Exkurs in die Mengenlehre: Das Auswahlaxiom

Def. Sei A eine Menge von nichtleeren Mengen. Dann heißt $F : A \to \bigcup_{\alpha \in A} \alpha$ eine Auswahlfunktion für A (mit Definitionsbereich A und Werbereich die Vereinigung von allen Elementen aus A), falls gilt:

$\forall X \in A : F(X) \in X.$

F wählt also aus jeder Menge X in A genau ein Element aus.

Das Auswahlaxiom lautet dann wie folgt:
Zu jeder Menge nichtleerer Mengen gibt es mindestens eine Auswahlfunktion.

Das Auswahlaxiom postuliert die Existenz einer Auswahlfunktion, gibt jedoch kein Verfahren an, wie man eine solche konstruieren könnte.

Beispielsweise ist es nicht allgemein möglich, für eine beliebige Menge von Teilmengen aus $\mathbb{R}$ eine Auswahlfunktion explizit anzugeben.

Das Auswahlaxiom ist von der überwiegenden Mehrheit der Mathematiker akzeptiert. Es folgt nicht aus anderen Axiomen der Mathematik. Es gibt Zweige der Mathematik (z.B. die Konstruktivistische Mathematik), die auf das Auswahlaxiom verzichten.

Beispiele

Für welche Fälle das Auswahlaxiom relevant ist, sei an den folgenden Beispielen verdeutlicht:

* Für eine endliche Menge $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$von nichtleeren Mengen ist es trivial, eine Auswahlfunktion anzugeben: Man wählt von jeder Menge irgendein bestimmtes Element aus, was problemlos möglich ist. Man braucht das Auswahlaxiom hierfür nicht. Ein formaler Beweis würde Induktion über die Größe der endlichen Menge verwenden.

* Für Mengen von nichtleeren Teilmengen der natürlichen Zahlen ist es ebenfalls problemlos möglich:Man wählt von jeder Teilmenge das kleinste Element aus. Ähnlich kann man für eine Menge von abgeschlossenen Teilmengen der reellen Zahlen eine explizite Auswahlfunktion (ohne Verwendung des Auswahlaxioms) angeben, indem man etwa aus jeder Menge das (wenn möglich positive) Element mit kleinstem Absolutbetrag wählt.

Beispiele

* Selbst für Mengen von Intervallen reeller Zahlen ist eine Auswahlfunktion definierbar: Man wählt von jedem Intervall den Mittelpunkt aus.

* Für Mengen von beliebigen nichtleeren Teilmengen der reellen Zahlen gibt es jedoch keine offensichtliche Definition einer Auswahlfunktion. In diesem Fall ist das Auswahlaxiom relevant. Es postuliert die Existenz einer Auswahlfunktion, ohne sie anzugeben. Man kann sogar beweisen, dass man sie nicht für allen Mengen von beliebigen nichtleeren Teilmengen der reellen Zahlen konstruieren kann. Beweisidee: Es gibt nur abzählbar viele ($= |\mathbb{N}|$) Sätze (in einer Sprache), die deswegen nur abzählbar viele Punkte beschreiben können.

Wir haben das Auswahlaxiom bereits benutzt

Einmal im Beweis von Lemma 13 in LA I:

Lemma 12. *$f : A \to B$ sei eine Abbildung und $A \neq \varnothing$. Dann gilt:*

(1) *f ist injektiv $\Longleftrightarrow$ f hat eine Linksinverse.*

(2) *f ist surjektiv $\Longleftrightarrow$ f hat eine Rechtsinverse.*

Beweis von (1) und von der Richtung $\Longleftarrow$ von (2) war sauber.

Beweis: *f ist surjektiv $\Longrightarrow$ f hat eine Rechtsinverse.*

Wiederholung. Eine Rechtsinverse Abbildung (zu $f : A \to B$) ist eine Abbildung $g : B \to A$ mit $f \circ g = Id_B$

Beweis: f sei surjektiv vorausgesetzt. Sei $x \in B$. Die gesuchte rechtsinverse Abbildung $g : A \to B$ wird nun definiert durch $g(x) := y$,wobei y irgendein Punkt aus der Urbildmenge $Urbild_f(y)$ ist.

Die Definition ist nur dann korrekt, wenn wir aus der Menge $Urbild_f(y)$ einen Punkt auswählen können, z.B. falls wir das Auswahlaxiom akzeptieren.

Dann gilt $\forall x \in B$: $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(y) \overset{\text{Def. von } y}{=} x$.

Bemerkung. Das Auswahlaxiom ist zur Existenz einer rechtinversen Abbildung zu einer beliebigen Abbildung äquivalent.

Es ist gefährlich, mit Mengen naiv umzugehen:
Man bekommt sofort einen Widerspruch, wenn man sich zuviel erlaubt:

RUSSELL–ZERMELOsches Paradoxon (I)

Sei $R := \{X \mid X \text{ ist Menge und } X \notin X\}$ die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten.

Dann gilt für eine beliebige Menge Y:

$$Y \in R \quad \Leftrightarrow \quad Y \notin Y$$

Insbesondere gilt dann für $Y = R$:

$$R \in R \quad \Leftrightarrow \quad R \notin R$$

Widerspruch !!!

Halbordnong/Ordnung auf einer Menge

Wiederholung. Eine Relation auf einer Menge M ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$. (Statt $(x, y) \in R$ schreibt man $x\ R\ y$.)
Def. Eine Relation „$\leq$“ heißt Halbordnung, falls sie (für alle $a, b \in M$)

transitiv ist: aus $a \leq b$ und $b \leq c$ folgt $a \leq c$, und

reflexiv ist: $a \leq a$.

antisymmetrisch ist: aus $a \leq b$ und $b \leq a$ folgt $a = b$.

Bsp. Das übliche „$\leq$“ ist eine Halbordnung auf $\mathbb{R}$:
Bsp. Das übliche „$\leq$“ ist eine Halbordnung auf $\mathbb{C}$: Sie besteht aus allen Paaren (x, y) wobei $x, y \in \mathbb{R}$ und $x \leq y$ (in Sinne von $\mathbb{R}$). Z.B. ist weder $(1 + i, i)$ noch $(i, 1 + i)$ in der Relation „$\leq$“

Exkurs: Kardinalzahlen

Wir betrachten die Äquivalenzrelation „gleichmächtig“ auf (der Menge von) allen Mengen.Die Äquivalenzklassen bzgl. diese Relation heißen Kardinalzahlen.

Falls die Menge endlich ist, kann man deren Kardinalzahl mit der Anzahl der Elemente identifizieren: zwei endliche Mengen sind genau dann gleichmächtig, falls sie aus der gleichen Anzahl von Elementen bestehen.
Die Kardinalzahl $\aleph_0$ ist die Äquivalenzklasse von $\mathbb{N}$. Wir wissen bereits, dass $\mid \mathbb{Q} \mid = \mid \mathbb{N} \mid$ ist, also $\mathbb{Q} \in \aleph_0$.
Die Kardinalzahl $\aleph_1$ ist die Äquivalenzklasse von $\mathbb{R}$. In Satz 24 haben wir bewiesen, dass $2^{\mathbb{Q}} \in \aleph_1$ (oder man schreibt $|2^{\mathbb{Q}}| = \aleph_1$.)

Bsp. Die Relation „höchstens gleichmächtig“ ist eine Halbordnung auf der Menge der Kardinalzahlen. In der Tat, sie ist
transitiv: gibt es Injektionen
$\phi : A \to B$ und $\psi : B \to C$, so ist die Verkettung $\psi \circ \phi : A \to C$ eine Injektion.
Also, aus $\aleph_A \leq \aleph_B$ und $\aleph_B \leq \aleph_C$ folgt $\aleph_A \leq \aleph_C$.

reflexiv: $|A| = |A|$,

antisymmetrisch: gibt es Injektionen $\phi : A \to B$ und $\psi : B \to A$, dann ist $|A| = |B|$ nach Definition von „=“.

Exkurs: Die Kontinuumhypothese

- $\mathbb{R}$ hat die **Kardinalität des Kontinuums**, bezeichnet $\aleph_1$.
- $\aleph_1 > \aleph_0$
- Frage: Gibt es eine Kardinalzahl κ mit $\aleph_0 < \kappa < \aleph_1$?

Die Kontinuumshypothese (CH)

Formulierung

Es gibt **keine** Menge M, deren Kardinalität strikt zwischen $\aleph_0$ und $\aleph_1$ liegt.

- Von Cantor vermutet, aber weder beweis- noch widerlegbar im Rahmen der so-genannten ZFC-Axiomen (Zermelo-Fraenkel-Mengenaxiomensystem mit Auswahlaxiom).

Unabhängigkeit der CH

- Gödel (1940): CH kann nicht aus ZFC widerlegt werden (wenn ZFC konsistent ist).
- Cohen (1963): CH kann auch nicht aus ZFC bewiesen werden.
- $\Rightarrow$ CH ist **unabhängig** von ZFC.

Def. – Vorsetzung Eine Halbordnung „$\leq$“ heißt eine Ordnung, falls zusätzlich für jedes $a, b \in M$ gilt: $a \leq b$ oder $b \leq a$.

Bsp. Das übliche „$\leq$“ ist nicht nur eine Halbordnung, sondern auch eine Ordnung auf $\mathbb{R}$.

Bsp. Die Halbordnung „$\leq$“ ist keine Ordnung auf $\mathbb{C}$ (weil weder $i \leq i+1$ noch $i+1 \geq i$).

Wir sagen, dass eine Teilmenge $T \subseteq M$ eine total geordnete Menge bzgl. einer Halbordnung „$\leq$“ ist, falls die Halbordnung „$\leq$“ beschränkt auf T eine Ordnung ist: Für jedes Paar $(x, y) \in T \times T$ gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$.

Bsp. In der halbgeordnete Menge $(\mathbb{C}, \leq)$ ist $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ total geordnet.

Def. – Vorsetzung
Wir sagen, dass eine Teilmenge $T \subseteq M$ eine obere Schranke hat, falls es ein $m \in M$ gibt, so dass $x \leq m$ für alle $x \in T$.
Wir sagen, dass ein Element $m \in T$ maximal ist, wenn es kein $a \in T$ gibt mit $m \leq a$.
Ein Element o von M heißt kleinstes Element, wenn für alle $m \in M$ gilt: $o \leq m$.
Bsp. Ein offenes Intervall auf $\mathbb{R}$ hat kein maximales Element, hat aber eine obere Schranke. Ein abgeschlossenes Interval hat immer ein maximales Element.
Bemerkung. Ein maximales Element muss keine obere Schranke von M sein. Das wäre ein größtes Element. Z.B., falls die Relation R leer ist, ist jedes Element ein maximales Element, weil weder $a\ R\ b$ noch $b\ R\ a$ gilt. Also, maximales Element und kleinstes Element sind keine Antinomien.

Def. – Vorsetzung Eine obere Schranke m heißt eine kleinste obere Schranke von $S \subseteq M$, wenn für alle oberen Schranken $\tilde{m}$ von S gilt: $m \leq \tilde{m}$. Wenn eine kleinste obere Schranke existiert, dann ist sie eindeutig bestimmt.

Wenn für jede total geordnete Teilmenge von M eine obere Schranke existiert, dann heißt M induktiv geordnet. Wenn sogar jeweils eine kleinste obere Schranke existiert, dann heißt M strikt induktiv geordnet.
Bsp. Sei $M \subseteq 2^A$. Wir betrachten die folgende Relation (Inklusionsrelation) auf M:
$X \leq Y \Longleftrightarrow X \subseteq Y$. Eine total geordnete Teilmenge ist eine Familie $T \subseteq 2^A$ von Teilmengen von A, sodass für je zwei verschiedene Elemente $B, C \in T$ entweder $B \subseteq C$ oder $C \subseteq B$ gilt. Wenn nun die Vereinigung aller Mengen aus T auch in M liegt (das ist nicht selbstverständlich!), dann hat man eine (und sogar die kleinste) obere Schranke gefunden.

(Tarskischer) Fixpunktsatz

Satz 33 (Fixpunktsatz)(Alfred Tarski: 1901 – 1982; Polen und USA) Es sei $(M, \leq)$ eine nichtleere geordnete Menge mit einem kleinsten Element o. In M habe jede total geordnete Menge T eine kleinste obere Schranke. Sei $F : M \to M$ eine Abbildung mit der Eigenschaft $\forall m \in M : m \;\leq\; F(m)$. Dann gibt es ein $m \in M$ mit $F(m) = m$.

Terminologie: $m \in M$ ist ein Fixpunkt einer Abbildung $F : M \to M$, falls $F(m) = m$. Sie haben bestimmt das Wort "Fixpunkt" in Analysis gehört und werden es auch in den weiterführenden Vorlesungen hören. Es geben mehrere Fixpunktsätzen (etwa Fixpunktsatz von Banach).

Bsp. Wir betrachten Halbintervall $M = (0, 1]$. Als Ordnung nehmen wir die Relation "kleiner gleich". Die kleinste obere Schranke einer $T \subseteq M$ ist $\sup T$ (existiert, weil $1 \in (0, 1]$). In diesem Fall kann man den Fixpunkt sofort finden: aus der Bedingung $m \;\leq\; F(m)$ folgt $F(1) = 1$.

Bsp. Die gleiche Argumentation kann man auf jeder total geordneten Menge M anwenden: die kleinste obere Schranke o von M, wenn sie existiert, hat die Eigenschaft $F(o) = o$. In der Tat, $F(o) \leq o$ wegen der Definition der kleinsten oberen Schranke, und $o \leq F(o)$ haben wir nach Voraussetzungen

Satz 33 (Fixpunktsatz) Es sei $(M, \leq)$ eine nichtleere geordnete Menge mit einem kleinsten Element o. In M habe jede total geordnete Menge T eine kleinste obere Schranke. Sei $F : M \to M$ eine Abbildung mit der Eigenschaft
$\forall m \in M : m \leq F(m)$. Dann gibt es ein $m \in M$ mit $F(m) = m$.

Beweis. Wir nennen eine Teilmenge S von M zulässig, wenn die folgenden drei Bedingungen gelten: $o \in S$, $Bild_F(S) \subseteq S$ und für jede total geordnete Teilmenge $T \subseteq S$ liegt auch die kleinste obere Schranke $\bar{T}$ (von T) in S. Zum Beispiel ist M selbst zulässig.

Nun sei S_0 der Durchschnitt aller zulässigen Teilmengen von M. S_0 ist auch zulässig: $o \in S_0$;

$$Bild_F(S_0) = Bild_F\left(\bigcap_{S \text{ zulässig}} S\right) = \bigcap_{S \text{ zulässig}} Bild_F(S) \subseteq \bigcap_{S \text{ zulässig}} S = S_0,$$

und wenn T in allen S liegt, dann liegt auch $\bar{T}$ in allen S, schließlich auch in S_0.

Bemerkung. Wir haben dieselbe Idee früher mehrmals benutzt. Siehe Def. von linearer Hülle und affiner Hülle.

Also, S_0 ist selbst zulässig und damit die kleinste aller zulässigen Teilmengen von M.

Wir zeigen, dass S_0 total geordnet ist. Daraus folgt für die kleinste obere Schranke $\bar{S}_0$ einerseits,
(a) dass $\bar{S}_0$ das größte Element von S_0 ist.
(b) Andererseits gilt aber wegen der Zulässigkeit $F(\bar{S}_0) \leq \bar{S}_0$.

Wir bekommen insgesamt $\bar{S}_0 \overset{(a)}{\leq} F(\bar{S}_0) \overset{(b)}{\leq} \bar{S}_0$, und damit die gewünschte Gleichheit.

Noch zu zeigen ist also die folgende Behauptung
Behauptung: S_0 ist total geordnet.

Behauptung: S_0 ist total geordnet.

Beweis der Behauptung. Wir nennen $e \in S_0$ ein extremales Element, wenn für alle $s \in S_0$ mit $\underbrace{s \leq e, s \neq e}_{s<e}$ gilt, dass $F(s) \leq e$. Zum Beispiel ist das kleinste Element o extremal. Für ein extremales e setzen wir

$S_e := \{s \in S_0 \mid s \leq e \text{ oder } F(e) \leq s\}$.

Dann ist für jedes extremale e die Menge S_e zulässig:

- o liegt in S_e .

- Für jedes Element $s \in S_e$ folgt aus $s < e$ sofort $F(s) \leq e$ nach Def. vom extremalen Element,

aus $s = e$ folgt $F(s) = F(e) \leq e$ (nach Voraussetzung),
und aus $s \not\leq e$ folgt $F(e) \leq s \leq F(s)$.

Also gilt insgesamt $Bild_F(S_e) \subseteq S_e$.

- Es sei T eine total geordnete Teilmenge von S_e. Wenn dann für alle $t \in T$ die Ungleichung $t \leq e$ gilt,dann gilt für die kleinste obere Schranke $\bar{T} = e$. Wenn es aber mindestens ein t gibt, sodass die Ungleichung $t \leq e$ nicht gilt, dann ist $e \leq F(t) \leq F(\bar{T})$. Wir sehen aus diesen beiden Fällen: $\bar{T} \in S_e$.

Da aber S_0 die kleinste zulässige Teilmenge von M ist, muss also für alle extremalen e gelten: $S_e = S_0$.

Nun müssen wir noch zeigen, dass jedes $e \in S_0$ extremal ist. Dann folgt nämlich für $s \in S_0$:

$$s \in S_e \text{ also } s \leq e \text{ oder } e \leq F(e) \leq s.$$

Das besagt dann, dass S_0 total geordnet ist.
Um zu beweisen, dass jedes $e \in S_0$ extremal ist, betrachten wir $E := \{e \in S_0 \mid e \text{ ist extremal }\}$.
Nun weisen wir nach, dass E zulässig ist, und damit gleich S_0.
$o \in E$: klar.
Abgeschlossenheit von E unter F:
$\forall e \in E,\ \forall s \in S_0 = S_e, s < F(e)$ gilt: $F(s) \leq F(e)$.
Diese letzte Ungleichung gilt, da $F(e) \not\leq s$ und damit $s \leq e$. Nun greift die Extremalität von e.
Nun sei noch $T \subseteq E$ total geordnet, und die kleinste obere Schranke sei $\bar{T}$. Zu zeigen ist $\bar{T} \in E$. Sei dazu $s \in S_0$, $s < \bar{T}$. Wenn für jedes $t \in T$ die Relation $F(t) \leq s$ gelten würde, dann wäre $\bar{T}$ als obere Schranke von extremalen Elementen selbst $\leq s$ – Widerspruch.
Also gibt es ein extremales $e \in T$ mit $F(e) \neq s$, und da $S_0 = S_e$ gilt, folgt daraus zwangsweise $s \leq e$. Aber $s \neq e$ impliziert dann $F(s) \leq e \leq \bar{T}$, und aus $s = e$ folgt $F(s) = F(e) \in E$, denn E ist unter F abgeschlossen. Also ist auch in diesem Fall $F(s) \leq \bar{T}$. Damit folgt insgesamt, dass $\bar{T}$ extremal ist, $\square$

Satz 34 (Lemma von Zorn) Jede nichtleere halbgeordnete Menge, in der jede total geordnete Teilmenge eine obere Schranke hat, enthält mindestens ein maximales Element (falls das Auswahlaxiom gilt).

Beweis. (a) Wir behandeln zuerst den Fall einer strikt induktiv geordneten Menge. (**Wiederhol.** – Wenn für jede total geordnete Teilmenge von M eine kleinste obere Schranke existiert, dann heißt M strikt induktiv geordnet.)

Da es eben langt, ein maximales Element zu finden, das $\geq x$ für ein willkürlich gewähltes x ist, dürfen wir uns auf den Fall beschränken, dass M ein kleinstes Element enthält. Dann nehmen wir an, es gebe kein maximales Element. Wir finden also für jedes $m \in M$ ein größeres Element $F(m)$ und definieren damit eine Funktion $F : M \to M$, für die gilt:

$\forall m \in M : m < F(m)$.

Bemerkung. Wir brauchen dafür das Auswahlaxiom.
Die Funktion F ist wie im Fixpunktsatz 33, deswegen muss F einen Fixpunkt haben: Widerspruch.

Nun sei M induktiv geordnet und H die Menge aller total geordneten Teilmengen von M. Dann ist H bezüglich der Inklusion geordnet, und zwar strikt induktiv, denn die Vereinigung einer total geordneten Familie von total geordneten Teilmengen ist wieder eine total geordnete Teilmenge und offensichtlich die kleinste obere Schranke der Familie (bezüglich Inklusion). Insbesondere besitzt H nach (a) ein maximales Element T (das ist eine total geordnete Teilmenge von M). Es sei O eine obere Schranke von T. Dann muss O schon zu T gehören, da $T \cup O$ eine total geordnete Menge ist, die T enthält, aber T schon maximal ist. Dieses Element O ist dann ein maximales Element in M, denn für jedes $m \in M$ folgt aus $O \leq m$, dass m eine obere Schranke von T ist und somit ebenfalls zu T gehören muss, also insbesondere $m \leq O$ und damit $m = O$.

Hamel-Basen

Def. Eine Hamel-Basis eines $\mathbb{K}$-Vektorraums $(V, +, \cdot)$ ist eine Teilmenge $B \subseteq V$, so dass

• sie linear unabhängig ist (d.h., dass das Null-Element $\vec{0}$ nur als triviale **ENDLICHE** Linearkombination der Elemente von B dargestellt werden kann.)

•• sie ist erzeugend: Man kann jedes Element von V als **ENDLICHE** Linearkombination der Elemente von B darstellen.

Bemerkung. In Satz 7 LA I (Vorl. 6-7) haben wir bewiesen, dass (••) zur folgenden Aussage äquivalent ist: Die Menge B ist maximal: wenn wir noch einen Element hinzufügen, wird die Menge linear abhängig.

Falls der Vektorraum V endlich erzeugt ist, ist Hammel-Basis fast dasselbe wie eine Basis: wenn wir die Elemente von B als ein Tupel schreiben, bekommen wir eine Basis, und umgekehrt.

Satz 35. Jeder Vektorraum hat eine Hamel-Basis

Beweis. Sei V ein Vektorraum. Wir betrachten:

$P := \{X \subseteq V \mid X \text{ linear unabhängig } \} \subseteq 2^V$.
Die Menge P ist bezuglich der Relation „$\subseteq$" halbgeordnet. Es gilt:

1. Besteht V nicht nur aus dem Nullvektor, dann ist P nicht leer (weil jede Einermenge $\{v\}$ mit $v \in V$ und $v \neq \vec{0}$ ein Element von P ist).

2. Für jede total geordnete Teilmenge $T \subseteq P$ ist auch
$\bigcup T := \bigcup_{X \in T} X = \{v \mid \exists X \in T : v \in X\}$ in P.
In der Tat, die Menge $\bigcup T$ ist linear unabhängig: von endlich vielen Vektoren $\underbrace{v_1}_{\in X_1}, \ldots, \underbrace{v_k}_{\in X_k}$ liegen alle in der größten der $X_1, \ldots, X_k$(die existiert, weil T total geordnet ist). Dann sind sie nach Konstruktion linear unabhängig. Also hat T eine obere Schranke.

Aus dem Lemma von Zorn folgt nun, dass P ein maximales Element hat. Die maximalen Elemente von P sind nun aber genau die maximalen (im Sinne der Bemerkung oben) linear unabhängigen Teilmengen von V, also die Basen von V. Daher hat V eine Basis und es gilt darüber hinaus, dass jede linear unabhängige Teilmenge von V in einer Basis von V enthalten ist, $\square$

Bsp. Da $\mathbb{Q}$ ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist, ist $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Nach Satz 25 ist er unendlichdimensional. Er hat jedoch eine Hamel-Basis, d.h. eine Menge $B \subseteq \mathbb{R}$, sodass jedes $a \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Linearkombination der Elemente von B ist. Diese Menge B kann man (möglicherweise) nicht konstruieren, wir kennen nur deren Existenz.

Die Basis B ist nicht explizit gegeben und ist mit Hilfe einer Auswahlfunktion konstruiert. Wir können sie nicht explizit angeben: „Explizit“ bedeutet, dass wir die Basiselemente mit Worten beschreiben.

Aber: Die Kardinalität von allen möglichen Sätze ist $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ (auch wenn wir unendliche Sätze erlauben), aber die Kardinalität von B ist $\aleph_1 = |\mathbb{R}|$.

Frage. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle

$$f(x+y) = f(x) + f(y). \qquad (*)$$

Ist sie linear?

(Umformulieren: Folgt $f(\lambda \cdot x) = \lambda f(x)$ aus $(*)$?)

Angenomenn $f(1) = \alpha \neq 0$. Dann ist $f(2) = f(1+1) \overset{(*)}{=} 2\alpha$, induktiv $f(n) = n \cdot \alpha$.

Dann ist $f(0+1) \overset{(*)}{=} f(0) + f(1) = f(1) \Longrightarrow f(0) = 0$.
Analog ist $f(-n)$ diejenige Zahl, für die $f(-n) + f(n) = f(0) = 0$.
Folglich ist $f(-n) = -n\alpha$
Analog ist $f(p/q)$ diejenige Zahl, für die

$$q \cdot f(p/q) = \underbrace{f(p/q) + \ldots + f(p/q)}_{q \text{ Stück}} \overset{(*)}{=} f(\underbrace{p/q + \ldots + p/q}_{q \text{ Stück}}) = f(p) =$$

$p\alpha \Longrightarrow f(p/q) = p/q \cdot \alpha$.
Also fällt $f(x)$ auf $\mathbb{Q}$ mit (der linearen Funktion) $\alpha \cdot x$ zusammen.
Insbesondere gilt: Wenn wir zusätzlich verlangen, dass f stetig ist, dann ist sie linear.

Es gibt aber nichtlineare Funktionen mit der Bedingung $(*)$:
Man betrachte z.B. zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, die über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig sind (z.B. $a = 1$ und $b = \sqrt{2}$), und eine Hamel-Basis B in $\underbrace{\mathbb{R}}_{\text{ein } \mathbb{Q}\text{-Vektorraum}}$,
sodass $a, b \in B$ sind.

> **Wiederholung.** Um eine lineare Abbildung zu definieren, brauchen wir nur die Bilder von Basiselementen anzugeben. (Lemma 15 LA I Vorl. 8-9)

Wir wählen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und setzen $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$ und $\forall x \in B \setminus \{a, b\}$ setzen wir $f(x) := 0$.
In dieser Weise haben wir die Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ definiert, die linear ist (als Abbildung von $\mathbb{R}$ betrachtet als ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{R}$ betrachtet als ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$).
(Wenn Sie Beweis von Lemma 15 LA I Vorl. 8-9 anschauen, können wir die Abbildung sogar explizit beschreiben: für die Puntke aus der $\sqrt{2}-$ Erweiterung von $\mathbb{Q}$, also für die Puntke der Form $x + y\sqrt{2}$, wobei $x, y \in \mathbb{Q}$, gilt $f(x + y\sqrt{2}) = x\alpha + y\beta$. Die Abbildung ist wohldefiniert, da es nur eine Möglichkeit ist, die Zahl der Form $x + y\sqrt{2}$ (mit $x, y \in \mathbb{Q}$) in der Form $x + y\sqrt{2}$ (mit $x, y \in \mathbb{Q}$) zu schreiben.)
Sie erfüllt deswegen $f(x + y) = f(x) + f(y)$, wie wir wollen. (Sie erfüllt sogar $f\left(\frac{p_1}{q_1}x + \frac{p_2}{q_2}y\right) = \frac{p_1}{q_1}f(x) + \frac{p_2}{q_2}f(y)$.

Bemerkung. Man kann selbstverständlich mehr als zwei Basisvektoren benutzen, sogar $\aleph_0$ Vektoren.

Was wir über f wissen

Def von f: $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$ und $\forall x \in B \setminus \{a, b\}$ $f(x) := 0$.

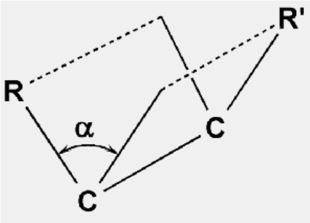
Also, wir können nur die Werte der Funktion f auf den Zahlen der Form $\frac{p_1}{q_1}a + \frac{p_2}{q_2}b$ berechnen (wobei $\frac{p_i}{q_i} \in \mathbb{Q}$):
$f\left(\frac{p_1}{q_1}a + \frac{p_2}{q_2}b\right) = \frac{p_1}{q_1}\alpha + \frac{p_2}{q_2}\beta$. Das reicht, um das 3. Problem von Hilbert zu lösen.

Das dritte Hilbertsche Problem (1900): Sind je zwei 3-dim Polyeder mit gleichem Volumen zerlegungsgleich, das heißt kann man immer ein Polyeder in polyedrische Teile schneiden und das andere Polyeder aus diesen Teilen zusammensetzen?

Antwort: Nein: Sogar einen Würfel kann man nicht in polyedrische Teile schneiden und dann ein regelmäßiges Tetraeder aus diesen Teilen zusammensetzen.

Beweis. Sei $\mathcal{P}$ die Menge aller Polyeder. Wir betrachten die folgende Abbildung $F : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$:

$$F(P) := \sum_{\substack{l \text{ ist} \\ \text{eine Kante} \\ \text{von } P}} |l| \cdot f(\phi(l)),$$



wobei $|l|$ die Länge der Kante l und $\phi(l)$ der Diederwinkel an der Kante l ist, s. Bild.

Und f ist die oben konstruierte Abbildung (mit der Eigenschaft $f(x+y) = f(x) + f(y)$). Die Daten $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind wie folgt:

a **ist der Diederwinkel des Würfels (d.h.** $a = \pi/2$**)**
b **ist der Diederwinkel des regelmäßigen Tetraeders(die Zahlen** a **und** b **sind über** $\mathbb{Q}$ **linear unbhängig,wir werden es nicht beweisen).**
$\alpha = 0$ **und** $\beta = 1$

Die Funktion F vom Würfel und vom regelmäßigen Tetraeder

Wir können die Funktion f nur für einige Einträge ausrechnen, und zwar nur für Linearkombinationen von a und b. Das reicht, um $F(\text{Würfel})$ und $F(Reg.Tetraeder)$ auszurechnen.

$$F(\text{Würfel}) = \sum_{\substack{I \text{ ist} \\ \text{eine Kante}}} |I| \underbrace{\alpha}_{=0} = 0 \quad ,$$

$$F(\text{Reg. Tetraeder}) = \sum_{\substack{I \text{ ist} \\ \text{eine Kante}}} |I| \underbrace{\beta}_{=1} > 0.$$

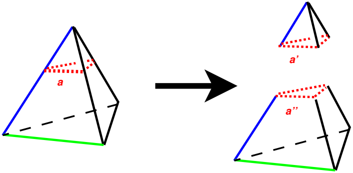
Wir sehen, dass $F(\text{Würfel}) \neq F(\text{Reg. Tetraeder})$
Die folgende Behauptung löst das 3. Problem von Hilbert:

Behauptung Sind zwei Polyeder P_1 und P_2 zerlegungsgleich, so gilt $F(P_1) = F(P_2)$.

Lösung des 3. Problems von Hilbert. Da $F(\text{Würfel}) \neq F(\text{Reg. Tetraeder})$ ist, sind Würfel und reg. Tetraeder nicht zerlegungsgleich.

Behauptung Sind zwei Polyeder P_1 und P_2 zerlegungsgleich, so gilt $F(P_1) = F(P_2)$.

Beweis der Behauptung: Wenn wir ein Polyeder (T auf dem Bild) mit einer Ebene in zwei Polyeder (T_1, T_2) schneiden, gilt
$F(T) = F(T_1) + F(T_2)$.



In der Tat, der Ausdruck $|l|f(\phi(l))$, der der grünen Kante entspricht, bleibt unverändert.
Der Ausdruck $|l|f(\phi(l))$, der der blauen Kante entspricht, ist die Summe der Ausdrücke der blauen Kanten von T_1 und T_2.
Die Summe der Ausdrücke für die neuen Kanten a' und a'' ist 0, weil
$|a'| = |a''| = |a|$ und

$$|a'|f(\phi(a')) + |a''|f(\phi(a'')) \overset{(*)}{=} |a|f(\phi(a') + \phi(a'')) = |a|f(\pi) = 2|a|f(\pi/2) = 0.$$

Da man OBdA annehmen kann, dass P_1 mit Hilfe von endlich vielen Schnitten in zwei Polyeder zerlegt ist, ist die Behauptung bewiesen.