

Hilbertraume:

- ▶ Hilberträume sind vollständige, innere Produkträume.
- ▶ Sie verallgemeinern den Euklidischen Raum auf unendlichdimensionale Räume.
- ▶ Zentral in der Funktionalanalysis, Quantenmechanik, Signalverarbeitung etc.

Definition: Prä-Hilbertraum

Def. Ein **Prä-Hilbertraum** ist ein Vektorraum H über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, ausgestattet mit einem hermitschem Produkt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$$

das linear in der ersten Komponente ist, und die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- ▶ Positivit definitheit: $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = \vec{0}$
- ▶ Hermitizität: $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- ▶ Linearität in der ersten Komponente
 $\langle \lambda x + \lambda' x', y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \lambda' \langle x', y \rangle$

Definition: Prä-Hilbertraum

Def. Ein **Prä-Hilbertraum** ist ein Vektorraum H über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, ausgestattet mit einem hermitschem Produkt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$$

das linear in der ersten Komponente ist, und die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- ▶ Positivit definitheit: $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = \vec{0}$
- ▶ Hermitizität: $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- ▶ Linearität in der ersten Komponente
 $\langle \lambda x + \lambda' x', y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \lambda' \langle x', y \rangle$

Bemerkung. Falls wir über $\mathbb{R}$ arbeiten, ist Hermitizität dasselbe wie Symmetrie, also Prä-Hilbertraum über $\mathbb{R}$ ist ein Euklidischer Raum nach unsere Definition. Weitere Beispiele, über $\mathbb{C}$, sind endlichdimensionale Räume mit positivdefiniten hermitschen Formen, siehe Woche 5 (Teil 1).

Prä-Hilbert Raum ist ein metrischer Raum

mit der Metrik (=Abstandsfunktion)

$$d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}. \quad (*)$$

Prä-Hilbert Raum ist ein metrischer Raum

mit der Metrik (=Abstandsfunktion)

$$d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}. \quad (*)$$

Wir definieren auf (wie vorher in Kapitel Euklidische Geometrie) die **Norm** (=Länge) eines Vektors $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Dann ist $d(x, y) = \|x - y\|$.

Prä-Hilbert Raum ist ein metrischer Raum

mit der Metrik (=Abstandsfunktion)

$$d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}. \quad (*)$$

Wir definieren auf (wie vorher in Kapitel Euklidische Geometrie) die **Norm** (=Länge) eines Vektors $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Dann ist $d(x, y) = \|x - y\|$.

Def. Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt eine **Metrik**, wenn $\forall x, y, z \in X$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(Definitheit) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(Symmetrie) $d(x, y) = d(y, x)$,

(Dreiecksungleichung) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Prä-Hilbert Raum ist ein metrischer Raum

mit der Metrik (=Abstandsfunktion)

$$d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}. \quad (*)$$

Wir definieren auf (wie vorher in Kapitel Euklidische Geometrie) die **Norm** (=Länge) eines Vektors $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Dann ist $d(x, y) = \|x - y\|$.

Def. Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt eine **Metrik**, wenn $\forall x, y, z \in X$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(Definitheit) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(Symmetrie) $d(x, y) = d(y, x)$,

(Dreiecksungleichung) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Die Abstandsfunktion d gegeben durch $(*)$ ist offensichtlich definit und symmetrisch. Für die Dreiecksungleichung brauchen wir noch die Cauchy-Schwarz Ungleichung. Wir haben die Cauchy-Schwarz Ungleichung in LA I gezeigt, allerdings für bilinearformen und nicht für hermiteschen Formen. Beweis ist aber analog und wird jetzt kurz skizziert.

Cauchy-Schwarz-Ungleichung, jetzt auch für Hermitschen Formen

Für alle $x, y \in H$ gilt:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung, jetzt auch für Hermitschen Formen

Für alle $x, y \in H$ gilt:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Bemerkung. $\langle x, y \rangle$ kann komplex sein. Ohne “Betragszeichen” können wir $\langle x, y \rangle$ und $\|x\| \cdot \|y\|$ nicht vergleichen.

- ▶ Wir betrachten die Funktion
$$f(\lambda) = \|x - \lambda y\|^2 = \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle$$
- ▶ Diese ist für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$) ≥ 0
- ▶ Nutzen der Nichtnegativität zur Herleitung der Ungleichung

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x - \lambda y\|^2 = \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - \bar{\lambda} \langle x, y \rangle - \lambda \langle y, x \rangle + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle \quad (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x - \lambda y\|^2 = \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - \bar{\lambda} \langle x, y \rangle - \lambda \langle y, x \rangle + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle \quad (*) \end{aligned}$$

Wähle $\lambda = \frac{\langle y, x \rangle}{\|y\|^2}$ (falls $y \neq \vec{0}$. Der Fall $y = \vec{0}$ ist trivial, da in diesem Fall die C-S Ungleichung offensichtlich gilt).

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x - \lambda y\|^2 = \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - \bar{\lambda} \langle x, y \rangle - \lambda \langle y, x \rangle + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle \quad (*) \end{aligned}$$

Wähle $\lambda = \frac{\langle y, x \rangle}{\|y\|^2}$ (falls $y \neq \vec{0}$. Der Fall $y = \vec{0}$ ist trivial, da in diesem Fall die C-S Ungleichung offensichtlich gilt). Nach Einsetzen dieses $\lambda = \frac{\langle y, x \rangle}{\|y\|^2}$ in (*), bekommen wir:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} \langle x, y \rangle - \frac{\langle y, x \rangle}{\|y\|^2} \langle y, x \rangle + \left(\frac{\langle y, x \rangle}{\|y\|^2} \right)^2 \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 - \frac{(\langle x, y \rangle)^2}{\|y\|^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x - \lambda y\|^2 = \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - \bar{\lambda} \langle x, y \rangle - \lambda \langle y, x \rangle + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle \quad (*) \end{aligned}$$

Wähle $\lambda = \frac{\langle y, x \rangle}{\|y\|^2}$ (falls $y \neq \vec{0}$. Der Fall $y = \vec{0}$ ist trivial, da in diesem Fall die C-S Ungleichung offensichtlich gilt). Nach Einsetzen dieses $\lambda = \frac{\langle y, x \rangle}{\|y\|^2}$ in (*), bekommen wir:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} \langle x, y \rangle - \frac{\langle y, x \rangle}{\|y\|^2} \langle y, x \rangle + \left(\frac{\langle y, x \rangle}{\|y\|^2} \right)^2 \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 - \frac{(\langle x, y \rangle)^2}{\|y\|^2}. \end{aligned}$$

Multiplikation mit $\|y\|^2$ ergibt:

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \quad \Rightarrow \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Folgerung: Dreiecksungleichung(en)

Zuerst für die Norm: Für alle $u, v \in H$ gilt die Dreiecksungleichung:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Folgerung: Dreiecksungleichung(en)

Zuerst für die Norm: Für alle $u, v \in H$ gilt die Dreiecksungleichung:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle = \|u\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2|\langle u, v \rangle| + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2\end{aligned}$$



Oben habe ich benutzt, dass für jede Zahl $a + ib \in \mathbb{C}$ ist $\operatorname{Re}(a + ib) = a \leq |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Folgerung: Dreiecksungleichung(en)

Zuerst für die Norm: Für alle $u, v \in H$ gilt die Dreiecksungleichung:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle = \|u\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2|\langle u, v \rangle| + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2\end{aligned}$$



Oben habe ich benutzt, dass für jede Zahl $a + ib \in \mathbb{C}$ ist $\operatorname{Re}(a + ib) = a \leq |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Um die Dreiecksungleichung $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ für die Abstandsfunktion zu beweisen, ersetzen wir in

$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ u mit $x - y$ und v mit $y - z$. Dann ist

$$\|u + v\| = \|x - y + y - z\| = \|x - z\| = d(x, z).$$

Bsp: Der Prä-Hilbert Raum ℓ^2

Der Raum $\ell^2(\mathbb{C})$ (bzw. $\ell^2(\mathbb{R})$) ist definiert als

$$\ell^2 := \left\{ (x_k)_{k \in \mathbb{N}}, x_k \in \mathbb{C} \text{ (oder } \mathbb{R}) \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

mit dem hermiteschen Produkt

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k} \quad (*)$$

Bsp: Der Prä-Hilbert Raum ℓ^2

Der Raum $\ell^2(\mathbb{C})$ (bzw. $\ell^2(\mathbb{R})$) ist definiert als

$$\ell^2 := \left\{ (x_k)_{k \in \mathbb{N}}, x_k \in \mathbb{C} \text{ (oder } \mathbb{R}) \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

mit dem hermitschen Produkt

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k} \quad (*)$$

Wohldefiniert: wir müssen zeigen, dass $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$ endlich ist.
Für jede Komponente $x_k \overline{y_k}$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 \leq |x_k - y_k|^2 &= (x_k - y_k) \overline{(x_k - y_k)} = |x_k|^2 - 2\operatorname{Re}(x_k \overline{y_k}) + |y_k|^2 \\ \implies |\operatorname{Re}(x_k \overline{y_k})| &\leq \frac{1}{2}(|x_k|^2 + |y_k|^2). \end{aligned}$$

Bsp: Der Prä-Hilbert Raum ℓ^2

Der Raum $\ell^2(\mathbb{C})$ (bzw. $\ell^2(\mathbb{R})$) ist definiert als

$$\ell^2 := \left\{ (x_k)_{k \in \mathbb{N}}, x_k \in \mathbb{C} \text{ (oder } \mathbb{R}) \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

mit dem hermitschen Produkt

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k} \quad (*)$$

Wohldefiniert: wir müssen zeigen, dass $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$ endlich ist.
Für jede Komponente $x_k \overline{y_k}$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 \leq |x_k - y_k|^2 &= (x_k - y_k) \overline{(x_k - y_k)} = |x_k|^2 - 2\operatorname{Re}(x_k \overline{y_k}) + |y_k|^2 \\ \implies |\operatorname{Re}(x_k \overline{y_k})| &\leq \frac{1}{2}(|x_k|^2 + |y_k|^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq |x_k - iy_k|^2 &= (x_k - iy_k) \overline{(x_k - iy_k)} = |x_k|^2 + 2\operatorname{Im}(x_k \overline{y_k}) + |y_k|^2 \\ \implies |\operatorname{Im}(x_k \overline{y_k})| &\leq \frac{1}{2}(|x_k|^2 + |y_k|^2). \end{aligned}$$

Bsp: Der Prä-Hilbert Raum ℓ^2

Der Raum $\ell^2(\mathbb{C})$ (bzw. $\ell^2(\mathbb{R})$) ist definiert als

$$\ell^2 := \left\{ (x_k)_{k \in \mathbb{N}}, x_k \in \mathbb{C} \text{ (oder } \mathbb{R}) \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

mit dem hermitschen Produkt

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k} \quad (*)$$

Wohldefiniert: wir müssen zeigen, dass $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$ endlich ist.
Für jede Komponente $x_k \overline{y_k}$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 \leq |x_k - y_k|^2 &= (x_k - y_k) \overline{(x_k - y_k)} = |x_k|^2 - 2\operatorname{Re}(x_k \overline{y_k}) + |y_k|^2 \\ \implies |\operatorname{Re}(x_k \overline{y_k})| &\leq \frac{1}{2}(|x_k|^2 + |y_k|^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq |x_k - iy_k|^2 &= (x_k - iy_k) \overline{(x_k - iy_k)} = |x_k|^2 + 2\operatorname{Im}(x_k \overline{y_k}) + |y_k|^2 \\ \implies |\operatorname{Im}(x_k \overline{y_k})| &\leq \frac{1}{2}(|x_k|^2 + |y_k|^2). \end{aligned}$$

Dann in der partiellen Summe $\sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$ die reelle und imaginäre Anteile durch $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (|x_k|^2 + |y_k|^2)$. Deswegen konvergiert die Summe absolut (und deswegen konvergiert).

Wir zeigen, dass ℓ^2 ein Prä-Hilbert Raum ist.

Wir zeigen, dass ℓ^2 ein Prä-Hilbert Raum ist.

Beweis. Für $x, y, z \in \ell^2$, $\alpha \in \mathbb{C}$:

► **Linearität bzgl. des ersten Arguments:**

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \sum (\alpha x_n + \beta y_n) \overline{z_n} = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$$

► **Hermiteisch:**

$$\langle x, y \rangle = \sum x_n \overline{y_n} = \overline{\sum y_n \overline{x_n}} = \overline{\langle y, x \rangle}$$

► **Positivdefinitheit:**

$$\langle x, x \rangle = \sum |x_n|^2 \geq 0, \quad \text{und} \quad \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$$

Bsp: $C^0([a, b]; \mathbb{C})$ mit L^2 -Produkt ist ein Prä-Hilbertraum

Bsp: $C^0([a, b]; \mathbb{C})$ mit L^2 -Produkt ist ein Prä-Hilbertraum

Def. L^2 -Produkt ist die folgende hermitesche Form auf $C^0([a, b]; \mathbb{C})$ (Raum von stetigen komplexwertigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$):

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \quad (*)$$

Bsp: $C^0([a, b]; \mathbb{C})$ mit L^2 -Produkt ist ein Prä-Hilbertraum

Def. L^2 -Produkt ist die folgende hermitesche Form auf $C^0([a, b]; \mathbb{C})$ (Raum von stetigen komplexwertigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$):

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \quad (*)$$

Bemerkung. Falls wir über $\mathbb{R}$ arbeiten, definiert die Formel $(*)$ ein Skalarprodukt auf $C^0([a, b]; \mathbb{R})$

Bsp: $C^0([a, b]; \mathbb{C})$ mit L^2 -Produkt ist ein Prä-Hilbertraum

Def. L^2 -Produkt ist die folgende hermitesche Form auf $C^0([a, b]; \mathbb{C})$ (Raum von stetigen komplexwertigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$):

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \quad (*)$$

Bemerkung. Falls wir über $\mathbb{R}$ arbeiten, definiert die Formel $(*)$ ein Skalarprodukt auf $C^0([a, b]; \mathbb{R})$

Bemerkung. Es ist wichtig, dass das Intervall geschlossen ist. Weil auf dem offenen Intervall (a, b) die Operation $\int_{(a,b)} f(x) \overline{g(x)} dx$ nicht definiert ist. In der Tat, etwa für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$, welche auf dem Intervall $(0, 1)$ stetig ist, ist $\int_{(0,1)} f(x) \overline{f(x)} dx = \infty$.

Beweis, dass $(*)$ eine positivdefinite hermitsche Form ist:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \quad (*)$$

Beweis, dass $(*)$ eine positivdefinite hermitsche Form ist:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \quad (*)$$

Für alle $f, g, h \in C^0([a, b]; \mathbb{C})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

► Linearität in der ersten Komponente:

$$\begin{aligned} \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) \bar{h}(x) dx &= \int_a^b \alpha f(x) \bar{h}(x) + \beta g(x) \bar{h}(x) dx \\ &= \alpha \int_a^b f(x) \bar{h}(x) dx + \beta \int_a^b g(x) \bar{h}(x) dx \end{aligned}$$

► Hermitizität:

$$\int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx = \overline{\int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx} =$$

► Positivdefinitheit:

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b |f(x)|^2 dx \geq 0 \text{ und ist } = 0 \text{ wenn } f \equiv 0$$

Dichte Teilmengen in metrischen Räumen

Def. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann heißt A **dicht** in X , wenn:

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 : \exists a \in A \text{ mit } d(x, a) < \varepsilon$$

Äquivalent: Der Abschluss (in Sinne von Analysis) von A ist ganz X , also $\overline{A} = X$.

Dichte Teilmengen in metrischen Räumen

Def. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann heißt A **dicht** in X , wenn:

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 : \exists a \in A \text{ mit } d(x, a) < \varepsilon$$

Äquivalent: Der Abschluss (in Sinne von Analysis) von A ist ganz X , also $\overline{A} = X$.

Beispiele.

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind dicht in $\mathbb{R}$: In jeder Umgebung eines reellen Punktes liegt eine rationale Zahl.

Auch die Teilmenge $\mathbb{Q}^n \in \mathbb{R}^n$ ist dicht in $\mathbb{R}^n$.

Separabler metrischer Raum

Def. Eine Menge M ist **abzählbar**, wenn $|M| = |\mathbb{N}|$. Ein metrischer Raum (X, d) heißt **separabel**, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

Separabler metrischer Raum

Def. Eine Menge M ist **abzählbar**, wenn $|M| = |\mathbb{N}|$. Ein metrischer Raum (X, d) heißt **separabel**, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

Das heißt: Es existiert $D = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ mit

$$\overline{D} = X$$

(Def. von Abschluss $\overline{D}$ einer Teilmenge von X wird auf der nächsten Folien wiederholt).

Separabler metrischer Raum

Def. Eine Menge M ist **abzählbar**, wenn $|M| = |\mathbb{N}|$. Ein metrischer Raum (X, d) heißt **separabel**, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

Das heißt: Es existiert $D = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ mit

$$\overline{D} = X$$

(Def. von Abschluss $\overline{D}$ einer Teilmenge von X wird auf der nächsten Folie wiederholt).

Beispiele

- ▶ $\mathbb{R}^n$ mit der Standardmetrik ist separabel (dichte Menge: $\mathbb{Q}^n$).
- ▶ Der Prä-Hilbertraum ℓ^2 ist separabel (Standardbasisvektoren mit rationalen Koeffizienten erzeugt dichte Teilmenge. Wenn wir über $\mathbb{C}$ arbeiten, sollen wir die Koeffizienten aus

$\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ = Menge von komplexen Zahlen sodass reelle und imaginäre Anteile rational sind

nehmen.)

Wiederholung Analysis II: Abgeschlossene Mengen und Abschluss einer Menge

Def. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$.

A heißt **abgeschlossen**, falls für jede Folge a_k von Elementen aus A , welche in X konvergiert, ihr Grenzwert auch in A liegt.

Wiederholung Analysis II: Abgeschlossene Mengen und Abschluss einer Menge

Def. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$.

A heißt **abgeschlossen**, falls für jede Folge a_k von Elementen aus A , welche in X konvergiert, ihr Grenzwert auch in A liegt.

Bsp. Abgeschlossene Bälle

$$\overline{B}(y, r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| \leq r\}$$

sind abgeschlossen.

A heißt **abgeschlossen**, falls für jede Folge a_k von Elementen aus A , welche in X konvergiert, ihr Grenzwert auch in A liegt.

A heißt **abgeschlossen**, falls für jede Folge a_k von Elementen aus A , welche in X konvergiert, ihr Grenzwert auch in A liegt.

Aus der Definition folgt sofort, dass Durchschnitt von abgeschlossenen Teilmengen abgeschlossen ist.

A heißt **abgeschlossen**, falls für jede Folge a_k von Elementen aus A , welche in X konvergiert, ihr Grenzwert auch in A liegt.

Aus der Definition folgt sofort, dass Durchschnitt von abgeschlossenen Teilmengen abgeschlossen ist.

Def. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Wir betrachten die (Mengen-)Menge

$$M = \{B \subseteq X \mid A \subseteq B, B \text{ abgeschlossen}\} \subseteq 2^X.$$

(Elemente von M sind alle abgeschlossene Teilmengen von X , welche A enthalten). Dann heißt die folgenden Menge $\overline{A}$ **Abschluss** von A :

$$\overline{A} = \bigcap_{B \in M} B.$$

A heißt **abgeschlossen**, falls für jede Folge a_k von Elementen aus A , welche in X konvergiert, ihr Grenzwert auch in A liegt.

Aus der Definition folgt sofort, dass Durchschnitt von abgeschlossenen Teilmengen abgeschlossen ist.

Def. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Wir betrachten die (Mengen-)Menge

$$M = \{B \subseteq X \mid A \subseteq B, B \text{ abgeschlossen}\} \subseteq 2^X.$$

(Elemente von M sind alle abgeschlossene Teilmengen von X , welche A enthalten). Dann heißt die folgenden Menge $\overline{A}$ **Abschluss** von A :

$$\overline{A} = \bigcap_{B \in M} B.$$

Nach Konstruktion ist $\overline{A}$ abgeschlossen, und ist die kleinste abgeschlossene Menge, welche A enthält.

A heißt **abgeschlossen**, falls für jede Folge a_k von Elementen aus A , welche in X konvergiert, ihr Grenzwert auch in A liegt.

Aus der Definition folgt sofort, dass Durchschnitt von abgeschlossenen Teilmengen abgeschlossen ist.

Def. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Wir betrachten die (Mengen-)Menge

$$M = \{B \subseteq X \mid A \subseteq B, B \text{ abgeschlossen}\} \subseteq 2^X.$$

(Elemente von M sind alle abgeschlossene Teilmengen von X , welche A enthalten). Dann heißt die folgenden Menge $\bar{A}$ **Abschluss** von A :

$$\bar{A} = \bigcap_{B \in M} B.$$

Nach Konstruktion ist $\bar{A}$ abgeschlossen, und ist die kleinste abgeschlossene Menge, welche A enthält.

Bsp. Offener Ball $B(\vec{0}, 1) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ ist nicht abgeschlossen, weil man eine Folge der Punkten des Balls finden kann, welche gegen den Punkt auf der Grenze konvergiert, und deswegen nicht gegen einen Punkt des offenen Balles konvergiert. Abschluss vom offenen Ball $B(\vec{0}, 1)$ ist dann der abgeschlossene Ball $\bar{B}(\vec{0}, 1)$

Metrischer Raum von stetige Funktionen auf einem Intervall ist separabel

Metrischer Raum von stetige Funktionen auf einem Intervall ist separabel

Sei $C([a, b])$ der Raum der stetigen Funktionen (komplexwertig: $C([a, b]; \mathbb{C})$ oder reelwertig $C([a, b]; \mathbb{R})$; das spielt für den Beweis keiner Rolle)

$$C([a, b]) := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \text{ oder } \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

mit der Supremumsnorm:

$$\|f\|_{\infty} := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

(und entsprechende Metrik: $d_{\infty}(f, g) = \|f - g\|_{\infty}$).

Metrischer Raum von stetigen Funktionen auf einem Intervall ist separabel

Sei $C([a, b])$ der Raum der stetigen Funktionen (komplexwertig: $C([a, b]; \mathbb{C})$ oder reelwertig $C([a, b]; \mathbb{R})$; das spielt für den Beweis keiner Rolle)

$$C([a, b]) := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \text{ oder } \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

mit der Supremumsnorm:

$$\|f\|_{\infty} := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

(und entsprechende Metrik: $d_{\infty}(f, g) = \|f - g\|_{\infty}$).

Dann ist $(C([a, b]), d_{\infty})$ ein metrischer Raum (Die Eigenschaften aus der Definition sind einfach zu überprüfen).

Metrischer Raum von stetigen Funktionen auf einem Intervall ist separabel

Sei $C([a, b])$ der Raum der stetigen Funktionen (komplexwertig: $C([a, b]; \mathbb{C})$ oder reelwertig $C([a, b]; \mathbb{R})$; das spielt für den Beweis keiner Rolle)

$$C([a, b]) := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \text{ oder } \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

mit der Supremumsnorm:

$$\|f\|_{\infty} := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

(und entsprechende Metrik: $d_{\infty}(f, g) = \|f - g\|_{\infty}$).

Dann ist $(C([a, b]), d_{\infty})$ ein metrischer Raum (Die Eigenschaften aus der Definition sind einfach zu überprüfen).

Ziel. Wir zeigen: $(C([a, b]), d_{\infty})$ ist separabel.

Grundidee

Konstruiere eine abzählbare Menge von Funktionen, die beliebige stetige Funktionen im Sinne von d_∞ -Abstand approximieren.

Grundidee

Konstruiere eine abzählbare Menge von Funktionen, die beliebige stetige Funktionen im Sinne von d_∞ -Abstand approximieren.

- ▶ Diese Funktionen sollen:
 - ▶ stetig sein,
 - ▶ nur rationale Werte an rationalen Punkten annehmen,
 - ▶ linear auf Teilintervallen sein.
- ▶ Beliebige stetige Funktion beliebig gut, in Sinne von d_∞ -Abstand, approximieren.

Beweis: Abzählbare dichte Menge stetiger Funktionen

Konstruktion der dichten Menge. Wir arbeiten über $\mathbb{R}$, können aber Beweis für $\mathbb{C}$ verallgemeinern.

Beweis: Abzählbare dichte Menge stetiger Funktionen

Konstruktion der dichten Menge. Wir arbeiten über $\mathbb{R}$, können aber Beweis für $\mathbb{C}$ verallgemeinern. Wir nehmen oBdA $a = 0$ und $b = 1$ an.

- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ unterteile das Intervall $[0, 1]$ in n gleich große Teilintervalle mit rationalen Stützstellen

$$x_k := \frac{k}{n}, \quad k = 0, \dots, n$$

Beweis: Abzählbare dichte Menge stetiger Funktionen

Konstruktion der dichten Menge. Wir arbeiten über $\mathbb{R}$, können aber Beweis für $\mathbb{C}$ verallgemeinern. Wir nehmen oBdA $a = 0$ und $b = 1$ an.

- ▶ Für jedes $n \in \mathbb{N}$ unterteile das Intervall $[0, 1]$ in n gleich große Teilintervalle mit rationalen Stützstellen

$$x_k := \frac{k}{n}, \quad k = 0, \dots, n$$

- ▶ Weise jedem Knoten x_k einen rationalen Wert $q_k \in \mathbb{Q}$ zu.

Beweis: Abzählbare dichte Menge stetiger Funktionen

Konstruktion der dichten Menge. Wir arbeiten über $\mathbb{R}$, können aber Beweis für $\mathbb{C}$ verallgemeinern. Wir nehmen oBdA $a = 0$ und $b = 1$ an.

- ▶ Für jedes $n \in \mathbb{N}$ unterteile das Intervall $[0, 1]$ in n gleich große Teilintervalle mit rationalen Stützstellen

$$x_k := \frac{k}{n}, \quad k = 0, \dots, n$$

- ▶ Weise jedem Knoten x_k einen rationalen Wert $q_k \in \mathbb{Q}$ zu.
- ▶ Definiere eine Funktion f_n , die auf jedem Intervall $[x_k, x_{k+1}]$ linear interpoliert:

$$f_n(x) = q_k + \frac{q_{k+1} - q_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k)$$

Beweis: Abzählbare dichte Menge stetiger Funktionen

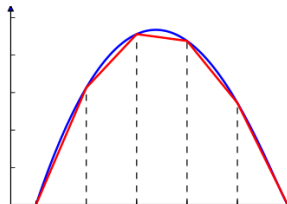
Konstruktion der dichten Menge. Wir arbeiten über $\mathbb{R}$, können aber Beweis für $\mathbb{C}$ verallgemeinern. Wir nehmen oBdA $a = 0$ und $b = 1$ an.

- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ unterteile das Intervall $[0, 1]$ in n gleich große Teilintervalle mit rationalen Stützstellen

$$x_k := \frac{k}{n}, \quad k = 0, \dots, n$$

- Weise jedem Knoten x_k einen rationalen Wert $q_k \in \mathbb{Q}$ zu.
- Definiere eine Funktion f_n , die auf jedem Intervall $[x_k, x_{k+1}]$ linear interpoliert:

$$f_n(x) = q_k + \frac{q_{k+1} - q_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k)$$



Es ist anschaulich klar, und mittels Analysis-Methoden ("gleichmässige Stetigkeit") bewiesen werden kann, dass für n , welches groß ist, und $\mathbb{Q} \ni q_i \approx f(x_i)$, die Funktion f_n die Funktion f gut approximiert.

$$f_n(x) = q_k + \frac{q_{k+1} - q_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k)$$

- ▶ f_n ist stetig (stückweise linear, stetig verklebt).
- ▶ Jede solche Funktion wird durch endlich viele rationale Zahlen bestimmt; deswegen hat sie die Mächtigkeit $\aleph_0$.
- ▶ Für jede $f \in C^0([0, 1])$, $\varepsilon > 0$, existiert solches f_n mit $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon$.

$$f_n(x) = q_k + \frac{q_{k+1} - q_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k)$$

- ▶ f_n ist stetig (stückweise linear, stetig verklebt).
- ▶ Jede solche Funktion wird durch endlich viele rationale Zahlen bestimmt; deswegen hat sie die Mächtigkeit $\aleph_0$.
- ▶ Für jede $f \in C^0([0, 1])$, $\varepsilon > 0$, existiert solches f_n mit $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon$.

Schlussfolgerung

$(C^0([a, b]), d_\infty)$ ist separabel.

$$f_n(x) = q_k + \frac{q_{k+1} - q_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k)$$

- ▶ f_n ist stetig (stückweise linear, stetig verklebt).
- ▶ Jede solche Funktion wird durch endlich viele rationale Zahlen bestimmt; deswegen hat sie die Mächtigkeit $\aleph_0$.
- ▶ Für jede $f \in C^0([0, 1])$, $\varepsilon > 0$, existiert solches f_n mit $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon$.

Schlussfolgerung

$(C^0([a, b]), d_\infty)$ ist separabel.

Bemerkung. Mit wesentlich gleichem Beweis können wir zeigen, dass $(C^0([a, b]), d_2)$, wobei d_2 die Metrik ist, welche mit Hilfe von L^2 -Produkt konstruiert ist.

Definition: Hilbertraum

Definition. Ein **Hilbertraum** ist ein Prä-Hilbertraum, der bezüglich der durch das Skalarprodukt induzierten Abstand vollständig ist:

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Das heißt, jede Cauchy-Folge in H konvergiert bezüglich dieser Norm in H .

Definition: Hilbertraum

Definition. Ein **Hilbertraum** ist ein Prä-Hilbertraum, der bezüglich der durch das Skalarprodukt induzierten Abstand vollständig ist:

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Das heißt, jede Cauchy-Folge in H konvergiert bezüglich dieser Norm in H .

(Definition von Cauchy-Folge und Vollständigkeit sollte aus Analysis bekannt sein; wird auf der nächsten Folie wiederholt)

Bsp. Endlichdimensionale Euklidische und endlichdimensionale Hermitesche Räume sind vollständig.

Definition: Vollständigkeit

Ein metrischer Raum (X, d) heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge in X konvergiert, d. h. einen Grenzwert in X hat.

Formal: Für jede Folge $(x_n) \subset X$ mit

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N : d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad (*)$$

gilt: Es existiert $x \in X$ mit $x_n \rightarrow x$.

Definition: Vollständigkeit

Ein metrischer Raum (X, d) heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge in X konvergiert, d. h. einen Grenzwert in X hat.

Formal: Für jede Folge $(x_n) \subset X$ mit

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N : d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad (*)$$

gilt: Es existiert $x \in X$ mit $x_n \rightarrow x$.

$(*)$ ist die Definition der Cauchy-Folge: Eine Folge x_n ist eine **Cauchy-Folge** in (X, d) , wenn $(*)$ erfüllt ist.

Bsp. ℓ^2 ist vollständig

- ▶ ℓ^2 ist der Raum aller komplexen oder reellen Folgen (x_n) mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

- ▶ Die Norm ist definiert durch:

$$\|x\|_2 := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2}$$

- ▶ Wir zeigen, dass ℓ^2 mit dieser Norm, und den entsprechenden Abstand $d(x, y) = \|x - y\|$, ein vollständiger metrischer Raum ist.

Punktweise Konvergenz

- Für jedes feste n ist $(x_n^{(k)})$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$).
Denn:

$$|x_n^{(k)} - x_n^{(m)}| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{(k)} - x_n^{(m)}|^2} = \|x_n^{(k)} - x_n^{(m)}\|_{\ell^2}.$$

Punktweise Konvergenz

- Für jedes feste n ist $(x_n^{(k)})$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$).
Denn:

$$|x_n^{(k)} - x_n^{(m)}| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{(k)} - x_n^{(m)}|^2} = \|x_n^{(k)} - x_n^{(m)}\|_{\ell^2}.$$

- Da $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ vollständig ist, existiert $x_n := \lim_{k \rightarrow \infty} x_n^{(k)}$
- Definiere $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Zeige: $x \in \ell^2$

- ▶ Zeige: $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$
- ▶ Idee: Nutze Majorisierung durch $x^{(k)}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \stackrel{(*)}{\leq} \liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{(k)}|^2 = \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x^{(k)}\|_2^2 < \infty$$

- ▶ Also ist $x \in \ell^2$

(*) folgt aus Fatou-Lemma, wird auf der nächsten Folie wiederholt.

Wiederholung: Fatou-Lemma für Reihen

Satz (Fatou-Lemma, Reihenform):

Sei $\left(a_n^{(k)}\right)_{n,k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von nichtnegativen reellen Zahlen:

$$a_n^{(k)} \geq 0 \quad \text{für alle } n, k \in \mathbb{N}.$$

Wiederholung: Fatou-Lemma für Reihen

Satz (Fatou-Lemma, Reihenform):

Sei $(a_n^{(k)})_{n,k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von nichtnegativen reellen Zahlen:

$$a_n^{(k)} \geq 0 \quad \text{für alle } n, k \in \mathbb{N}.$$

Definiere die komponentenweise Limes inferior:

$$a_n := \liminf_{k \rightarrow \infty} a_n^{(k)}.$$

Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \liminf_{k \rightarrow \infty} a_n^{(k)} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)}.$$

Bemerkung: Diese Version des Fatou-Lemmas ist besonders nützlich, wenn man zeigen möchte, dass ein Grenzwert einer Reihe endlich bleibt, obwohl man nur approximierende Folgen kennt.

Zeige: $x^{(k)} \rightarrow x$ in ℓ^2

- ▶ Es gilt bereits punktweise Konvergenz: $x_n^{(k)} \rightarrow x_n$
- ▶ Zeige Konvergenz in der Metrik: $\|x^{(k)} - x\|_2 \rightarrow 0$

Zeige: $x^{(k)} \rightarrow x$ in ℓ^2

- ▶ Es gilt bereits punktweise Konvergenz: $x_n^{(k)} \rightarrow x_n$
- ▶ Zeige Konvergenz in der Metrik: $\|x^{(k)} - x\|_2 \rightarrow 0$
- ▶ Nutze: Für gegebenes $\varepsilon > 0$ existiert K , sodass für $k, l \geq K$:

$$\|x^{(k)} - x^{(l)}\|_2 < \varepsilon$$

- ▶ Fixiere k , dann folgt: $(x^{(l)})_l$ ist Cauchy $\Rightarrow x^{(k)} \rightarrow x$ in ℓ^2

- ▶ Jede Cauchy-Folge in ℓ^2 konvergiert in ℓ^2
- ▶ $\Rightarrow \ell^2$ ist vollständig
- ▶ Also ist ℓ^2 ein Hilbertraum

Ziel: Nicht-Vollständigkeit von $C^0([a, b])$ in L^2 -Norm

- ▶ Sei $[a, b] = [0, 1]$
- ▶ $C^0([0, 1])$ ist der Raum aller **stetigen Funktionen** auf $[0, 1]$
- ▶ Die L^2 -Norm ist definiert durch:

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

Ziel: Nicht-Vollständigkeit von $C^0([a, b])$ in L^2 -Norm

- ▶ Sei $[a, b] = [0, 1]$
- ▶ $C^0([0, 1])$ ist der Raum aller **stetigen Funktionen** auf $[0, 1]$
- ▶ Die L^2 -Norm ist definiert durch:

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

- ▶ Frage: Ist $C^0([0, 1])$ vollständig bezüglich dieser Norm?

Ziel: Nicht-Vollständigkeit von $C^0([a, b])$ in L^2 -Norm

- ▶ Sei $[a, b] = [0, 1]$
- ▶ $C^0([0, 1])$ ist der Raum aller **stetigen Funktionen** auf $[0, 1]$
- ▶ Die L^2 -Norm ist definiert durch:

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

- ▶ Frage: Ist $C^0([0, 1])$ vollständig bezüglich dieser Norm?
- ▶ Antwort: **Nein** – wir konstruieren ein Gegenbeispiel, also eine Cauchy-Folge, welche nicht in $C^0([0, 1])$ konvergiert.

Ziel: Nicht-Vollständigkeit von $C^0([a, b])$ in L^2 -Norm

- ▶ Sei $[a, b] = [0, 1]$
- ▶ $C^0([0, 1])$ ist der Raum aller **stetigen Funktionen** auf $[0, 1]$
- ▶ Die L^2 -Norm ist definiert durch:

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

- ▶ Frage: Ist $C^0([0, 1])$ vollständig bezüglich dieser Norm?
- ▶ Antwort: **Nein** – wir konstruieren ein Gegenbeispiel, also eine Cauchy-Folge, welche nicht in $C^0([0, 1])$ konvergiert.
- ▶ **Bemerkung.** Der Metrische Raum $(C^0([a, b]), d_\infty)$ ist vollständig.

Konstruktion einer Cauchy-Folge in $C^0([0, 1])$, welche nicht konvergiert.

► Definiere $f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1/2 - 1/n] \\ n(x - 1/2 + 1/n), & x \in [1/2 - 1/n, 1/2] \\ 1, & x \in [1/2, 1] \end{cases}$

Konstruktion einer Cauchy-Folge in $C^0([0, 1])$, welche nicht konvergiert.

- ▶ Definiere $f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1/2 - 1/n] \\ n(x - 1/2 + 1/n), & x \in [1/2 - 1/n, 1/2] \\ 1, & x \in [1/2, 1] \end{cases}$
- ▶ Jede f_n ist stetig $\implies f_n \in C^0([0, 1])$
- ▶ Die Funktionen steigen bei $x = 1/2$ steiler an
- ▶ Ziel: Zeige, dass f_n in L^2 konvergiert gegen eine unstetige Funktion

- Betrachte die punktweise Konvergenz:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1/2 \\ 1, & x \geq 1/2 \end{cases}$$

- ▶ Betrachte die punktweise Konvergenz:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1/2 \\ 1, & x \geq 1/2 \end{cases}$$

- ▶ f ist nicht stetig bei $x = 1/2$
- ▶ Zeige jetzt: $\|f_n - f\|_{L^2} \rightarrow 0$

Konvergenz in L^2 -Norm

- ▶ Betrachte $\|f_n - f\|_{L^2}^2 = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 dx$
- ▶ Auf $[0, 1/2 - 1/n]$: $f_n = 0$, $f = 0$

Konvergenz in L^2 -Norm

- ▶ Betrachte $\|f_n - f\|_{L^2}^2 = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 dx$
- ▶ Auf $[0, 1/2 - 1/n]$: $f_n = 0$, $f = 0$
- ▶ Auf $[1/2 + \epsilon, 1]$: $f_n = 1 = f$

Konvergenz in L^2 -Norm

- ▶ Betrachte $\|f_n - f\|_{L^2}^2 = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 dx$
- ▶ Auf $[0, 1/2 - 1/n]$: $f_n = 0$, $f = 0$
- ▶ Auf $[1/2 + \epsilon, 1]$: $f_n = 1 = f$
- ▶ Abweichung nur auf kleinem Intervall um $x = 1/2$ der Länge $\approx 2/n$

Konvergenz in L^2 -Norm

- ▶ Betrachte $\|f_n - f\|_{L^2}^2 = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 dx$
- ▶ Auf $[0, 1/2 - 1/n]$: $f_n = 0$, $f = 0$
- ▶ Auf $[1/2 + \epsilon, 1]$: $f_n = 1 = f$
- ▶ Abweichung nur auf kleinem Intervall um $x = 1/2$ der Länge $\approx 2/n$
- ▶ Dort ist $|f_n(x) - f(x)| \leq 1$, also:

$$\|f_n - f\|_{L^2}^2 \leq \int_{1/2-1/n}^{1/2+1/n} 1^2 dx = \frac{2}{n} \Rightarrow \|f_n - f\|_{L^2} \leq \sqrt{\frac{2}{n}} \rightarrow 0$$

- ▶ Die Folge $(f_n) \subset C^0([0, 1])$ ist Cauchy in L^2 -Norm
- ▶ Der Grenzwert f liegt nicht in $C^0([0, 1])$ (nicht stetig)
- ▶ $\Rightarrow C^0([0, 1])$ ist **nicht vollständig** bezüglich $\|\cdot\|_{L^2}$

Klassifizierungssatz für Hilberträume

Satz 36. Jeder separable Hilbertraum H ist (isometrisch) isomorph zu ℓ^2 , dem Raum der quadratsummierbaren Folgen:

$$\ell^2 := \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

mit hermitischer Form bzw. mit Skalarprodukt:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

Klassifizierungssatz für Hilberträume

Satz 36. Jeder separable Hilbertraum H ist (isometrisch) isomorph zu ℓ^2 , dem Raum der quadratsummierbaren Folgen:

$$\ell^2 := \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

mit hermitischer Form bzw. mit Skalarprodukt:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

- ▶ Endlichdimensionale Hilberträume sind isomorph zu $\mathbb{C}^n$ bzw. $\mathbb{R}^n$.
- ▶ Unendlichdimensionale separable Hilberträume sind alle isomorph zu ℓ^2 .

Was bedeutet Isomorph?

- ▶ **Isomorph** bedeutet: Es existiert eine Abbildung $U : H \rightarrow \ell^2$ sodass
- ▶ U ist bijektiv, linear und erhält die hermitesche Form bzw. das Skalarprodukt:

$$\langle U(x), U(y) \rangle_{\ell^2} = \langle x, y \rangle_H$$

Bemerkung. Wenn ein lineare bijektive Abbildung die Norm erhält,

$$\|U(x)\|_{\ell^2} = \|x\|_H \quad (*)$$

dann erhält sie auch die hermitesche Form bzw. das Skalarprodukt.

Für Skalarprodukt, folgt es aus der **Polarisierungsformel**:

$$\frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = \langle x, y \rangle.$$

Die Polarisierungsformel für hermitesche Form ist

$$\frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle), \quad \frac{1}{4}\|x-iy\|^2 - \|x+iy\|^2 = \operatorname{Im}(\langle x, y \rangle),$$

sodass wir auch über $\mathbb{C}$ aus $(*)$ die Erhaltung der hermiteschen Form bekommen.

Scheme des Beweises

Satz 36. Jeder separable Hilbertraum H ist (isometrisch) isomorph zu ℓ^2 .

Scheme des Beweises

Satz 36. Jeder separable Hilbertraum H ist (isometrisch) isomorph zu ℓ^2 .

1. Da H separabel ist, existiert ein abzählbares, vollständiges Orthonormalsystem (=abzählbare Hilbert-Basis)
 $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H$.

Scheme des Beweises

Satz 36. Jeder separable Hilbertraum H ist (isometrisch) isomorph zu ℓ^2 .

1. Da H separabel ist, existiert ein abzählbares, vollständiges Orthonormalsystem (=abzählbare Hilbert-Basis)
 $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H$.
2. Für jedes $x \in H$ definiere die Fourier-Koordinaten:

$$\Phi(x) := \text{Folge } \langle x, e_1 \rangle, \langle x, e_2 \rangle, \dots$$

3. Dann gilt:

$$\|\Phi(x)\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|x\|_H^2 \quad (\text{Parseval})$$

Scheme des Beweises

Satz 36. Jeder separable Hilbertraum H ist (isometrisch) isomorph zu ℓ^2 .

1. Da H separabel ist, existiert ein abzählbares, vollständiges Orthonormalsystem (=abzählbare Hilbert-Basis)
 $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H$.

2. Für jedes $x \in H$ definiere die Fourier-Koordinaten:

$$\Phi(x) := \text{Folge } \langle x, e_1 \rangle, \langle x, e_2 \rangle, \dots$$

3. Dann gilt:

$$\|\Phi(x)\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|x\|_H^2 \quad (\text{Parseval})$$

4. Φ ist linear, isometrisch und surjektiv auf ein dichtes Teilbild.
 $\implies$ Isomorphismus zwischen H und ℓ^2 .

Was ist eine Hilbertbasis?

Def. Eine **Hilbertbasis** in einem Hilbertraum H ist eine (möglicherweise unendliche) **orthonormale Menge** $B \subseteq H$, sodass

$$\overline{\text{span}(B)} = H. \quad (*)$$

Bemerkung. “Orthonormale” bedeutet, dass

$$\forall v \neq u \in B \quad \langle u, v \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \|u\| = 1.$$

Was ist eine Hilbertbasis?

Def. Eine **Hilbertbasis** in einem Hilbertraum H ist eine (möglicherweise unendliche) **orthonormale Menge** $B \subseteq H$, sodass

$$\overline{\text{span}(B)} = H. \quad (*)$$

Bemerkung. “Orthonormale” bedeutet, dass

$$\forall v \neq u \in B \quad \langle u, v \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \|u\| = 1.$$

Bemerkung. Orthonormale Mengen sind immer linear unabhängig. Denn: Wenn $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = \vec{0}$, dann ist $\langle v_1, \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \rangle = 0$, woraus $\lambda_1 = 0$ folgt.

Was ist eine Hilbertbasis?

Def. Eine **Hilbertbasis** in einem Hilbertraum H ist eine (möglicherweise unendliche) **orthonormale Menge** $B \subseteq H$, sodass

$$\overline{\text{span}(B)} = H. \quad (*)$$

Bemerkung. “Orthonormale” bedeutet, dass

$$\forall v \neq u \in B \quad \langle u, v \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \|u\| = 1.$$

Bemerkung. Orthonormale Mengen sind immer linear unabhängig. Denn: Wenn $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = \vec{0}$, dann ist $\langle v_1, \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \rangle = 0$, woraus $\lambda_1 = 0$ folgt.

Bemerkung. Die Bedingung $(*)$ ist ähnlich zur Eigenschaft, erzeugend zu sein. Hilbert-Basis ist nicht immer eine Basis: es ist möglich, die Beispiele von Mengen B zu konstruieren, sodass $\overline{\text{span}(B)} = H$, aber $\text{span}(B) \neq H$.

Was ist eine Hilbertbasis?

Def. Eine **Hilbertbasis** in einem Hilbertraum H ist eine (möglicherweise unendliche) **orthonormale Menge** $B \subseteq H$, sodass

$$\overline{\text{span}(B)} = H. \quad (*)$$

Bemerkung. “Orthonormale” bedeutet, dass

$$\forall v \neq u \in B \quad \langle u, v \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \|u\| = 1.$$

Bemerkung. Orthonormale Mengen sind immer linear unabhängig. Denn: Wenn $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = \vec{0}$, dann ist $\langle v_1, \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \rangle = 0$, woraus $\lambda_1 = 0$ folgt.

Bemerkung. Die Bedingung $(*)$ ist ähnlich zur Eigenschaft, erzeugend zu sein. Hilbert-Basis ist nicht immer eine Basis: es ist möglich, die Beispiele von Mengen B zu konstruieren, sodass $\overline{\text{span}(B)} = H$, aber $\text{span}(B) \neq H$. Selbstverständlich ist eine Basis immer eine Hilbert-Basis

Abzählbare Hilbert-Basen

Mächtigkeit von Hilbert-Basis B kann $> \aleph_0$ sein. Wenn aber $|B| = \aleph_0$, kann man die Elemente von B in eine Folge organisieren:

$$B = \{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

Mächtigkeit von Hilbert-Basis B kann $> \aleph_0$ sein. Wenn aber $|B| = \aleph_0$, kann man die Elemente von B in eine Folge organisieren:

$$B = \{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

In diesem Fall,

- ▶ H ist der Abschluss des linearen Spanns der e_i .
- ▶ Jedes $x \in H$ lässt sich (eindeutig) als

$$x = \sum_{i \in \mathbb{N}} \langle x, e_i \rangle e_i$$

schreiben. Das werden wir später heute zeigen.

Exkurs: Existenz einer orthonormalen Basis, und deswegen von Hilbert-Basis mit Hilfe vom Zornschen Lemma

Die Beweisschritte sind wie folgt:

- ▶ Sei $\mathfrak{F}$ die Menge aller orthonormalen Teilfamilien in H .
- ▶ $\mathfrak{F}$ ist teilweise geordnet durch Inklusion.
- ▶ Jede Kette $\{E_j\}_{j \in J} \subseteq \mathfrak{F}$ hat ein Supremum (Vereinigung ist wieder orthonormal).
- ▶ **Zornsches Lemma:** Es existiert ein maximales Element B .
- ▶ Wie im Beweis von Existenz von Hamel-Basis (Satz 35) können wir zeigen, dass B eine Basis ist.

Exkurs: Existenz einer orthonormalen Basis, und deswegen von Hilbert-Basis mit Hilfe vom Zornschen Lemma

Die Beweisschritte sind wie folgt:

- ▶ Sei $\mathfrak{F}$ die Menge aller orthonormalen Teilfamilien in H .
- ▶ $\mathfrak{F}$ ist teilweise geordnet durch Inklusion.
- ▶ Jede Kette $\{E_j\}_{j \in J} \subseteq \mathfrak{F}$ hat ein Supremum (Vereinigung ist wieder orthonormal).
- ▶ **Zornsches Lemma:** Es existiert ein maximales Element B .
- ▶ Wie im Beweis von Existenz von Hamel-Basis (Satz 35) können wir zeigen, dass B eine Basis ist.

Für den Beweis des Klassifizierungssatzes brauchen wir aber Existenz einer Basis mit Mächtigkeit $\aleph_0$.

Existenz einer abzählbaren Hilbertbasis in einem separablen Hilbertraum

Wir wollen zeigen: Jeder separabel Hilbertraum $H \neq \{\vec{0}\}$ besitzt eine (maximale) Orthonormalfamilie $(e_i)_{i \in I}$, deren linearer Abschluss ganz H ist.

Existenz einer abzählbaren Hilbertbasis in einem separablen Hilbertraum

Wir wollen zeigen: Jeder separabel Hilbertraum $H \neq \{\vec{0}\}$ besitzt eine (maximale) Orthonormalfamilie $(e_i)_{i \in I}$, deren linearer Abschluss ganz H ist.

Plan

- ▶ Weil H separabel ist, existiert eine **abzählbare dichte Teilmenge**.
- ▶ Aus ihr kann man durch das **Gram-Schmidt-Verfahren (auf der nächsten Folie wiederholt)** eine abzählbare Orthonormalbasis konstruieren.
- ▶ $\implies$ In separablen Hilberträumen gibt es eine **abzählbare Hilbertbasis**.

Gram-Schmidt-Verfahren (Wiederholung aus LA I)

In separablen H , haben wir eine abzählbare dichte Teilmenge $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$. Daraus kann man eine linear unabhängige Menge M auswählen: wir fangen mit $M_0 = \emptyset$ an und definieren

$$M_i = \begin{cases} M_{i-1} \cup \{x_i\} & \text{falls } M_{i-1} \cup \{x_i\} \text{ linear unabhängig und } x_i \notin M_i \\ M_{i-1} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann setze $M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$. Offensichtlich, $\text{span}(M) = \text{span}(\{x_1, \dots, x_n, \dots\})$.

Gram-Schmidt-Verfahren (Wiederholung aus LA I)

In separablen H , haben wir eine abzählbare dichte Teilmenge $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$. Daraus kann man eine linear unabhängige Menge M auswählen: wir fangen mit $M_0 = \emptyset$ an und definieren

$$M_i = \begin{cases} M_{i-1} \cup \{x_i\} & \text{falls } M_{i-1} \cup \{x_i\} \text{ linear unabhängig und } x_i \notin M_i \\ M_{i-1} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann setze $M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$. Offensichtlich, $\text{span}(M) = \text{span}(\{x_1, \dots, x_n, \dots\})$.

Ziel: Gegeben eine linear unabhängige abzählbare Menge $\{v_1, \dots, v_n, \dots\}$ in H , konstruiere ein orthonormales System $e_1, \dots, e_n$, das denselben Spann aufspannt.

Vorgehen (Gram-Schmidt-Verfahren):

- ▶ Schritt 1: Setze $e_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$
- ▶ Schritt k ($2 \leq k$):

$$u_k := v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle v_k, e_j \rangle e_j \quad \text{und} \quad e_k := \frac{u_k}{\|u_k\|}$$

Eigenschaften: $\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$ ist ein Orthonormalsystem und $\text{span}\{v_1, \dots, v_k\} = \text{span}\{e_1, \dots, e_k\}$ für alle k .

Beweis für Klassifizierungssatz

1. Wähle eine **orthonormale Basis** $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von H (existiert, da H separabel).
2. Definiere $U : H \rightarrow \ell^2$ durch

$$U(x) = (\langle x, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$$

3. Zeige:
 - ▶ U ist wohldefiniert. Um dies zu zeigen, brauchen wir den so-geannten Parsevalschen Satz. Ich werde den Satz als Hilfslemma formulieren und beweisen.
 - ▶ U ist linear
 - ▶ U ist isometrisch: $\|x\|_H = \|U(x)\|_{\ell^2}$
 - ▶ U ist surjektiv

Hilfslemma (Parsevalscher Satz)

Sei H ein Hilbertraum mit einer Orthonormalbasis $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Dann gilt für alle $x \in H$:

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$$

Terminologie:

- ▶ Die Zahlen $\langle x, e_n \rangle$ heißen **Fourier-Koeffizienten** von x

Beweis des Parsevalschen Satzes

Sei $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Orthonormalbasis in H , und sei $x \in H$. Betrachte die **Fouriersumme**:

$$x_N := \sum_{n=1}^N \langle x, e_n \rangle e_n$$

(Die Formel oben ist uns aus dem Abschnitt "Orthogonale Projektion", siehe Woche 12 LA I, ab Seite 36, bekannt. Sie gibt uns die orthogonale Projektion von x auf $\text{span}(e_1, \dots, e_N)$.)

1. Die Differenz $x - x_N$ ist orthogonal zu allen e_n mit $1 \leq n \leq N$.
2. Daraus folgt (Pythagoras im Hilbertraum):

$$\|x\|^2 = \|x - x_N\|^2 + \|x_N\|^2$$

3. Da $x_N \rightarrow x$ im H (da $\{e_n\}$ ONB ist), folgt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|x - x_N\|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \|x\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \|x_N\|^2$$

4. Wegen der Orthogonalität gilt:

$$\|x_N\|^2 = \sum_{n=1}^N |\langle x, e_n \rangle|^2 \quad \Rightarrow \quad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2, \quad \square$$

Beweisschritt: U ist wohldefiniert und isometrisch

Sei $x \in H$, dann:

$$U(x) = (\langle x, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|x\|^2 < \infty$$

nach dem **Parseval'schen Satz**.

$\Rightarrow U(x) \in \ell^2$, also wohldefiniert.

Beweisschritt: U ist wohldefiniert und isometrisch

Sei $x \in H$, dann:

$$U(x) = (\langle x, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|x\|^2 < \infty$$

nach dem **Parseval'schen Satz**.

$\Rightarrow U(x) \in \ell^2$, also wohldefiniert.

Außerdem:

$$\|U(x)\|_{\ell^2}^2 = \sum |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|x\|^2$$

$\Rightarrow U$ ist isometrisch.

Beweisschritt: U ist bijektiv

Injektivität:

$$U(x) = 0 \Rightarrow \langle x, e_n \rangle = 0 \quad \forall n \Rightarrow x = 0$$

da (e_n) eine ONB ist.

Beweisschritt: U ist bijektiv

Injektivität:

$$U(x) = 0 \Rightarrow \langle x, e_n \rangle = 0 \quad \forall n \Rightarrow x = 0$$

da (e_n) eine ONB ist.

Surjektivität: Für $a = (a_n) \in \ell^2$ ist

$$x := \sum a_n e_n \in H \quad (\text{konvergiert wegen Vollständigkeit})$$

Dann gilt:

$$U(x) = (\langle x, e_n \rangle) = (a_n)$$

Beweisschritt: U ist bijektiv

Injektivität:

$$U(x) = 0 \Rightarrow \langle x, e_n \rangle = 0 \quad \forall n \Rightarrow x = 0$$

da (e_n) eine ONB ist.

Surjektivität: Für $a = (a_n) \in \ell^2$ ist

$$x := \sum a_n e_n \in H \quad (\text{konvergiert wegen Vollständigkeit})$$

Dann gilt:

$$U(x) = (\langle x, e_n \rangle) = (a_n)$$

$\implies U$ ist bijektiv.

- ▶ Jeder separable unendlich-dimensionale Hilbertraum ist “strukturell gleich” wie ℓ^2 .
- ▶ Die Theorie der separablen Hilberträume reduziert sich damit im Wesentlichen auf ℓ^2 .

Postulat: Der Zustand eines abgeschlossenen Quantensystems wird durch einen normierten Vektor ψ in einem komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$ beschrieben.

Beispiele für Hilberträume in der Quantenphysik:

- ▶ $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ (Spin-Systeme, Qubits)
- ▶ $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ (Teilchen im Raum)

Wichtige Struktur:

- ▶ Skalarprodukt definiert Wahrscheinlichkeiten
- ▶ Linearkombinationen: Superposition von Zuständen
- ▶ Orthonormalbasen: Messbare Observablen (z.B. Energieeigenzustände)

Definition: Ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ heißt **separabel**, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

Äquivalent (Heute gezeigt): Es existiert eine **abzählbare Orthonormalbasis** $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, sodass jeder Vektor $\psi \in \mathcal{H}$ eindeutig als

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \psi, e_n \rangle e_n \quad (\text{Fourier-Darstellung})$$

geschrieben werden kann.

Konsequenz: Zustände sind durch *abzählbar viele* Daten beschreibbar!

Hilberträume in Signalverarbeitung

- ▶ Viele Probleme der Signalverarbeitung lassen sich geometrisch in unendlichdimensionalen Räumen formulieren.
- ▶ Hilberträume bieten:
 - ▶ Struktur durch Skalarprodukt
 - ▶ Werkzeuge wie Projektionen, Approximationen und orthogonale Zerlegung
- ▶ Zentrale Rolle bei:
 - ▶ Modellierung von Signalen
 - ▶ Filterung und Rekonstruktion

Welcher Hilbertraum?

- ▶ Kontinuierliche Signale sind oft als stetige Funktionen, auf einem Intervall, gegeben.
 - ▶ Wir haben gesehen, dass $C^0([a, b])$ nicht vollständig ist. Man kann den Raum **vervollständigen**:
 - ▶ $L^2([a, b]) = \left\{ f : \int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$. Dieser Raum ist vollständig und enthält C^0 als Unterraum.
- ▶ Konzepte: Orthogonalität, Projektion, Basis, Konvergenz

- ▶ Signale als Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R})$
- ▶ Energie eines Signals: $\|f\|^2 = \int |f(t)|^2 dt$
- ▶ Anwendungen:
 - ▶ Fourier-Analyse (Orthonormalsysteme)
 - ▶ Bandbegrenzung / Filterung als Projektion

- ▶ Digitale Signale: $x = (x_n) \in \ell^2$
- ▶ Anwendungen:
 - ▶ Rauschunterdrückung durch Projektion
 - ▶ Kompression durch Approximation (z.B. DCT, Wavelets)

Beispiel – Orthogonale Projektion

- ▶ Sei H ein Hilbertraum, $U \subset H$ ein geschlossener Unterraum
- ▶ Zu $f \in H$ existiert eindeutiges $u \in U$ mit minimalem Abstand
- ▶ Interpretation:
 - ▶ Projektion als optimales Näherungssignal
 - ▶ Tiefpassfilter als Projektion auf niederfrequente Komponenten

- ▶ Matched Filtering – Maximierung des Skalarprodukts zur Erkennung
- ▶ Abtasttheorem im L^2 -Rahmen
- ▶ Wavelet-Analyse: Zerlegung in Skalenräumen
- ▶ Optimalfilter (Wiener-Filter, etc.) auf Basis von Projektionsprinzipien

- ▶ Hilberträume bieten eleganten, geometrischen Zugang zur Signalverarbeitung
- ▶ Vorteile:
 - ▶ Theoretische Klarheit
 - ▶ Praktische Algorithmen (FFT, Filterbänke)
 - ▶ Flexibilität für kontinuierliche und diskrete Modelle