Dualraum

Wiederholung LA I Seien V, U $\mathbb{K}-$Vektorräume der Dimension n und m;. Dann ist die Menge von linearen Abbildungen von V nach U auch ein Vektorraum bezuglich der folgenden Operationen:

- Addition: $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$.
- Multiplikation: $(\lambda \bullet f)(v) = \lambda \bullet (f(v))$.

Die einzige mögliche Schwierigkeit in der Formeln oben ist die richtige Interpretation. In Worten ist "Addition" wie folgt definiert: wir definieren die Summe von linearen Abbildungen f und g als diejenige Abbildung, welche den (beliebig gewällten) Vektor $v \in V$ auf Vektor $f(v) + g(v) \in U$ überführt.

Bemerkung. In LA haben wir schwerpunktmäßig endlichdimensionale Räume behandelt. Die Aussage ist aber auch für alle Räume gültig. Wenn aber $\dim V = n$ und $\dim U = m$ ist und man die Basen ausgewählt hat, kann man der Vektorraum von Abbildungen mit Vektorraum von $m \times n$-Matrizen identifizieren, deswegen ist die Dimension von Vektorraum von Abbildungen gleich $n \cdot m$

- Addition: $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$.
- Multiplikation: $(\lambda \bullet f)(v) = \lambda \bullet (f(v))$.

Wichtiger Spezialfall: U sei $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$.

Def. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: V^*) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von V nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen.

Wie oben erklärt bzw. wiederholt wurde, ist Dualraum V^* ein Vektorraum bzg. der oben definierten Operationen. Fall $\dim V = n < \infty$ ist, ist $\dim V = \dim V^* = n$.

In Koordinaten, kann man Elemente von V^*, also Linearformen, als $1 \times n$ Matrizen darstellen; d.h., wie Vektoren, aber waagrecht geschrieben.

Linearform $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ angewendet auf Vektor $(x_1, \ldots, x_n)$ ergibt das Skalar

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Def. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn.: V^*) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von V nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen Linearformen.

Bsp. Ist $V = \mathbb{K}^n$, so kann man Linearformen mit $(1 \times n)$-Matrizen identifizieren: $f_{(a_1\ \dots\ a_n)}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := (a_1\ \dots\ a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$.

Bsp. Null-Linearform $\mathbf{0} : V \to \mathbb{K}$, $\mathbf{0}(v) = 0$. (Falls $V = \mathbb{K}^n$, ist deren Matrix $(0\ \dots\ 0)$.)

Bsp. $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $\phi\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1$ ist eine Linearform mit Matrix $(1\ 0\ \dots\ 0)$.

Bsp. $\phi : \underbrace{\mathbb{K}[x]}_{\text{Raum der Polynome}} \longrightarrow \mathbb{K}$, $\phi(P) = P(1)$ ist eine Linearform.

Bsp. $V = C^0([a, b], \mathbb{R})$, h eine feste beschränkte stückweise stetige Funktion auf $[a, b]$. Dann ist die Abbildung

$$f \mapsto \int_a^b f(x)h(x)\,dx$$

eine Linearform.

Dualbasis

Sei B eine Basis in V (wenn $\dim V = \infty$, dann Hamel-Basis). Dann definiere für jeden Vektor $b \in B$ eine Linearform b^* wie folgt:

$$b^*(b) = 1 \quad \text{und} \quad b^*(b_1) = 0 \quad \text{für alle } b_1 \in B,\ b_1 \neq b.$$

Bemerkung. Die Formel oben bestimmt die lineare Abbildung b^* auf Basisvektoren und damit auf allen Vektoren. Die durch diese Formel definierte Abbildung ist eindeutig, also dürfen wir eine „abgeleitete Bezeichnung“ b^* verwenden. Allerdings mit einem gewissen Vorbehalt: Um b^* für $b \in B$ zu definieren, brauchen wir auch alle anderen Vektoren von B.

Die Menge $\{b^* \mid b \in B\}$ bezeichnen wir mit B^*. Diese Menge heißt oft Dualbasis. Wir werden sehen, dass B^* tatsächlich eine Basis in V^* ist, falls V endlichdimensional ist. Wir werden sehen, dass B^* immer linear unabhängig ist. Wir zeigen auch ein Beispiel, sodass B^* nicht erzeugend ist.

Bsp: Dualbasis zur Standardbasis in $\mathbb{K}^n$

Wiederholung: Wir identifizieren $(\mathbb{K}^n)^*$ mit $(1 \times n)$-Matrizen.

Frage: Sei $(e_1, ..., e_n)$ die Standardbasis in $\mathbb{K}^n$. Welche $(1 \times n)$-Matrizen sind $e_1^*, ..., e_n^*$?

Nach Definition ist $e_1^*(e_i) = 0, \dots, e_i^*(e_i) = 1, \dots, e_n^*(e_i) = 0$, also ist $e_i^* = (0 \; ... \underbrace{\;1\;}_{i\text{-te Stelle}} ... \; 0)$.

Bemerkung. Die Standardbezeichnung für e_i^* ist e^i (Index oben). Diese Bezeichnung kommt in diesem Foliensatz auch später vor, wenn wir die Tensoren betrachten.

Lemma 13. Sei B eine Basis in V. Dann ist B^* linear unabhängig. Ferner gilt: Ist V endlichdimensional, so ist B^* erzeugend und deshalb eine Basis.

Beispiel, das zeigt, dass B^* nicht immer erzeugend ist: Raum der endlich unterstützten Folgen

- Sei
$$V := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \neq 0 \text{ für endlich viele } n\}.$$
- V ist ein unendlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$.
- Dualraum: $V^* \supseteq$ Raum aller Folgen (weil für jede Folge $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ die Abbildung $(x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ eine wohldefinierte lineare Abbildung ist).
- Dualbasis $B^* \not\subset V$, weil die Dualbasis nur aus Folgen besteht, die nur endlich viele von Null verschiedene Elemente haben.

Beweis, dass B^* linear unabhängig ist.

$$\boxed{b^*(b) = 1 \quad b^*(b_1) = 0 \ \text{ für alle } b_1 \in B, \ \ b_1 \neq b. \quad B^* = \{b^* \mid b \in B\}}$$

Angenommen, $\mathbf{0} = \lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_k b_k^*$. Wir wenden diese Linearform auf b_1 an.

$\mathbf{0}(b_1) = \underbrace{\lambda_1 b_1^*(b_1)}_{=\lambda_1} + \underbrace{\lambda_2 b_2^*(b_1)}_{=0} + ... + \underbrace{\lambda_k b_k^*(b_1)}_{=0} = 0$. Also $\lambda_1 = 0$.

Ähnlich sind alle $\lambda_i = 0$.

Beweis, dass im endlichdimensionalen Fall B^* auch erzeugend ist und deshalb eine Basis ist

$$\boxed{b^*(b) = 1 \quad b^*(b_1) = 0 \ \text{ für alle } b_1 \in B, \ \ b_1 \neq b. \quad B^* = \{b^* \mid b \in B\}}$$

Die Basis B ist endlich, also sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Dann ist $B^* = \{b_1^*, \ldots, b_n^*\}$.

Wir erzeugen eine beliebige Linearform ϕ. Sei $\lambda_i := \phi(b_i)$. Man betrachte die Linearform $\lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$. Dann gilt für jedes b_i:

$$(\lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*)(b_i) = \lambda_1 \underbrace{b_1^*(b_i)}_{=0} + ... + \lambda_i \underbrace{b_i^*(b_i)}_{=1} + ... + \lambda_n \underbrace{b_n^*(b_i)}_{=0} =$$

$\lambda_i = \phi(b_i)$.

Da die Linearformen ϕ und $\lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$ auf den Basisvektoren übereinstimmen, sind sie gleich. □

Folgerung. Ist V endlichdimensional, so sind V und V^* isomorph.

Duale Abbildung

Seien V, U $\mathbb{K}$-Vektorräume, V^*, U^* die Dualräume.
Für jede lineare Abbildung $f : V \to U$ definiere man die Dualabbildung $f^* : U^* \to V^*$ wie folgt:
Für jedes $\psi \in U^*$ setze $f^*(\psi)(v) = \psi(f(v))$.
Das ist eine lineare Abbildung:

- $f^*(\psi_1 + \psi_2)(v) = (\psi_1 + \psi_2)(f(v)) = \psi_1(f(v)) + \psi_2(f(v)) = f^*(\psi_1)(v) + f^*(\psi_2)(v)$
- $f^*(\lambda\psi)(v) = (\lambda\psi)(f(v)) = \lambda\psi(f(v))$.

Satz 37 – Geometrische Bedeutung der Transponieren. Seien V, U $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Basen $(v_1, ..., v_m)$, $(u_1, ..., u_n)$, V^*, U^* seien die Dualräume, $f : U \to V$ sei eine lineare Abbildung. Dann gilt: Ist A die darstellende Matrix der Abbildung f bzgl. Basen $(v_1, ..., v_m)$, $(u_1, ..., u_n)$, so ist A^t die darstellende Matrix der Dualabbildung f^* bzgl. Dualbasen $(u_1^*, ..., u_n^*)$,$(v_1^*, ..., v_m^*)$.

Satz 37 $\left(Mat_{(u_1,\dots,u_n)}^{(v_1,\dots,v_m)}(f)\right)^t = Mat_{(v_1^*,\dots,v_m^*)}^{(u_1^*,\dots,u_n^*)}(f^*)$

Beweis. Sei $A = (a_{ij})$ die darstellende Matrix der Abbildung f bzgl. Basen $(v_1, ..., v_m)$, $(u_1, ..., u_n)$.
Nach Definition ist die $j-$te Spalte von A der Koordinatenvektor von $f(v_j)$, d.h., $f(v_j) = \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha j} u_\alpha$.

Aus Def. von darstellende Matrix folgt: die $i-$Koordinaten von $\phi \in V^*$ist $\phi(v_i)$. In der Tat, ist $\phi = \lambda_1 v_1^* + ... + \lambda_m v_m^*$, so ist
$\phi(v_i) = \lambda_1 v_1^*(v_i) + ... + \lambda_i v_i^*(v_i) + ... + \lambda_m v_m^*(v_i) = \lambda_i$.
Dann ist das $(j, i)-$ Eintrag der Matrix der Dualabbildung gleich $j-$ten Koordinate von $f^*(u_i^*)$ gleich $f^*(u_i^*)(v_j) \overset{\text{Def. Dualabbildung}}{=} u_i^* f(v_j)$
$= u_i^*(\sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha j} u_\alpha) \overset{\text{Linearität}}{=} \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha j} u_i^*(u_\alpha) \overset{\text{Def. 39}}{=} a_{ij}$.
Also, $(j, i)-$ Eintrag der darstellenden Matrix der Abbildung f^* ist a_{ij}, $\square$

Folgerung A (Geometrische Bedeutung des Zeilerangs):
$rk_z(A) = dim(Bild_{f_{A^*}})$.

Beweis: $rk_z(A) = rk_s(A^t) \overset{\text{Lemma 28 LA I}}{=} dim(Bild_{f_{A^*}})$.

Folgerung B (Rechnenregel für Multiplizieren von transponierte Matrizen): $(AB)^t = B^t A^t$.

Beweis: Seien A und B die Matrizen der Abbildungen $W \xrightarrow{f_B} V \xrightarrow{f_A} U$.
$(f_A \circ f_B)^* = f_B^* \circ f_A^*$, weil für jede $\phi \in U^*$ und jeden $w \in W$ v ist

$$\begin{array}{ccccccc} (f_A \circ f_B)^*(\phi)(w) & = & \phi(f_A \circ f_B(w)) & = & & = & \phi(ABw) \\ & & & & & & \| \\ f_B^* \circ f_A^*(\phi)(w) & = & f_B^*(f_A^*(\phi)(w)) & = & f_A^*(\phi)(Bw)) & = & \phi(ABw) \end{array} .$$

Dann ist die Matrix von $(f_A \circ f_B)^*$,also $(AB)^t$, gleich die Matrix von $f_B^* \circ f_A^*$, also $B^t A^t$.

$\square$

Bemerkung. Wir haben die Folgerung B bereits benutzt und direkt beweisen.

Folgerung C: Zeilenrang der darstellende Matrix einer Abbildung hängt nicht von der Wahl der Basen (in U und V) ab.

Beweis. Weil $dim(Bild_f^*)$ nicht von der Wahl von Basen abhängt. $\square$

Folgerung D (in LA I mit anderen Mehtoden bewiesen): Sei $A \in Mat(n, m, \mathbb{K})$, seien $B \in GL(n, \mathbb{K})$, $C \in Gl(m, \mathbb{K})$. (Also, B, C sind quadratisch und invertierbar). Dann gilt: $rk_z(B^{-1}AC) = rk_z(A)$.

Beweis. Es genügend zu zeigen: $rk_s((B^{-1}AC)^t) = rk_s(A^t)$.
Nach Folgerung B ist $(B^{-1}AC)^t = \underbrace{C^t}_{B'} A^t \underbrace{(B^{-1})^t}_{C'} = B'A^tC'$.

Nach Folgerung A ist $\begin{array}{ccc} rk_s(B'A^tC') & = & rk_s(A^t) \\ & & \| \\ rk_z(B^{-1}AC) & = & rk_z(A) \end{array}$, $\square$

Dualraum und Bidualraum

- Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ (oder über $\mathbb{R}$, es spielt keine Rolle.).
- Der Bidualraum ist:

$$V^{**} := (V^*)^* = \{ \text{ lineare Abbildungen von } V^* \text{ nach } \mathbb{K}\}$$

- Frage: Wie hängt V mit V^{**} zusammen?

Die kanonische Abbildung $\iota : V \to V^{**}$

- Definiere:

$$\iota(v)(\phi) := \phi(v), \quad \text{für alle } \phi \in V^*$$

  - Wir sehen, das ι die Elemente von V^* auf K abbildet.
  - Diese Abbildung ist linear:

$$\iota(av + bw)(\phi) = \phi(av + bw) = a\phi(v) + b\phi(w)$$

  - Deswegen ist $\iota(v)(\phi)$ eine Linearform auf V^*.

Beweis: Isomorphismus (endlichdimensional)

Satz 38. Ist V endlichdimensional, so ist $\iota : V \to V^{**}$ ein Isomorphismus.

Beweis:

- Sei $\dim V = n$. Dann gilt auch: $\dim V^* = n$, $\dim V^{**} = n$
- ι ist injektiv: Wenn $\phi(v) = 0$ für alle $\phi \in V^*$, dann ist $v = 0$. Man sieht es am besten in Koordinaten: wenn die Linearform e_1^* gegeben durch $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1$ auf dem Vektor v den Wert 0 annimmt, dann ist $x_1 = 0$ u.s.w.

$$\text{linear und injektiv} \overset{\text{Dimensionssatz}}{\Longrightarrow} \text{Isomorphismus}$$

Fazit

- Jeder endlichdimensionale Vektorraum ist (kanonisch) isomorph zu seinem Bidualraum:

$$V \cong V^{**}$$

- Kanonisch bedeutet, dass die Abbildung unabhängig von der Wahl einer Basis ist. Früher haben wir gesehen, dass für endlichdimensionale Räume $\dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$ gilt, deswegen sind die Räume V, V^*, V^{**} isomorph. Es gibt aber keinen kanonischen Isomorphismus von V nach V^*.
- Für unendlichdimensionale Räume ist ι im Allgemeinen nur injektiv, nicht surjektiv.

Unendlichdimensionale Vektorräume: Warnung

- Im endlichdimensionalen Fall ist $V \cong V^{**}$.
- Für unendlichdimensionale Vektorräume ist die kanonische Abbildung

$$\iota : V \to V^{**}, \quad v \mapsto (\phi \mapsto \phi(v))$$

im Allgemeinen nicht surjektiv (siehe vorher gegebene Beispiele, etwa $C^0([a,b];\mathbb{R})$, **oder Raum von endlich unterstützten Folgen.**

Einführung in Tensoren

- Tensoren sind multilineare Abbildungen.
- **Def.** Ein Tensor vom Typ (r, s) ist eine multilineare Abbildung:

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r \text{ mal}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s \text{ mal}} \to \mathbb{R}$$

  - V: endlichdimensionaler Vektorraum, V^*: Dualraum
  - Multilinear bedeutet, dass in jedem Komponente linear (wie bei etwa Bilinearformen oder Determinanten):

$$T(\alpha_1, \ldots, \lambda\alpha_i + \lambda'\alpha_i', \ldots, \alpha_r, v_1, \ldots, v_s)$$

$$= \lambda T(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_r, v_1, \ldots, v_s) + \lambda' T(\alpha_1, \ldots, \alpha_i', \ldots, \alpha_r, v_1, \ldots,$$

$$T(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, v_1, \ldots, \lambda v_i + \lambda' v_i' v_s)$$

$$= \lambda T(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, v_1, \ldots, v_i, \ldots v_s) + \lambda' T(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, v_1, \ldots, v_i', \ldots v_s).$$

Beispiele für Tensoren

- Skalar: Tensor vom Typ $(0, 0)$ (kosmetische Konvention)
- Linearform: Tensor vom Typ $(0, 1)$ (wird auch Kovektor genannt)
- Bilinearform: Tensor vom Typ $(0, 2)$.
- Vektoren kann man mit Tensoren vom Typ $(1, 0)$ identifizieren (etwa Physiker und einige Differentialgeometer betrachten Vektoren als $(1, 0)$-Tensoren): In diesem Foliensatz haben wir den kanonischen Isomorphismus (falls die Dimension endlich ist)

  $$\iota : V \to V^{**}$$

  definiert, gegeben durch $\iota(v)(\alpha) = \alpha(v)$. Also ist ein Vektor wesentlich ein Element von V^{**}, also eine lineare Abbildung von Linearformen nach $\mathbb{R}$ (oder einem beliebigen Körper $\mathbb{K}$) und ist deswegen ein $(1, 0)$-Tensor.

Ein einfaches Beispiel von (1,1)-Tensor

Sei $V = \mathbb{R}^2$, V^* sein Dualraum. Definiere

$$T(\phi, v) = \phi(v)$$

- T ist eine Abbildung $V^* \times V \to \mathbb{R}$.
- T ist linear in beiden Argumenten $\Longrightarrow$ Tensor vom Typ $(1, 1)$.

Basis von V und V^*

- Sei $\{e_i\}_{i=1}^n$ eine Basis von V
- Sei $\{e^j\}_{j=1}^n$ die dazu duale Basis von V^*, d.h.:

$$e^j(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

  (Wir haben bei der Einführung der Dualbasis die "$*$" Bezeichnung verwendet; in dieser Bezeichnung $e^j = e_j^*$)
- Ziel: Konstruiere eine Basis von $T_s^r(V)$

Basis im Tensorraum $T^r_s(V)$

- Wir definieren die folgene Elementen des Tensorraums $T^r_s(V)$:

$$e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s}$$

  - Sie sollen Elemente von $T^r_s(V)$ sein, also (multilineare) Abbildungen von $V^* \times \cdots \times V^* \times V \times \cdots \times V$ nach $\mathbb{R}$.
  - Wir definieren sie wie folgt:

$$e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s} (\alpha_1, \ldots, \alpha_r, v_1, \ldots, v_s)$$

$$= \alpha_1(e_{i_1}) \cdot \ \ldots \ \cdot \alpha_r(e_{i_r}) \cdot e^{j_1}(v_1) \cdot \ \ldots \ \cdot e^{j_s}(v_s).$$

- Multilinearität ist offensichtlich (und wird in Beispielen auf den nächsten Folien besprochen).
- Dir Indizes laufen über $\{1, \ldots, n\}$, also Anzahl der Basiselemente: n^{r+s}

Lemma 14. Die Tensoren $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s}$ bilden eine Basis in $T^s_r = T^s_r(V)$.

Multilinearität von $e_1 \otimes e^2$

Nach Definition gilt

$$e_1 \otimes e^2(\alpha, v) = \alpha(e_1)e^2(v)$$

(α ist eine Linearform, $\alpha(e_1)$ ist dann eine Zahl. $e^2 = e_2^*$ ist eine Linearform, $e^2(v)$ ist eine Zahl. Das Ergebnis ist dann das Produkt von zwei Zahlen).

Wenn wir α durch $\lambda\alpha + \lambda'\alpha'$ ersetzen, bekommen wir

$$e_1 \otimes e^2(\lambda\alpha + \lambda'\alpha', v) = (\lambda\alpha + \lambda'\alpha')(e_1)e^2(v)$$
$$= (\lambda\alpha(e_1) + \lambda'\alpha'(e_1))e^2(v) = \lambda e_1 \otimes e^2(\alpha, v) + \lambda' e_1 \otimes e^2(\alpha', v).$$

Die Linearität bzgl. des 2. Arguments zeigt man analog.

Beweis von Lemma 14

Lemma 14. Die Tensoren $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s}$ bilden eine Basis in T^s_r.

Linearunabhängigkeit: Betrachte die Gleichung

$$\sum_{i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s=1}^{n} \lambda^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s} = \mathbf{0}$$

in T^r_s, auf Koeffizienten $\lambda^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}$, und wende sie auf das Element

$$(e^{k_1}, \ldots, e^{k_r}, e_{m_1}, \ldots, e_{m_s}) \in \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r \text{ mal}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s \text{ mal}}$$

an. Nach Definition, siehe auch das Beispiel auf der vorherigen Folie, ist das Ergebnis die Summe von Produkten:

$$\sum_{i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s=1}^{n} \lambda^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} e^{k_1}(e_{i_1}) \cdot \ \ldots \ \cdot e^{k_r}(e_{i_r}) \cdot e^{j_1}(e_{m_1}) \cdot \ \ldots \ \cdot e^{j_s}(e_{m_s})$$

Nach Definition von $e^j(e_i)$ sind alle Summanden mit Ausnahme von $\lambda^{k_1\ldots k_r}_{j_1\ldots j_s} e^{k_1}(e_{k_1}) \cdot \ \ldots \ \cdot e^{k_r}(e_{k_r}) \cdot e^{m_1}(e_{m_1}) \cdot \ \ldots \ \cdot e^{m_s}(e_{m_s}) = \lambda^{k_1\ldots k_r}_{m_1\ldots m_s}$ gleich Null. Daraus folgt $\lambda^{k_1\ldots k_r}_{m_1\ldots {}_s} = 0$. Die Linearunabhängigkeit ist bewiesen.

Erzeugend:

Sei T ein beliebiger Tensor in T^r_s. Definiere $\lambda^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}$ durch

$$\lambda^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s} = T(e^{i_1},\dots,e^{i_r},e_{j_1},\dots,e_{j_s}).$$

Wir betrachten den Tensor

$$T - \sum_{i_1,\dots,i_r,j_1,\dots,j_s=1}^{n} \lambda^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s} e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_r}\otimes e^{j_1}\otimes\dots\otimes e^{j_s}, \qquad (*)$$

und zeigen, dass er gleich $\mathbf{0}$ ist.
Nach Konstruktion: Wenn wir beliebige Basis-Linearformen $e^{k_1},\dots,e^{k_r}$ und Basisvektoren $e_{m_1},\dots,e_{m_s}$ in $(*)$ einsetzen, bekommen wir 0, wie wir es wollen. Wegen Multilinearität ist dann $(*)$ identisch Null, denn wenn wir Linearkombinationen von Basisvektoren in $(*)$ einsetzen, bekommen wir Linearkombinationen von Basis-Linearformen und Basisvektoren, in $(*)$ eingesetzt.
Das Lemma ist bewiesen.

Fazit

- Der Tensorraum $T^r_s(V)$ hat Dimension n^{r+s}.
- Die Basis besteht aus „Tensorprodukten" von Basisvektoren und Dualbasisvektoren. (Der Begriff „Tensorprodukt von Tensoren" wird noch definiert).

Komponenten eines Tensors

- Wähle eine Basis $\{e_i\}$ von V und nehme die Dualbasis $\{e^i\}$ von V^*.
- Jeder Tensor T vom Typ (r, s) kann geschrieben werden als:

$$T = \lambda^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s}$$

- Die $\lambda^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$ sind die Komponenten von T.
- Man benutzt oft die folgende abgeleitete Bezeichnung: Wenn der Tensor etwa R heißt, bezeichnet man die Komponente von R durch $R^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$.

Bsp: Bilinearform

Eine Bilinearform ist ein $(0,2)$-Tensor nach Definition. In Koordinaten ist die Bilinearform durch eine Grammsche Matrix gegeben:

$$G(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j = (x_1, \ldots, x_n) G \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Die Komponenten (der Bilinearform, die wir als $(0,2)$-Tensor betrachten) sind dann

$$G_{ij} = G(e_i, e_j) = (e_i)^t G e_j = g_{ij}.$$

Bemerkung. Im Beweis, dass jede Bilinearform durch eine Grammsche Matrix eindeutig darstellbar ist, haben wir wesentlich den Beweis von Lemma 14 im Spezialfall durchgeführt.

Endomorphismen als (1,1) Tensoren.

- Ein Endomorphismus ist eine lineare Abbildung $A : V \to V$, wobei V ein endlichdimensionaler Vektorraum ist.
- In einer Basis kann A durch eine Matrix $A = (a_{ij})$ dargestellt werden.
- Wir zeigen, dass man Endomorphismen mit (1,1)-Tensoren kanonisch identifizieren kann.

Definition eines (1,1)-Tensors

- Ein Tensor vom Typ $(1, 1)$ ist eine multilineare Abbildung

$$T : V^* \times V \to \mathbb{R}, \quad (\phi, v) \mapsto T(\phi, v)$$

- Linear in beiden Argumenten.
- In einer Basis kann mit Hilfe von n^2 von Zahlen, Tensorkoeffizienten, dargestellt werden.

Wie identifizieren wir Endomorphismen und (1,1)-Tensoren?

- Definiere zu jedem Endomorphismus $A : V \to V$ einen (1,1)-Tensor T_A :

$$A \mapsto T_A, \quad T_A(\phi, v) := \phi(A(v)) \quad (*)$$

  - Die Abbildung $A \mapsto T_A$ ist bilinear und ist deswegen ein $(1,1)$-Tensor:

    $T_A(a\phi_1 + b\phi_2, v) = aT_A(\phi_1, v) + bT_A(\phi_2, v)$, $\quad T_A(\phi, av_1 + bv_2) = aT_A(\phi, v_1) + bT_A(\phi, v_2)$

- Die Umkehrabbildung kann man wie folgt konstruieren:
  Für jedes (1,1)-tensor R, und jeden Vektor v, betracten wir die Linearform auf V^* (also, einen Element von V^{**}) gegeben durch

$$R_v(\alpha) := R(\alpha, v).$$

  Wir wissen aber, dass V^{**} und V kanonisch isomorph sind; Isomorphismus haben wir in diesem Foliensatz eingeführt und ι genannt. Die Abbildung

$$v \mapsto \iota^{-1}(R_v) \quad (**)$$

  ist eine (lineare) Abbildung von V nach V, also, ein Endomorphismus.
- Die beide Abbildungen sind geomerisch gegeben, ohne Koordinaten zu verwenden. Auf der nächsten Folie erklären wir, mit Hilfe von Koordinaten, warum die Abbildung $(*)$ inverse zur Abbildung $(**)$

Endomorphismus A sei durch die Matrix (a_{ij}) gegeben. Dann ist

$$T_A(\phi, v) = \phi(A(v)) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \phi_i a_{ij} v_j.$$

Die Komponenten des Tensors T_A sind dann

$$(T_A)^i_j = T_A(e^j, e_i) = e^j(A(e_i)) = a_{ij}. \quad (***)$$

Jetzt betrachten wir den (1,1)-Tensor R und konstruieren den Endomorphismus: für jeden Vektor v bekommen wir

$$R_v(\phi) = R(\phi, v) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} R^i_j v_j, \right) \phi_i,$$

sodass v auf Vektor mit j-Komponenten gleich $\sum_{j=1}^{n} R^i_j v_j$ abgebildet wird. Unter verwenden von $(***)$, sehen wir, dass für $R = T_A$ der konstruierte Endomorphismus gleich A ist.

Fazit

- Jeder Endomorphismus $A : V \to V$ kann als Tensor vom Typ $(1, 1)$ interpretiert werden.
- Mathematisch: $\mathrm{End}(V) \cong V \otimes V^*$
- Anwendung: Darstellung von linearen Operatoren als Tensoren in Geometrie und Physik.

Tensorprodukt von Tensoren: Definition

- Sei $S \in T^{(r_1,s_1)}(V)$, $T \in T^{(r_2,s_2)}(V)$
- Dann ist ihr Tensorprodukt:

$$S \otimes T \in T^{(r_1+r_2,\, s_1+s_2)}(V)$$

- Definiert durch:

$$(S \otimes T)(\phi_1, \ldots, \phi_{r_1+r_2}, v_1, \ldots, v_{s_1+s_2})$$

$$:= S(\phi_1, \ldots, \phi_{r_1}, v_1, \ldots, v_{s_1}) \cdot T(\phi_{r_1+1}, \ldots, \phi_{r_1+r_2}, v_{s_1+1}, \ldots, v_{s_1+s_2})$$

(Multilinearität ist offensichtlich)

Beispiel: Tensorprodukt zweier $(0,1)$-Tensoren

- Sei $\alpha, \beta \in V^*$, also $(0,1)$-Tensoren
- Dann ist $\alpha \otimes \beta \in T_2^0$
- Für $v_1, v_2 \in V$ gilt:

$$(\alpha \otimes \beta)(v_1, v_2) = \alpha(v_1) \cdot \beta(v_2)$$

- Wichtig: Im Allgemeinen ist $\alpha \otimes \beta \neq \beta \otimes \alpha$

Eigenschaften des Tensorprodukts

- Bilinearität: Für Tensoren A, B, C und Skalar λ:

$$(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C, \quad \lambda A \otimes B = A \otimes (\lambda B)$$

- Nicht kommutativ: $A \otimes B \neq B \otimes A$ im Allgemeinen
- Assoziativ (bis auf Isomorphie): $(A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$

Kontraktion

- Sei $T \in T^r_s(V)$ ein Tensor mit $r, s \geq 1$.
- Eine Kontraktion ist eine Operation, die einem (r, s)-Tensor einen $(r-1, s-1)$-Tensor zuordnet.
- $\mathrm{contr}_{i,j}(T)$, wobei $i \in \{1, \dots, r\}$ und $j \in \{1, \dots, s\}$. Man sagt: der i-te kontravariante und der j-te kovariante Index werden kontrahiert.

Zuerst definieren wir Kontraktion von $(1,1)$-Tensoren

- Sei $T \in T^{(1,1)}(V) \cong \mathrm{End}(V)$.
- Die Kontraktion ist:

$$\operatorname{tr}(T) := \mathrm{Spur}(T) = \sum_{i=1}^{n} T_i^i = \sum_{i=1}^{n} T(e^i, e_i) \quad (*)$$

  wobei $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ Basis von V und $\{e^i\}_{i=1,\dots,n}$ die Dualbasis ist.

Wir wissen, dass die Spur einer Matrix nicht vom Koordinatensystem abhängt, weil sie ein Koeffizient des charakteristischen Polynoms ist. Also, obwohl die Formel $(*)$ Basisvektoren benutzt, ist sie unabhängig von der Wahl der Basis.

Kontraktion von (r, s)-Tensoren

Das Ergebnis der Kontraktion soll ein $(r-1, s-1)$-Tensor sein.
Wir erklären, was

$$\mathrm{contr}_{i,j}(T)(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}, v_1, \ldots, v_{s-1})$$

bedeutet; wir reduzieren es auf die Kontraktion eines $(1,1)$-Tensors. Dazu betrachten wir einen $(1,1)$-Tensor

$$\tilde{T}(\alpha, v) := T(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha, \alpha_i, \ldots, \alpha_{r-1}, v_1, \ldots, v_{j-1}, v, v_j, \ldots, v_{s-1}).$$

(In der Definition von $\tilde{T}$ betrachten wir $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}$ und $v_1, \ldots, v_{s-1}$ als Parameter. $\tilde{T}$ bildet die Paare α, v auf $\mathbb{R}$ ab und ist ein $(1,1)$-Tensor).
Dann definieren wir

$$\mathrm{contr}_{i,j}(T)(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}, v_1, \ldots, v_{s-1}) := \mathrm{contr}_{1,1}(\tilde{T}).$$

Wir sehen, dass die Definition oben koordinatenunabhängig ist. Es ist eventuell nicht sofort klar, warum das Ergebnis ein Tensor ist, also warum es multilinear in $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}, v_1, \ldots, v_{s-1}$ ist. Wir besprechen das auf der nächsten Folie.

Beweis der Linearität:

Ich werde den Beweis für $(2,1)$-Tensoren durchführen, wobei wir den ersten kontravarianten (also oberen) Index mit dem einzigen kovarianten (also unteren) Index kontrahieren. Sie werden das Prinzip sehen. Danach kommentiere ich den allgemeineren Fall.

Der Beweis basiert auf der Tatsache, dass die Abbildung $A \mapsto \mathrm{Spur}(A)$ linear in den Einträgen der Matrix A ist. Wir definieren, wie oben, $\tilde{T}(\alpha, v) := T(\alpha, \beta, v)$ (wobei β eine fest gewählte Linearform ist).

In Koordinaten gilt:

$$\tilde{T}(\alpha, v) \stackrel{\mathrm{Def}}{=} T(\alpha, \beta, v) = \sum_{i, i_1, j=1}^{n} T_j^{i\, i_1} \alpha_i \beta_{i_1} v^j \stackrel{\mathrm{umformen}}{=} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{i_1=1}^{n} T_j^{i\, i_1} \beta_{i_1} \right) \alpha_i v^j .$$

$$\boxed{\tilde{T}(\alpha, v) \overset{\text{Def}}{=} T(\alpha, \beta, v) = \sum_{i,i_1,j=1}^{n} T_j^{i\,i_1}\,\alpha_i \beta_{i_1} v^j \overset{\text{umformen}}{=} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{i_1=1}^{n} T_j^{i\,i_1} \beta_{i_1} \right) \alpha_i v^j.}$$

Wir sehen, dass die Komponenten von $\tilde{T}$ durch die Formel

$$\tilde{T}_j^i = \sum_{i_1=1}^{n} T_j^{i\,i_1} \beta_{i_1}$$

gegeben sind. Diese Formel ist linear in den Komponenten von β. Die Kontraktion $\mathrm{contr}_{1,1}(T)(\beta)$ ist dann die Spur der Matrix $\tilde{T}_j^i$. Da die Spur einer Matrix linear in deren Komponenten ist, wegen

$$\mathrm{Spur}(\tilde{T}_j^i) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{T}_i^i,$$

wir sehen, dass $\mathrm{contr}_{1,1}(T)(\beta)$ linear von β abhängt, wie gewünscht.

Bemerkung. Im allgemeineren Fall, z.B. für einen $(2,2)$-Tensor, lautet die Formel für $\tilde{T}$:

$$\tilde{T}(\alpha, v) = \sum_{i,i_1,j,j_1=1}^{n} T^{i\,i_1}_{j\,j_1}\, \alpha_i \beta_{i_1} v^j u^{j_1} \stackrel{\text{umformen}}{=} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{i_1,j_1=1}^{n} T^{i\,i_1}_{j\,j_1} \beta_{i_1} u^{j_1} \right) \alpha_i v^j,$$

und sie ist multilinear in β und u. Da die Spur einer Matrix linear in deren Komponenten ist, folgt die Multilinearität in β und u.

Bemerkung. Aus der obigen Erklärung folgt auch die Formel für die Komponenten von $\mathrm{contr}_{1,1}(T)$:

$$(\mathrm{contr}_{1,1}(T))^{i_1} = \sum_{i=1}^{n} T^{i\,i_1}_{i}.$$

Man kann die Formel für (r,s)-Tensoren verallgemeinern:

$$(\mathrm{contr}_{k,m}(T))^{i_1 \dots i_{r-1}}_{j_1 \dots j_{s-1}} = \sum_{j=1}^{n} T^{i_1 \dots i_{k-1}\, j\, i_k \dots i_{r-1}}_{j_1 \dots j_{m-1}\, j\, j_m \dots j_{s-1}}.$$

Oft wird diese Formel als Definition betrachtet. Allerdings ist aus der Formel nicht sofort ersichtlich, dass die Kontraktion unabhängig von der Wahl der Basis ist. Dies ist selbst für $(1,1)$-Tensoren nicht trivial und folgt aus der Basisunabhängigkeit der Spur einer Matrix.

Die Formel für die Kontraktion noch einmal

- Allgemein: Für $T \in T^{(r,s)}$, Kontraktion über Indexpaar (i,j):

$$\mathrm{contr}_{i,j}(T)(\dots) = \sum_k T(\dots, \underbrace{e^k}_{i-\text{Stelle}}, \dots, \underbrace{e_k}_{r+j-\text{Stelle}}, \dots)$$

Kontraktion ist invariant

- Tensoren sind geometrische Objekten (wie etwa Endlomorphismen), sie hängen nicht von Wahl der Basis ab. Wahl von Basis erlaubt, die Tensoren durch Zahlen (=Komponenten, Koordinaten) zu beschreiben. Analog im Fall von Endomorphismen: Matrizen erlauben, Endomorphismen zu beschreiben.
- Der Wert $\sum_{i=1}^{n} T(e^i, e_i)$ ist invariant unter Basistransformationen
- Mathematisch: Kontraktion ist ein tensorielle Operation in der Tensoralgebra

Schiefsymmetrische Formen im $\mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{K}^n$ bzw. V).

Def. Eine (lineare) schiefsymmetrische k-Form ist eine Abbildung

$$\omega : \underbrace{\mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n}_{k \text{ Stück}} \to \mathbb{R},$$

welche folgende Eigenschaften besitzt:

- Linearität bzgl. jedes Arguments:

$$\omega(\xi_1, ..., \xi_{i-1}, \lambda'\xi' + \lambda''\xi'', \xi_{i+1}, ..., \xi_k)$$
$$= \lambda'\omega(\xi_1, ..., \xi_{i-1}, \xi', \xi_{i+1}, ..., \xi_k) + \lambda''\omega(\xi_1, ..., \xi_{i-1}, \xi'', \xi_{i+1}, ..., \xi_k).$$

- Schiefsymmetrie: Für jedes $i < j$ gilt

$$\omega(\xi_1, .., \xi_j, ..., \xi_i, ..., x_k) = -\omega(\xi_1, .., \xi_i, ..., \xi_j, ..., x_k)$$

Bemerkung. Wegen der Schiefsymmetrie reicht es, nur Linearität bzgl. des ersten Arguments zu verlangen. Schiefsymmetrische Formen sind (0,k)-Tensoren.

Bemerkung — Definition. Schiefsymmetrische k-Formen sind für alle $k \in \mathbb{N}$ definiert. Wir werden jedoch sehen, dass für $k > n$ jede schiefsymmetrische k-Form identisch Null ist.

Beispiele

- Jede Linearform $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ ist eine 1-Form.

  Erklärung. Schiefsymmetrie ist hier automatisch erfüllt, weil es nur ein Argument gibt.

- Sei $\Omega = (\omega_{ij})$ eine schiefsymmetrische (d.h. $\Omega^T = -\Omega$) $n \times n$-Matrix. Wir definieren die 2-Form ω durch

  $$\omega(x, y) = x^T \Omega y = \sum_{i,j} x_i \omega_{ij} y_j.$$

  In LA I haben wir gesehen, dass $\omega(x, y)$ schiefsymmetrisch ist: wir wiederholen die Erklärung:

  $$x^T \Omega y \overset{(*)}{=} (x^T \Omega y)^t = y^t \Omega^t x \overset{(**)}{=} -y^t \Omega x = -\omega(y, x).$$

  - $(*)$: Weil $x^T \Omega y$ eine (1×1)-Matrix ist.
  - $(**)$: Weil $\Omega^t = -\Omega$ ist.

- Determinante: Wir definieren die n-Form

  $$\omega(\xi_1, ..., \xi_n) = \begin{array}{c}\text{Determinante der } n \times n \text{ Matrix,} \\ \text{deren } i\text{−te Spalte gleich } \xi_i \text{ ist.}\end{array}$$

  Schiefsymmetrie und Linearität folgen aus den Eigenschaften der Determinante.

Wie kann man lineare Formen angeben?

Um zum Beispiel eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ anzugeben, können wir ihre Matrix (also im Wesentlichen n^2 Zahlen) angeben. Die Abbildung bestimmt die Matrix und die Matrix bestimmt die Abbildung. Was ist das Analogon der Darstellungsmatrizen für k-Formen?

Bsp. Eine 1-Form ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$, also im Wesentlichen eine $1 \times n$-Matrix $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$. Die 1-Form ω ist dann gegeben durch

$$x \mapsto \omega_1 x_1 + ... + \omega_n x_n.$$

Eigentlich, k-Form ist ein $(0,k)$-Tensor. Deswegen kann man die Form durch Koordinaten bezüglich der Basis

$$e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \quad , i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$$

eingeben.
Allerdings wird damit "zu viel Speicherplatz verbraucht", weil etwa die Koordinate $T_{i_1 i_1 \ldots}$ (also, wenn zwei Indexen zusammenfallen) automatisch gleich Null wegen Schiefsymmetrie ist. Denn

$$T_{i_1 i_1 \ldots} = T(e_{i_1} e_{i_1} \ldots) = \text{umstellen von ersten und zweiten } e_{i_1} = -T(e_{i_1} e_{i_1} \ldots),$$

deswegen $T_{i_1 i_1 \ldots} = 0$.
Auch $T(\ldots, i, \ldots, j, \ldots) = -T(\ldots, j, \ldots, i, \ldots)$.

Bsp. Wie oben wiederholt, ist eine 2-Form im Wesentlichen eine schiefsymmetrische $n \times n$-Matrix $\Omega = \big(\omega_{ij}\big)$: jede Bilinearform mit Hilfe ihrer Gramschen Matrix dargestellt werden kann (mit Einträgen $\omega_{ij} = \omega(e_i, e_j)$).
Die Formel für ω ist dann

$$\omega(x, y) = \sum_{i,j} \omega_{ij} x_i y_j.$$

Da schiefsymmetrische Matrizen $\frac{n(n-1)}{2}$ unabhängige Komponenten haben, brauchen wir also $\frac{n(n-1)}{2}$ Zahlen, um eine 2-Form zu bestimmen.

Das Wedge-Produkt (Dachprodukt) von 1-Formen

Seien $\ell_1, ..., \ell_k$ Linearformen. Das Wedgeprodukt $\ell_1 \wedge ... \wedge \ell_k$ dieser Formen ist eine k-Form, gegeben durch

$$\ell_1 \wedge \cdots \wedge \ell_k(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \det \begin{pmatrix} \ell_1(\xi_1) & \cdots & \ell_1(\xi_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \ell_k(\xi_1) & \cdots & \ell_k(\xi_k) \end{pmatrix} = \det\big(\ell_i(\xi_j)\big).$$

Bsp. Sei $\ell(x) = x_1 + x_2$ und $f(x) = x_1 - x_2$. Dann ist

$$\ell \wedge f(x, y) = \det \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \end{pmatrix} = -2\, x_1\, y_2 + 2\, x_2\, y_1 .$$

Wichtige Bezeichnung aus diesen Foliensatz. Mit e^i bezeichnen wir die folgende 1-Form:

$$e^i \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_i .$$

Wichtiges Bsp.

Bsp. $e^1 \wedge ... \wedge e^n$ haben wir bereits oben, gleich nach Definition von schiefsymmetrischen Formen betrachtet:

$$e^1 \wedge ... \wedge e^n(\xi_1, ..., \xi_n) = \begin{array}{c}\text{Determinante der } n \times n \text{ Matrix,} \\ \text{deren } i-\text{te Spalte gleich } \xi_i \text{ ist.}\end{array}$$

Basis und Dimension im Raum von schiefsymmetrischen Formen

Es ist offensichtlich, dass die Menge $\Lambda_k = \{\text{alle } k\text{-Formen}\}$ bzgl. der natürlichen Addition und Multiplikation einen Vektorraum bildet.

Satz 39. Der Raum Λ_k ist $\binom{n}{k}$-dimensional. Die k-Formen

$$e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} \quad \text{wobei } i_1 < \cdots < i_k$$

bilden eine Basis.

Folgerung. Jede lineare k-Form kann man in der Form $\sum_{i_1 < \ldots < i_k} \omega_{i_1 \ldots i_k} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$ darstellen, wobei $\omega_{i_1 \ldots i_k} \in \mathbb{R}$.

Folgerung. Jede lineare k-Form mit $k > n$ ist identisch Null.

Plan: Warum ist das eine Basis?

- Das Wedge-Produkt $e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$ ist schiefsymmetrische Form (bereits oben erklärt).
- Die Menge ist linear unabhängig.
- Jede schiefsymmetrische k-Form lässt sich als Linearkombination solcher Produkte darstellen.

Zählung der Basis-Elemente

Es gibt genau so viele Basiselemente wie Kombinationen von k verschiedenen Indizes aus $\{1, \dots, n\}$:

$$\#\{\, (i_1, \dots, i_k) \mid 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n \,\} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Somit:

$$\dim \Lambda_k = \binom{n}{k}.$$

Linearunabhängigkeit der Menge $\{e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}\}_{i_1<i_2<\cdots<i_k}$

Der Beweis ist ähnlich zum Beweis von Lemma 14 (über die Basis in $T^r_s(V)$).
Angenommen, die Summe

$$\sum_{i_1<\cdots<i_k} \lambda_{i_1\ldots i_k} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} = \mathbf{0}. \quad (*)$$

Für beliebige $m_1 < m_2 < \cdots < m_k$ setzen wir $(e_{m_1}, \ldots, e_{m_k})$ in $(*)$ ein.
Nach Definition gilt

$$e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}(e_{m_1}, \ldots, e_{m_k}) = \det \begin{pmatrix} e^{i_1}(e_{m_1}) & \cdots & e^{i_1}(e_{m_k}) \\ \vdots & & \vdots \\ e^{i_k}(e_{m_1}) & \cdots & e^{i_k}(e_{m_k}) \end{pmatrix}. \qquad (**)$$

Wenn $(i_1, \ldots, i_k) \neq (m_1, \ldots, m_k)$ ist, ist eine Spalte (und eine Zeile) der Matrix gleich der Nullspalte; in diesem Fall ist $(**)$ gleich 0. Wenn aber $(i_1, \ldots, i_k) = (m_1, \ldots, m_k)$ ist, ist die Matrix die Einheitsmatrix, und $(**)$ ist gleich 1.

Dann impliziert $(*)$ nach Einsetzen von $(e_{m_1}, \ldots, e_{m_k})$, dass $\lambda_{m_1\ldots m_k} = 0$.
Die Linearunabhängigkeit ist damit bewiesen.

Die Menge $\{e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}\}_{i_1<i_2<\cdots<i_k}$ ist erzeugend

Wir benutzen Lemma 14: Es besagt, dass die bilinearen Formen

$$e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \quad (*)$$

eine Basis bilden.

Sei jetzt $T_{i_1,\ldots,i_k}$, $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ die Koordinaten einer schiefsymmetrischen k-Form in dieser Basis.
Wir haben oben erklärt, dass $T_{\ldots,i,\ldots,i,\ldots} = 0$ gilt (wenn zwei Indizes zusammenfallen, ist die entsprechende Koordinate gleich 0).

Analog gilt (für jedes i, j): $T_{\ldots,i,\ldots,j,\ldots} = -T_{\ldots,j,\ldots,i,\ldots}$. Daraus folgt, dass die Koordinaten $T_{i_1,\ldots,i_k}$ mit $i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ die anderen Koordinaten eindeutig bestimmen.

Deswegen ist die Dimension des Raums der schiefsymmetrischen k-Formen höchstens die Anzahl der verschiedenen Index-Tupel $(i_1, \ldots, i_k)$ mit $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$. Diese Anzahl ist gleich der Anzahl $\binom{n}{k}$ der linear unabhängigen k-Formen $e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$, siehe die vorvorletzten Folien. Also spannen diese k-Formen den Raum auf.

Satz 39 ist damit bewiesen.

Plan für die letzte Woche

- Ich habe alle geplannten Themen vorgetragen
- Für die letzte Woche werde ich Übersicht der LA I/II vorbereiten und die Themen für die Klausur vorstellen bzw. besprechen.