}...(t-\lambda_m)^{j_m} g'$, wobei $k'_i \geq 0$, $j_i \geq 0$, kein von λ_i ist Nullstelle des Polynoms Q' oder g', und $Grad(Q') \geq 0$. Dann ist $(t-\lambda_1)^{k'_1+j_1}...(t-\lambda_m)^{k'_m+j_m} \cdot Q' \cdot g' = P = (t-\lambda_1)^{k_1}...(t-\lambda_m)^{k_m}$.

Wir dividieren beide Seiten durch $(t-\lambda_1)^{k'_1+j_1}...(t-\lambda_m)^{k'_m+j_m}$ und erhalten $Q' \cdot g' = (t-\lambda_1)^{k_1-k'_1-j_1}...(t-\lambda_m)^{k_m-k'_m-j_m}$. Ist $k_i - k'_i - j_i = 0$ für alle i, so bekommen wir ein Widerspruch mit $Grad(Q') \geq 0$.

Ist ein $k_i - k'_i - j_i \geq 0$, so ist $Q'(\lambda_i) \cdot g'(\lambda_i) = 0$. Wir bekommen Widerspruch mit der Bedienung $Q'(\lambda_i) \neq 0$, $g'(\lambda_i) \neq 0$. $\square$

Satz 4 *A sei eine $(n \times n)$-Matrix über K mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Dann gilt: A ist g.d. diagonalisierbar, wenn χ_A in Linearfaktoren zerfällt, also $\chi_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, und das Polynom $P = (\lambda_1 - t)...(\lambda_m - t)$ annihiliert die Matrix A: $P(A) = \mathbf{0}$.*

Beweis $\Longrightarrow$. Angenommen, die Matrix ist diagonalisierbar, also $A = B\Lambda B^{-1}$. Aus Satz 1 folgt, dass χ_A in Linearfaktoren zerfällt. Wir wiederholen den Beweis.

$$\chi_\Lambda = det \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 - t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 - t \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_m - t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m - t \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda_1 - t)^{geo_A(\lambda_1)} ... (\lambda_m - t)^{geo_A(\lambda_m)}.$$

„Zum aufwärmen“ haben wir gezeigt, dass

$$P(A) = B \cdot P(\Lambda) \cdot B^{-1} = B \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_m) \end{pmatrix} B^{-1} = B\mathbf{0}B^{-1} = \mathbf{0}.$$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$, ist also Produkt von Linearfaktoren. Sei $f_i : V \to V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ \ldots \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$$dim(V_1) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(K^n) - dim(Kern_{f_1}) = n - geo_A(\lambda_1)$$

$$dim(V_2) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_1) - \underbrace{dim(Kern_{f_2})}_{\leq geo_A(\lambda_2)} \geq n - geo_A(\lambda_1) - geo_A(\lambda_2)$$

$$\vdots$$

$$dim(V_m) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_{m-1}) - \underbrace{dim(Kern_{f_m})}_{\leq geo_A(\lambda_m)} \geq n - geo_A(\lambda_1) - \ldots - geo_A(\lambda_m)$$

Aber $dim(V_m) = 0$, da $P(A)v \equiv \vec{0}$. Dann ist

$0 \geq n - geo_A(\lambda_1) - \ldots - geo_A(\lambda_m) \overset{\text{Lemma 1}}{\geq} n - alg_A(\lambda_1) - \ldots - alg_A(\lambda_m) = 0$. Dann ist

$geo_A(\lambda_1) + \ldots + geo_A(\lambda_m) = n$, und A ist nach Satz 1 diagonalisierbar. $\square$

Folgerung

Eine Matrix A ist g.d. diagonalisierbar, wenn
$Min_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_m - t)$, *wobei λ_i paarweise verschieden sind.*

Beweis. Nach Lemma 2 und Satz 2 ist
$Min_A = (\lambda_1 - t)^{k'_1}...(\lambda_m - t)^{k'_m}$. Alle $k'_i \geq 1$. Tatsächlich, sonst betrachten wir einen Eigenvektor v mit Eigenwert λ_i. Der Vektor
$(\lambda_1 Id - A)^{k'_1}...(\lambda_m Id - A)^{k'_m} v =$
$(\lambda_1 Id - A)...(\lambda_m Id - A)^{k'_m - 1}(\lambda_m Id - A)v =$
$(\lambda_1 Id - A)...(\lambda_m Id - A)^{k'_m - 1}(\lambda_m - \lambda_i)v =$
$(\lambda_1 - \lambda_i)^{k'_1}...(\lambda_m - \lambda_i)^{k'_m} v \overset{\text{Falls } k_i = 0}{\neq} \vec{0}$ ist. Also, $Min_A(A) \neq \mathbf{0}$.
Dann ist $Grad(Min_A) \geq m$. Da $Grad((\lambda_1 - t)...(\lambda_m - t)) = m$ und $(\lambda_1 - t)...(\lambda_m - t)$ die Matrix A annihiliert (Satz 4), ist $(\lambda_1 - t)...(\lambda_m - t)$ nach das Minimalpolynom. □

Satz 4 als Kriterium zur Diagonalisierbarkeit

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

Berechne χ_A

$\downarrow$

Berechne alle versch. NSt. $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ von χ_A

$\downarrow$

Zerfällt χ_A in Linearfaktoren? $\xrightarrow{\text{nein}}$ A ist nicht diagonalisierbar

$\downarrow$ Ja

Man betrachte $P = (\lambda_1 - t)\ldots(\lambda_m - t)$.

$\downarrow$

Ist $P(A) = \mathbf{0}$? $\xrightarrow{\text{nein}}$ A ist nicht diagonalisierbar

$\downarrow$ Ja

A ist diagonalisierbar