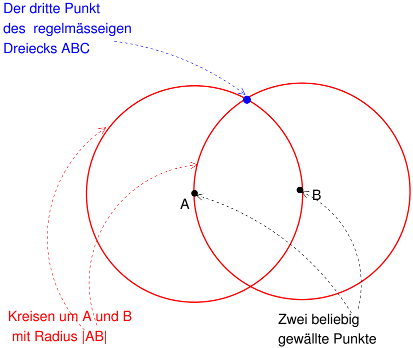
Konstruktionen von regulären *n*-Ecken

(Reguläres = alle Seiten und alle Winkel sind gleich)

Frage Welche regulären *n*-Ecken kann man mit Zirkel und Lineal konstruieren?

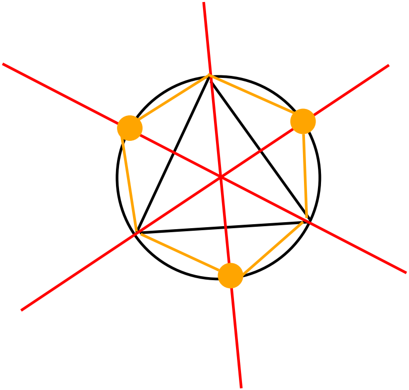
(Falls wir ein reguläres *n*-Eck konstruieren können, dann können wir ein reguläres *n*-Eck mit einer vorgegebenen Seite konstruieren, mit Hilfe von Konstruktion von parallelen Geraden)

Bsp. Reguläres Dreieck, reguläres Viereck sind konstruierbar (trivial); reguläres 5-Eck ist konstruierbar (In der Woche 9 gezeigt. Sie können auch eine „elementare“ Konstruktion über Google finden).



Bsp.

Ist ein reguläres n-Eck konstruierbar, so ist auch ein reguläres $2n$-Eck konstruierbar.



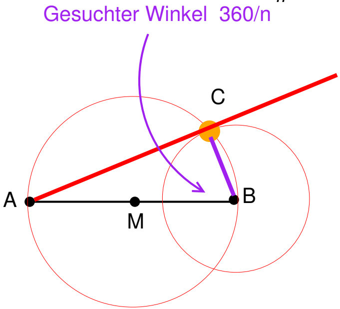
Begründung. Wir konstruieren zuerst einen Kreis um das reguläre n-Eck (auf dem Bild $n = 3$). Dann betrachten wir die Mittelsenkrechten zu den Seiten des n-Ecks und deren Schnittpunkte mit dem Kreis. Sie geben uns die fehlende n Ecken des $2n$-Ecks.

Folgerung. Reguläres 2^n-Eck, für $n \geq 2$, ist konstruierbar

Satz 30 *Ein reguläres n-Eck ist g.d. konstruierbar, wenn die Zahl* $\cos(\frac{2\pi}{n})$ *konstruierbar ist.*

Bermerkung. Diese Aussage haben wir bereits benutzt, wenn wir Konstruierbarkeit von 5-Eck und Nichtkonstruierbarkeit von 7-Eck bewiesen haben.

Beweis. „$\Leftarrow$“ Angenommen es ist die Zahl $\cos(\frac{2\pi}{n})$ konstruierbar. Dann können wir den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ konstruieren, siehe das Bild:



Der Punkt C ist der Schnittpunkt des Kreises um Mittelpukt der Strecke AB der Länge 1 mit Radius 1/2 und des Kreises um B von Radius cos(360/n).
Der Winkel CAB ist hat cos = cos(360/n), weil Winkel BCA Rechtwinkel nach Satz von Thales ist und die Länge von AB gleich 1 ist

Dann können wir einen Kreis in n gleiche Sektoren teilen, und so die Ecken eines reguläres $n-$Eck konstruieren.

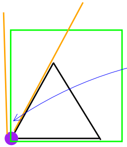
Beweis „$\Rightarrow$“

Angenommen reguläres n-Eck ist konstruierbar. Dann können wir das $n-$Eck in einen Kreis einbeschreiben. (Für je zwei Seiten nehme die Geraden, die die Seiten orthogonal im Mittelpunkt schneiden. Deren Durschnitt ist der Mittelpunkt des Kreises) Dann können wir den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ konstruieren, und deswegen die Zahl $\cos(\frac{2\pi}{n})$. $\square$

Konstruktion von n Ecken mit $n = pq$

Satz 31 *Angenommen $n = q \cdot p$, wobei $ggT(q, p) = 1$, $p \geq 3$, $q \geq 3$. Dann gilt: Ein reguläres $n-$Eck ist g.d. konstruierbar, wenn die regulären $q-$ und $p-$Ecken konstruierbar sind.*

Beweis. „$\Rightarrow$“ ist trivial: falls wir den Winkel $\frac{2\pi}{pq}$ konstruieren können, können wir auch den Winkel $\frac{2\pi}{p}$ bzw. $\frac{2\pi}{q}$ konstruieren.



Gesuchter Winkel 360/12= 30
(für p= 3, q=4)

Beweis „$\Leftarrow$“: Sind die regulären $q-$ und $p-$Ecken konstruierbar, so sind die Winkel $\frac{2\pi}{p}$ bzw. $\frac{2\pi}{q}$ konstruierbar. Dann ist für alle m_1, $m_2 \in \mathbb{Z}$ der Winkel $m_1 \frac{2\pi}{p} + m_2 \frac{2\pi}{q}$ konstruierbar. Weil $ggT(q,p) = 1$, gibt es $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ s.d. $m_1 p + m_2 q = 1$. Wir multiplizieren diese Gleichung mit $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{pq}$ und bekommen, dass der Winkel $m_1 \frac{2\pi}{q} + m_2 \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{n}$ konstruierbar ist. Also ist das $n-$Eck konstruierbar. $\square$

Fazit: *Wir sollen nur Konstruierbarkeit von regulären* p^k*-Ecken untersuchen, wobei* $p \geq 3$ *eine Primzahl ist.*

Bemerkung: *Reguläre* 2^k*-Ecke sind konstruierbar, laut oben formulierte Folgerung. Deswegen ist o.B.d.A.* $p > 2$*. Die erste nichttriviale Fälle sind dann* $n = 3^2$ *(nicht konstruierbar, weil man Winkel* 60^o *nicht dreiteilen kann; wurde bereits bewiesen),* $n = 5$ *(konstruierbar),* $n = 7$ *(nichtkonstruierbar; wir haben es in der Woche 9 bewiesen)*

Zusammenfassung und Satz von Gauss

Wiederholung:

- **Satz 30** *Reguläres n-Eck ist g.d. konstruierbar, wenn die Zahl* $\cos(\frac{2\pi}{n})$ *konstruierbar ist.*
- **Satz 31** Ein reguläres $pq-$Eck (s.d. $ggT(p,q)=1$), mit $p \geq 3$ und $q \geq 3$ ist g.d. konstruierbar, wenn die regulären $q-$ und $p-$ Ecke konstruierbar sind.
- **Beobachtung.** Reguläre 2^n-Ecken sind konstruierbar.

Frage: *Welche* p^k-*Ecken sind konstruierbar, wobei* p *eine Primzahl ist,* $p \neq 2$*?*

Satz 32 (Gauss 1796, Wantzel 1830, ohne Beweis) *Ein reguläres n-Eck* ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$) *ist genau dann konstruierbar, wenn die ungeraden Primfaktoren von* n *verschiedene Primzahlen der Form* $2^{2^k}+1$ *mit* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *sind:*

Also nur die $2^\ell p_1 \cdots p_m$-Ecken sodass $p_i > 0$ verschiedene Primzahlen der Form $2^{2^k}+1$ sind, sind konstruierbar.

Folgerung *Reguläres* 5*-Eck und reguläres* 17*-Eck sind konstruierbar* (Weil $5 = 2^2+1$, $17 = 2^{2^2}+1$)

Satz 32 (Gauss 1796, Wantzel 1830, ohne Beweis) *Ein reguläres n-Eck* ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$) *ist genau dann konstruierbar, wenn die ungeraden Primfaktoren von n verschiedene Primzahlen der Form* $2^{2^k} + 1$ *mit* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *sind.*

Der Beweis in Richtung "$\Longleftarrow$" war bereits Gauss bekannt. Er basiert auf den Methoden, die wir im Beweis der Konstruierbarkeit des 5-Ecks verwendet haben: Man betrachtet die Gleichung $\sum_{i=0}^{n-1} z^i = 0$. Wenn n eine Primzahl der Form $2^{2^k} + 1$ ist, kann man die Gleichung lösen, indem man sukzessive einige quadratische Gleichungen mit der pq-Formel löst (wie im Fall des 5-Ecks).

Der Beweis in Richtung "$\Longrightarrow$" wird eventuell in der Wahlvorlesung Algebra I/II behandelt.

Lehrveranstaltungsevaluation

Veranstaltung:
„Algebra/ Geometrie 2"

Lehrperson:
Prof. Dr. Vladimir Matveev et al.

Mit Hilfe dieses QR-Codes gelangen Sie zur Evaluation für die oben stehende Veranstaltung.

Alternativ öffnen Sie bitte folgende Website:
www.evaluation.uni-jena.de/lve/

und melden sich dort mit den folgenden Daten an:

Befragungs-ID: 37645
Erhebungs-Code: c8688c