

- ▶ Wir werden zuerst uns weiter mit Anwendungen von Jordannormalform beschäftigen
 - ▶ Wir besprechen auch den Fall wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist.
 - ▶ Die Hausaufgaben und Anwesenheitsübungen werden schwerpunktmässig auf Jordannormalform und Anwendungen gestellt.

- **Satz 8 (Jordansche Normalform)** Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$ -Vektorraum und sei $\phi : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus, dessen Minimalpolynom in Linearfaktoren zerfällt. Dann existiert eine Basis von V , so dass die Matrix von ϕ eine Jordan-Matrix ist. Diese Jordansche Normalform ist bis auf Reihenfolge der Jordanblöcke eindeutig.

- Die Matrix der Form
$$\begin{pmatrix} \boxed{J_{\lambda_1}^{k_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J_{\lambda_m}^{k_m}} \end{pmatrix}, \text{ wobei } J_{\lambda_j}^{k_j} \text{ Jordan-Blöcke}$$
 sind, heißt **Jordan-Matrix**.

- Die $k \times k$ Matrix $J_{\lambda}^k := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$ heißt **Jordan-Block**.

In den meisten bis jetzt bewiesenen Aussagen über Jordan-Formen haben wir stets vorausgesetzt, dass das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt.

Diese Bedingung ist für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ immer erfüllt. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gibt es Matrizen deren charakteristische Polynome nicht in Linearfaktoren zerfallen – Beispiele haben wir bereits in Vorl. 1 gesehen – etwa

$$\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}.$$

Kann man dies überwinden? Antwort ist “Ja”, und das ist unseres nächstes Ziel.

Komplexifizieren von $\mathbb{R}$ -Vektorräumen und deren Endomorphismen

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Wir betrachten

$$V_{\mathbb{C}} := \{ \underbrace{u + iv} \mid u, v \in V \}.$$

Formale Summe

(Mengenteoretisch ist $V_{\mathbb{C}} = V \times V$. Wir schreiben nur die Elemente von $V \times V$, also Paare $(u, v) \in V \times V$, als $u + iv$.)

Auf $V_{\mathbb{C}}$ definieren wir Addition und Multiplikation **MIT ELEMENTEN VON $\mathbb{C}$** :

- ▶ $u + iv + u' + iv' = (u + u') + i(v + v')$.
- ▶ Für $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ definieren wir
 $(\alpha + i\beta)(u + iv) = (\alpha u - \beta v) + i(\alpha v + \beta u)$.

$V_{\mathbb{C}}$ ist ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

Lemma 7. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Dann gilt: $V_{\mathbb{C}}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{C}$.

Die Operationen “Addition” und “Multiplikation mit Elementen von $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ” sind wohldefiniert. Um das Lemma zu beweisen, müssen wir die Axiome I – VIII aus der Definition eines Vektorraums überprüfen.

- I Für alle $u, v, w \in V_{\mathbb{C}}$ gilt $(u + v) + w = u + (v + w)$
- II Für alle $u, v \in V_{\mathbb{C}}$ gilt $u + v = v + u$
- III Es existiert ein $\vec{0} \in V_{\mathbb{C}}$, so dass für alle $v \in V_{\mathbb{C}}$ gilt $\vec{0} + v = v$
- IV Für jedes $v \in V_{\mathbb{C}}$ existiert ein $-v \in V_{\mathbb{C}}$, so dass gilt $-v + v = \vec{0}$
- V Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und $v \in V_{\mathbb{C}}$ gilt $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
- VI Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und $v \in V_{\mathbb{C}}$ gilt $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
- VII Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und $u, v \in V_{\mathbb{C}}$ gilt $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
- VIII Für alle $v \in V_{\mathbb{C}}$ gilt $(1 + i \cdot 0) \cdot v = v$

$$\blacktriangleright x + iy + x' + iy' = (x + x') + i(y + y').$$

$$\blacktriangleright \text{Für } \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \text{ wir definieren } (\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x).$$

- I Für alle $u, v, w \in V_{\mathbb{C}}$ gilt
 $(u + v) + w = u + (v + w)$
- II Für alle $u, v \in V_{\mathbb{C}}$ gilt $u + v = v + u$
- III Es existiert ein $\vec{0} \in V_{\mathbb{C}}$, so dass für alle $v \in V_{\mathbb{C}}$ gilt $\vec{0} + v = v$
- IV Für jedes $v \in V_{\mathbb{C}}$ existiert ein $-v \in V_{\mathbb{C}}$, so dass gilt $-v + v = \vec{0}$
- V Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und $v \in V_{\mathbb{C}}$ gilt
 $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
- VI Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und $v \in V_{\mathbb{C}}$ gilt
 $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
- VII Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und $u, v \in V_{\mathbb{C}}$ gilt
 $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
- VIII Für alle $v \in V_{\mathbb{C}}$ gilt $(1 + i \cdot 0) \cdot v = v$

I, II, VIII sind offensichtlich. Das $\vec{0}$ -Element in $V_{\mathbb{C}}$ ist das Element $\vec{0} + i \cdot \vec{0}$. Das Element $-x + i \cdot (-y)$ (Umgangssprachlich: $-x - iy$) ist das additive Inverse zu $x + iy$. V, VI, VII kann man nach der Definition überprüfen, ähnlich wie wir es in der Einführung der komplexen Zahlen in LA I gemacht haben, wo wir ähnliche Eigenschaften für das Addieren/Multiplizieren von komplexen Zahlen bewiesen haben.

Bsp: Komplexifizieren von $V = \mathbb{R}^3$ gibt $\mathbb{C}^3$

Die Menge $V_{\mathbb{C}}$ ist die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \mid x_k, y_k \in \mathbb{R} \right\}.$

Die Operationen “ $\cdot$ ” und “ $+$ ” sind wie oben definiert:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x'_1 \\ x_2 + x'_2 \\ x_3 + x'_3 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} y_1 + y'_1 \\ y_2 + y'_2 \\ y_3 + y'_3 \end{pmatrix}$$
$$(\alpha + i\beta) \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1\alpha - y_1\beta \\ x_2\alpha - y_2\beta \\ x_3\alpha - y_3\beta \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} x_1\beta + y_1\alpha \\ x_2\beta + y_2\alpha \\ x_3\beta + y_3\alpha \end{pmatrix}.$$

Ich behaupte, dass $V_{\mathbb{C}}$ zu $\mathbb{C}^3$ isomorph ist: In der Tat, man kann den Isomorphismus explizit angeben:

$$f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ x_2 + iy_2 \\ x_3 + iy_3 \end{pmatrix}.$$

Man überlege, dass die Abbildung f wohldefiniert linear und bijektiv ist.
z.B.

$$(\alpha + i\beta) f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1\alpha - y_1\beta \\ x_2\alpha - y_2\beta \\ x_3\alpha - y_3\beta \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} x_1\beta + y_1\alpha \\ x_2\beta + y_2\alpha \\ x_3\beta + y_3\alpha \end{pmatrix} = f \left(\begin{pmatrix} (\alpha + i\beta)(x_1 + iy_1) \\ (\alpha + i\beta)(x_2 + iy_2) \\ (\alpha + i\beta)(x_3 + iy_3) \end{pmatrix} \right).$$

Was ist die Dimension von $V_{\mathbb{C}}$? Sei $(b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V . Kann man mit Hilfe von $(b_1, \dots, b_n)$ eine Basis konstruieren? Ja!
 $(b_1 + i \cdot \vec{0}, b_2 + i \cdot \vec{0}, \dots, b_n + i \cdot \vec{0})$ ist eine Basis in $V_{\mathbb{C}}$!

Bsp. Wir haben gesehen, dass für $V = \mathbb{R}^3$ gilt $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^3$. Für die Standard-Basis $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ist die “komplizierte” Basis

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i \cdot 0 \\ 0+i \cdot 0 \\ 0+i \cdot 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0+i \cdot 0 \\ 1+i \cdot 0 \\ 0+i \cdot 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0+i \cdot 0 \\ 0+i \cdot 0 \\ 1+i \cdot 0 \end{pmatrix} \right).$$

Warum ist $(b_1 + i \cdot \vec{0}, b_2 + i \cdot \vec{0}, \dots, b_n + i \cdot \vec{0})$ eine Basis?

- Weil sie linear unabhängig ist: Ist

$$\vec{0} + i \cdot \vec{0} = (\alpha_1 + i\beta_1)(b_1 + i \cdot \vec{0}) + \dots + (\alpha_n + i\beta_n)(b_n + i \cdot \vec{0}) =$$
$$(\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n) + i(\beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n), \text{ so ist}$$
$$\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n = \vec{0} \text{ (und deswegen } \alpha_i = 0) \text{ und}$$
$$(\beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n) = \vec{0} \text{ (und deswegen } \beta_i = 0).$$

- Weil sie erzeugend ist: Wir bekommen ein beliebiges Element $\underbrace{\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n}_u + i \cdot \underbrace{(\beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n)}_v$ als die folgende

Linearkombination (mit komplexen Koeffizienten):

$$\underbrace{\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n}_u + i \cdot \underbrace{(\beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n)}_v =$$
$$(\alpha_1 + i\beta_1)b_1 + \dots + (\alpha_n + i\beta_n)b_n.$$

Wichtige Erkenntnis: Dimensionen von V und $V_{\mathbb{C}}$ sind gleich.

Komplexifizieren von linearen Abbildungen

Sei $\phi : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus eines $\mathbb{R}$ - Vektorraums V (der Dimension n). Kann man damit einen Endomorphismus $\phi_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$ (“kanonisch”) konstruieren?

Ja! Wir definieren $\phi_{\mathbb{C}}(u + iv) = \phi(u) + i\phi(v)$. Wohldefiniertheit ist offensichtlich. Linearität ist einfach zu zeigen:

$$\begin{aligned}\phi_{\mathbb{C}}(u + iv + u' + iv') &= \phi_{\mathbb{C}}(u + u' + i(v + v')) = \phi(u + u') + i\phi(v + v') \\ &= \phi(u) + \phi(u') + i(\phi(v) + \phi(v')) = \phi_{\mathbb{C}}(u + iv) + \phi_{\mathbb{C}}(u' + iv').\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_{\mathbb{C}}((\alpha + i\beta)(u + iv)) &= \phi_{\mathbb{C}}((\alpha v - \beta u) + i(\alpha u + \beta v)) = \alpha\phi(v) - \beta\phi(u) + i(\alpha\phi(u) + \beta\phi(v)) \\ &= (\alpha + i\beta)(\phi(u) + i\phi(v)) = (\alpha + i\beta)\phi_{\mathbb{C}}(u + iv).\end{aligned}$$

Matrix der komplizierten linearen Abbildung

Wähle eine Basis $(b_1, \dots, b_n)$ in V . Betrachte die entsprechende Basis $(b_1 + i \cdot \vec{0}, b_2 + i \cdot \vec{0}, \dots, b_n + i \cdot \vec{0})$ in $V_{\mathbb{C}}$.

Frage. Was ist die Matrix von $\phi_{\mathbb{C}}$ bzgl. dieser Basis?

Antwort. Dieselbe wie die Matrix von ϕ in der Basis $(b_1, \dots, b_n)$:

Begründung: Um die Matrix zu definieren, brauchen wir nur die Koordinaten der Bilder der Basisvektoren, und diese sind in den Basen $(b_1, \dots, b_n)$ und $(b_1 + i \cdot \vec{0}, b_2 + i \cdot \vec{0}, \dots, b_n + i \cdot \vec{0})$ gleich (wenn wir die Zahlen $\alpha + i \cdot 0 \in \mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ identifizieren).

Anwendung aus LA I: („Beste“ Form einer reellen $n \times n$ Matrix A , die über komplexen Zahlen diagonalisierbar ist).

Folgerung D (aus LA) Sei $\phi : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus eines $\mathbb{R}$ -Vektorraums V . Angenommen $\phi_{\mathbb{C}}$ ist diagonalisierbar. Dann gibt es eine Basis in V , sodass die Matrix von ϕ in dieser Basis die

Block-diagonale Form
$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{A_m} \end{pmatrix}$$
 hat, wobei jedes A_j eine (1×1) -Matrix (λ_j) , oder eine (2×2) -Matrix der Form $\begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$ ist, wobei $\beta \neq 0$.

Bemerkung. Die Eigenwerte von dieser Matrix sind λ_j und $\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$, $\bar{\mu}_j = \alpha_j - i\beta_j$.

Beweisstrategie für Folgerung D LA I (wird auch im Beweis der Verallgemeinerung für Jordan-Blöcke benutzt).

Wir finden eine Basis $(b_1 + ia_1, \dots, b_n + ia_n)$ in $V_{\mathbb{C}}$, sodass die Matrix von $\phi_{\mathbb{C}}$ diagonal ist. Dann konstruieren wir mit Hilfe der Basisvektoren $b_i + ia_i$ die **REELLEN** Basisvektoren und bekommen die Aussage.

Ich bitte Sie den Beweis von Folgerung D LA I noch einmal anschauen.
Drei Schritte des Beweises:

Schritt 1: man zeigt, dass wenn μ ein EW ist, dann ist auch $\bar{\mu}$ EW. Ferner zeigt man, dass wenn $V = v + iu$ ein EV zu μ ist, dann ist $\bar{V} = v - iu$ ein EV zu $\bar{\mu}$. Diese Aussage werden wir wieder benutzen; ich werde den Beweis wiederholen und verallgemeinern.

Schritt 2: Man wählt in $\mathbb{C}^n$ eine Basis aus Eigenvektoren der Form

$$\left(\underbrace{b_1 + i\vec{0}, \dots, b_k + i\vec{0}}_{\text{zu reellen EW } \lambda_1, \dots, \lambda_k}, \underbrace{b_{k+1} + ia_{k+1}, b_{k+1} - ia_{k+1}, \dots, b_{\frac{n-k}{2}} - ia_{\frac{n-k}{2}}}_{\text{zu komplexen EW } \mu_{k+1}, \bar{\mu}_{k+1}, \dots, \mu_{\frac{n-k}{2}}, \bar{\mu}_{\frac{n-k}{2}}} \right)$$

Schritt 3: Man zeigt, dass $(b_1, \dots, b_k, b_{k+1}, a_{k+1}, b_{k+2}, a_{k+2}, \dots, b_{\frac{n-k}{2}}, a_{\frac{n-k}{2}})$ eine Basis in $\mathbb{R}^n$ bilden (die Anzahl ist richtig; man muss nur Linearunabhängigkeit prüfen) und dass die Matrix in der Basis wie angekündigt ist.

Ähnliche Methode wird auch im allgemeinen Fall angewendet.

Reelle Jordan-Matrix

Satz 8' (Jordansche Normalform für reellen Endomorphismem)

$A \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n \times n)$. Dann gibt es eine $B \in GL(\mathbb{R}, n \times n)$ sodass $A' = B^{-1}AB$ die reelle Jordannormalform hat: dass bedeutet sie ist

blockdiagonal, $A' = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & \\ & \boxed{A_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$

und jeder Block A_i hat das Aussehen

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 1 & 0 & & \\ \beta & \alpha & 0 & 1 & & \\ & \alpha & -\beta & 1 & 0 & \\ & \beta & \alpha & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \alpha & -\beta & 1 & 0 \\ & & & & \beta & \alpha & 0 & 1 \\ & & & & & \alpha & -\beta & \\ & & & & & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

- Sie haben bestimmt bereits die "Regel" verstanden: statt λ

steht $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, statt 1

steht $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Eigenwerte von $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ sind komplexkonjugierte Zahlen $\alpha + i\beta$ und $\alpha - i\beta$.

Beweis vom Satz 8'

Endomorphismus zu A (früher f_A genannt) bezeichnen wir mit f .
Zuerst zerlegen wir V in Direktprodukt $V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$ sodass jeder V_m f -invariant ist, d.h., $\text{Bild}_f(V_m) \subseteq V_m$.

Die Vektorräume $V_1, \dots, V_p$ sind verallgemeinerte Vektorräume von reellen EW $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

Die weiteren Vektorräume $V_{p+1}, \dots$ sind wie folgt gegeben:
 $V_{p+1} = \text{Kern}((A - \mu_{p+1} \text{Id})^\gamma (A - \bar{\mu}_{p+1} \text{Id})^\gamma)$ u.s.w. (weiter schreibe ich μ für μ_{p+1}).

Dabei ist $\mu = \alpha + i\beta$ ein komplexe (sodass $\beta \neq 0$) EW von A , und $\gamma \in \mathbb{N}$ ist genügend groß.

- ▶ Die Matrix $(A - \mu Id)(A - \bar{\mu} Id)$ ist eine reelle Matrix, denn $(A - (\alpha - \beta i)Id)(A - (\alpha + \beta i)Id) = (A - \alpha Id)^2 - \beta^2 Id$.
- ▶ V_{p+1} ist dann die Lösungsmenge der reellen Gleichung $(A - \mu Id)^\gamma (A - \bar{\mu} Id)^\gamma x = \vec{0}$. Die Dimension der Lösung ist dann $n - \text{Rang}((A - \mu Id)^\gamma (A - \bar{\mu} Id)^\gamma)$.
- ▶ Man kann die Gleichung $(A - \mu Id)^\gamma (A - \bar{\mu} Id)^\gamma x = \vec{0}$ auch in $V_{\mathbb{C}}$ aufstellen.
 - ▶ Dimension der Lösungsmenge davon ist wieder $n - \text{Rang}((A - \mu Id)(A - \bar{\mu} Id))$, und Rang hängt nicht davon ab, ob wir die Matrix als eine reelle Matrix betrachten, oder als eine komplexe Matrix sodass die Komponenten reell sind.
 - ▶ Aus der Theorie von Jordannormalformen wissen wir aber, dass (über $\mathbb{C}$) die Dimension der Lösungsmenge der Gleichung $(A - \mu Id)^\gamma (A - \bar{\mu} Id)^\gamma = \vec{0}$ ist die Summe der Dimensionen von $\text{Kern}((A - \mu Id)^\gamma)$ und $\text{Kern}((A - \bar{\mu} Id)^\gamma)$. Wir wissen auch, dass in $V_{\mathbb{C}}$ die Lösungsmenge von $(A - \mu Id)^\gamma (A - \bar{\mu} Id)^\gamma x = \vec{0}$ die direkte Summe von veralg. Eigenräumen zu μ und zu $\bar{\mu}$ ist.
- ▶ V_{p+1} ist f -invariant: sei $v \in V_{p+1}$. Dann gilt: $(A - \mu Id)^\gamma (A - \bar{\mu} Id)^\gamma Av = A(A - \mu Id)^\gamma (A - \bar{\mu} Id)^\gamma v = A\vec{0} = \vec{0}$, und wir sehen dass Av wieder in V_{p+1} liegt.

Wir zeigen: $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$

Dazu betrachten wir die Summe

$W = V_1 + V_2 + \cdots + V_p + V_{p+1} + \cdots + V_k$. Die Summe ist direkt, weil $V_1, \dots, V_p$ Eigenräume (zu verschiedenen EW $\lambda_1, \dots, \lambda_p$) sind, und V_{p+1} und weitere Summanden sind (wenn wir sie komplexifiziert betrachten) Direktsummen $V_{\mu_{p+1}} \oplus V_{\bar{\mu}_{p+1}}$. Man bemerke, dass wenn die Summe von komplexifizierten Räumen direkt ist, dann auch die ursprüngliche Summe. In der Tat, wenn die Eindeutigkeitsbedingung in der Definition von Direktsumme über $\mathbb{C}$ erfüllt ist, dann ist sie auch über $\mathbb{R}$ erfüllt.

Die Dimension von W ist $n = \dim(V)$, weil die Summe von Dimensionen von veralg. Räumen gleich Dimension von gesamten Raum ist. Damit haben wir gezeigt, dass $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$. Deswegen existiert eine Basis sodass in der Basis die Matrix von f

blockdiagonal ist,
$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}.$$

Dabei gilt: die Blöcke $A_1, \dots, A_p$ haben die Eigenschaft $(A_m - \lambda_m Id)^{\gamma_m} = \mathbf{0}$ und die Blöcke $A_{p+1}, \dots, A_k$ haben die Eigenschaft $(A_m - \mu_m Id)^{\gamma_m} (A_m - \bar{\mu}_m Id)^{\gamma_m} = \mathbf{0}$.

Wir müssen also in jedem V_m eine Basis finden, sodass in der Basis der Block wie in Satz 8' ist. Für die ersten Räumen $V_1, \dots, V_p$ haben wir es bereits getan, im Bewies von Satz 8 (eigentlich in Zerlegungssatz 7). Auf der nächsten Folie beschäftigen wir uns mit Block V_{p+1} u.s.w.

Wir brauchen noch die folgende Aussage:

Hilfssatz. Sei $A \in \text{Mat}(n, n, \mathbb{R})$ und $V := v + iu \in \mathbb{C}^n$ (wobei $u, v \in \mathbb{R}^n$) ein Eigenvektor zum Eigenwert $\mu = \alpha + i \cdot \beta$. Dann ist auch $v - iu (= \bar{V}; \text{ "V konjugiert" })$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\bar{\mu} (= \alpha - i \cdot \beta)$.

Ferner gilt, falls die (komplexe) Vektoren $V_1 := v_1 + iu_1, \dots, V_k = v_k + iu_k$ mit $u_m, v_m \in \mathbb{R}^n$ die Eigenschaft: $(A - \mu Id)V_m = V_{m-1}$ haben (für $m > 1$) und $(A - \mu Id)V_1 = \vec{0}$, dann haben die komplexkonjugierte Vektoren $\bar{V}_1 = v_1 - iu_1, \dots, \bar{V}_k = v_k - iu_k$ die Eigenschaft: $(A - \bar{\mu} Id)\bar{V}_m = \bar{V}_{m-1}$ haben (für $m > 1$) und $(A - \bar{\mu} Id)\bar{V}_1 = \vec{0}, \dots$

Bemerkung. Den ersten Teil der Aussage haben wir in LA I bewiesen und bereits heute teilweise benutzt.

Beweis. Wir konjugieren für $m > 1$ die Gleichung $(A - \mu Id)V_m = V_{m-1}$:
Wir bekommen:

$$\bar{V}_{m-1} = \overline{AV_m - \mu V_m} \xrightarrow{\text{Rechenregeln; siehe LA I}} \bar{A}\bar{V}_m - \bar{\mu}\bar{V}_m \quad \text{Weil } A \stackrel{=}{=} \text{reell ist}$$

$\bar{A}\bar{V}_m - \bar{\mu}\bar{V}_m = (A - \bar{\mu} Id)\bar{V}_m$ wie behauptet.

Der Beweis dass die Eigenschaft $(A - \mu Id)V_1 = \vec{0}$, also die Eigenschaft dass V_1 ein EV zu μ ist, die Eigenschaft $(A - \bar{\mu} Id)\bar{V}_1 = \vec{0}$ impliziert, ist analog , □

Bemerkung. Die Bedingung $(A - \mu Id)V_m = V_{m-1}$ und $(A - \mu Id)V_1 = \vec{0}$ ist die Bedingung, die wir benutzt haben um die Basis im verallgemeinerten Eigenraum zu konstruieren sodass die Matrix der Beschränkung von f Jordanblockform hat.

Bemerkung. Ich betone noch einmal, dass die komplexe (=nichtreelle) EW in Paaren vorkommen: ist μ ein EW, so ist $\bar{\mu}$ auch. Das wissen wir aber seit LA I.

Wir betrachten jetzt einen Endomorphismus f mit der Eigenschaft $(f - \mu Id)^\gamma \circ (f - \bar{\mu} Id)^\gamma = \mathbf{0}$, also den ursprünglichen Endomorphismus f beschränkt auf V_{p+1} u.s.w., und konstruieren eine Basis sodass in der Basis die Matrix (also, der Block A_{p+1} u.s.w.) die Form wie im Satz 8' hat. Wir denken dass $V = \mathbb{R}^n$, dann ist $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$.

Wir betrachten den veralg. Eigenraum V_μ , und die Basis

$\left(\underbrace{b_1 + ia_1, \dots, b_{n/2} + ia_{n/2}}_{V_1} \right)$ sodass in der Basis die Beschränkung von f auf V_μ in Jordannormalform ist. Dass bedeutet, die Basisvektoren sind in "Gruppen" zerlegt,

$$\left(\underbrace{V_1^1, \dots, V_1^{k_1}}_{\text{Gruppe 1}}, \dots, \underbrace{V_\ell^1, \dots, V_\ell^{k_\ell}}_{\text{Gruppe } \ell} \right),$$

und in jeder Gruppe gilt: $V_m^{k_m}$ ist Eigenvektor zu μ und für $k > 1$ ist $(A - \mu Id)V_k = V_{k-1}$. Wir betrachten das "konjugierten" Tupel

$$\left(\underbrace{\bar{V}_1^1, \dots, \bar{V}_1^{k_1}}_{\text{Gruppe 1}}, \dots, \underbrace{\bar{V}_\ell^1, \dots, \bar{V}_\ell^{k_\ell}}_{\text{Gruppe } \ell} \right),$$

Wir betrachten das “konjugierten” Tupel

$$\left(\underbrace{\bar{V}_1^1, \dots, \bar{V}_1^{k_1}}_{\text{Gruppe 1}}, \dots, \underbrace{\bar{V}_\ell^1, \dots, \bar{V}_\ell^{k_\ell}}_{\text{Gruppe } \ell} \right),$$

Wir zeigen dass das Tupel eine Basis in $V_{\bar{\mu}}$ bildet .

- ▶ Die Vektoren des Tupels liegen in $V_{\bar{\mu}}$, weil $(A - \mu Id)^\gamma V = \vec{0}$ impliziert $(A - \bar{\mu} Id)^\gamma \bar{V} = \vec{0}$.
- ▶ Um Linearunabhängigkeit zu bekommen muss man die “Unabhängigkeitsgleichung” $\sum_s \xi_s \bar{V}_s = \vec{0}$ konjugieren. Man bekommt sofort die “Unabhängigkeitsgleichung” für die Vektoren V_s .
- ▶ Um zu zeigen, dass die Anzahl von Vektoren gleich Dimension des Raumes ist machen wir Widerspruchsbeweis: wenn die Anzahl kleiner ist, gibt es noch einen von diesen Vektoren linear unabhängigen Vektor $V' \in V_{\bar{\mu}}$. Der Vektor $\bar{V}'$ liegt dann in V_{μ} und ist von Vektoren in der Basis von V_{μ} auch linear unabhängig, was Widerspruch liefert.

Die Vektoren V_m^j seien gleich $b_m^j + ia_m^j$. Die Vektoren

$$(b_1^1, a_1^1, b_1^2, \dots, a_\ell^{k_\ell})$$

Bilden eine Basis und die Matrix von f in dieser Basis ist wie in Satz 8' angekündigt. Dieser Teil vom Beweis lasse ich als eine Übung für Sie; sie müssen die Bedingung benutzen, dass

$$(A - (\alpha + i\beta)Id)V_m = V_{m+1} \quad \text{oder} = \vec{0}$$

um zu zeigen, dass man die V -Vektoren erzeugen kann. Weil die Anzahl von Vektoren gleich Dimension des Raumes ist, ist es dann eine Basis. Dann muss man überlegen, was Bild von Vektoren b_m und a_m ist und dann die Matrix konstruieren.