Kann man die Bilinearformen und eventuell das Skalarprodukt komplexifizieren?

Zwischenfrage: Was sollte man dazu verlangen? Beim Komplexifizieren von Endomorphismen haben wir verlangt, dass

1. $\phi_{\mathbb{C}}$ mit ϕ auf Vektoren der Form $u + i\vec{0}$ übereinstimmt und dass
2. $\phi_{\mathbb{C}}$ ein Endomorphismus ist.

Wenn wir analog vorgehen, sollten wir auch beim Komplexifizieren einer Bilinearform verlangen, dass (für eine Bilinearform σ auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum V)

1. $\sigma_{\mathbb{C}}$ mit σ auf Vektoren der Form $u + i\vec{0}$ übereinstimmt und dass
2. $\sigma_{\mathbb{C}}$ eine Bilinearform ist.

1. $\sigma_{\mathbb{C}}$ mit σ auf Vektoren der Form $u + i\vec{0}$ übereinstimmt und dass
2. $\sigma_{\mathbb{C}}$ eine Bilinearform ist.

Das ist ein sinnvoller Vorschlag. Der Nachteil davon ist, dass die positive Definitheit für Bilinearformen über $\mathbb{C}$ sinnlos ist (wird gleich erklärt) und man deswegen ein Skalarprodukt (und das ist die „nützliche" Bilinearform) nicht unter Verlangen von (1), (2) so komplexifizieren kann, dass die positive Definitheit erfüllt ist.

Warum gibt es keine positivdefinite Bilinearform auf einem nichttrivialen $\mathbb{C}$-Vektorraum? Weil für ein $v \neq \vec{0}$ und $\forall c \neq 0$ gilt: $\langle v, v \rangle > 0$ und $\langle cv, cv \rangle > 0$. Wenn wir über $\mathbb{C}$ arbeiten und $c = i$ nehmen, bekommen wir (für jeden $v \neq \vec{0}$) $\langle v, v \rangle > 0$ und $i^2 \langle v, v \rangle = -\langle v, v \rangle > 0$, was einander widerspricht.

Komplexifizieren von Bilinearformen unter Verlangen von (1), (2)

1. $\sigma_{\mathbb{C}}$ mit σ auf Vektoren der Form $u + i\vec{0}$ übereinstimmt und dass
2. $\sigma_{\mathbb{C}}$ eine Bilinearform ist.

Sei σ eine Bilinearform auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Wir denken uns, dass V endlichdimensional ist, obwohl die Aussagen für alle Vektorräume gelten: Wir werden die Beweise am Ende des Semesters nachliefern.
Wir definieren $\sigma_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ durch

$$\sigma_{\mathbb{C}}(u + iv, \tilde{u} + i\tilde{v}) = \sigma(u, \tilde{u}) - \sigma(v, \tilde{v}) + i(\sigma(u, \tilde{v}) + \sigma(v, \tilde{u})).$$

(Vergleichen Sie diese Formel mit

$$(\alpha + i\beta) \cdot (\tilde{\alpha} + i\tilde{\beta}) = (\alpha \cdot \tilde{\alpha} - \beta \cdot \tilde{\beta}) + i(\alpha \cdot \tilde{\beta} + \beta \cdot \tilde{\alpha}).)$$

$$\boxed{\sigma_{\mathbb{C}}(u + iv, \tilde{u} + i\tilde{v}) = \sigma(u, \tilde{u}) - \sigma(v, \tilde{v}) + i(\sigma(u, \tilde{v}) + \sigma(v, \tilde{u})).}$$

Es ist eine gute Übung zu zeigen, ähnlich wie wir das im Abschnitt "Komplexifizieren von Endomorphismen" getan haben, dass die so definierte Abbildung eine Bilinearform ist. Es ist auch offensichtlich, dass (1) erfüllt ist:
$\sigma_{\mathbb{C}}(u+i\vec{0}, \tilde{u}+i\vec{0}) = \sigma(u, \tilde{u}) - \sigma(\vec{0}, \vec{0}) + i(\sigma(u, \vec{0}) + \sigma(v, \vec{0})) = \sigma(u, \tilde{u})$.

Wir haben vorher gesehen, dass für eine Basis $(b_1, ..., b_n)$ in V das Tupel $(b_1 + i\vec{0}, ..., b_n + i\vec{0})$ eine Basis in $V_\mathbb{C}$ ist.
Die Gramsche Matrix der Bilinearform $\sigma_\mathbb{C}$ in dieser Basis ist gleich der Gramschen Matrix von σ in der Basis $(b_1, ..., b_n)$, weil die Komponenten der Gramschen Matrix durch die Formel

$$a_{ij} = \sigma(b_i, b_j)$$

gegeben sind und diese Formel für $\sigma_\mathbb{C}$ und für die Basis $(b_1 + i\vec{0}, ..., b_n + i\vec{0})$ wie folgt aussieht:

$$a_{ij} = \sigma(b_i + i\vec{0}, b_j + i\vec{0}) = \sigma(b_i, b_j).$$

Daraus folgt auch, dass die Bilinearform $\sigma_\mathbb{C}$, die die Eigenschaften (1) und (2) hat, eindeutig ist.

Was, wenn wir unbedingt positive Definitheit wollen? Hermitesche Formen

Def. Eine hermitesche Form auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum U ist eine Abbildung $\sigma : U \times U \to \mathbb{C}$, die die folgenden Eigenschaften (für alle $u, v, u', v' \in U$ und $\alpha + i\beta, \alpha' + i\beta' \in \mathbb{C}$) hat:

(a) Linearität bzgl. 2. Argument:

$$\sigma(u, (\alpha + i\beta)v + (\alpha' + i\beta')v') = (\alpha + i\beta)\sigma(u, v) + (\alpha' + i\beta')\sigma(u, v').$$

(b) "Antilinearität" bzgl. 1. Argument:

$$\sigma((\alpha + i\beta)u + (\alpha' + i\beta')u', v) = \underbrace{(\alpha - i\beta)}_{\overline{\alpha + i\beta}}\sigma(u, v) + \underbrace{(\alpha' - i\beta')}_{\overline{\alpha' + i\beta'}}\sigma(u', v).$$

(c) $\sigma(x, y) = \overline{\sigma(y, x)}$ ("Hermitesche Symmetrie").

Dabei bezeichnet "$\overline{}$" die komplexe Konjugation.

Bemerkung. Für die Reihenfolge von linearem und antilinearem Argument gibt es unterschiedliche Konventionen.

Def. Eine hermitesche Form auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum U ist eine Abbildung $\sigma : U \times U \to \mathbb{C}$, die die folgenden Eigenschaften (für alle $u, v, u', v' \in U$ und $\alpha + i\beta, \alpha' + i\beta' \in \mathbb{C}$) hat:

(a) Linearität bzgl. 2. Argument:

$$\sigma(u, (\alpha + i\beta)v + (\alpha' + i\beta')v') = (\alpha + i\beta)\sigma(u, v) + (\alpha' + i\beta')\sigma(u, v').$$

(b) "Antilinearität" bzgl. 1. Argument:

$$\sigma((\alpha + i\beta)u + (\alpha' + i\beta')u', v) = \underbrace{(\alpha - i\beta)}_{\overline{\alpha+i\beta}}\sigma(u, v) + \underbrace{(\alpha' - i\beta')}_{\overline{\alpha'+i\beta'}}\sigma(u', v).$$

(c) $\sigma(x, y) = \overline{\sigma(y, x)}$ ("Hermitesche Symmetrie").

Bsp. Hermitesche Standardform auf $\mathbb{C}^n$: Für $x, y \in \mathbb{C}^n$ definiert man $\sigma(x, y) = \langle x, y\rangle = \sum \bar{x}_i y_i = \bar{x}_1 y_1 + ... + \bar{x}_n y_n$.

Hauptbsp. Wir betrachten eine $n \times n$-Matrix $A \in Mat(n, n, \mathbb{C})$ mit $A^t = \overline{A}$ und definieren eine hermitesche Form auf $\mathbb{C}^n$:

$$\sigma(x, y) = \underbrace{(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)}_{\bar{x}^t} Ay = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_i y_j.$$

Eigenschaften (a), (b), (c) sind einfache Übungen (siehe Vorl. 18 LA I).

Positive Definitheit

Def. Eine hermitesche Form σ auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist positiv definit, wenn für jedes $v \in V$ mit $v \neq \vec{0}$ gilt: $\sigma(v, v) > 0$.

Bsp. Wir betrachten die hermitesche Standardform auf $\mathbb{C}^n$:
$\sigma(x, y) = \langle x, y \rangle = \sum \bar{x}_i y_i = \bar{x}_1 y_1 + ... + \bar{x}_n y_n$. Sie ist positiv definit, da $\sigma(x, x) = \bar{x}_1 x_1 + ... + \bar{x}_n x_n$ und $\bar{x}_i x_i \geq 0$ sowie > 0 für $x_i \neq 0$.

Fakt (wird nicht bewiesen). Jede positiv definite hermitesche Form (auf einem endlichdimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum) ist die hermitesche Standardform in einer geeigneten Basis.

Man kann eine Bilinearform σ von einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V auf $V_{\mathbb{C}}$ wie folgt fortsetzen: Man setze

$$\sigma_{\mathbb{C}}(u + iv, u' + iv') = (\sigma(u, u') + \sigma(v, v')) + i(-\sigma(v, u') + \sigma(u, v')).$$

(Vergleichen Sie diese Formel mit

$$\overline{(\alpha + i\beta)} \cdot (\alpha' + i\beta') = (\alpha \cdot \alpha' + \beta \cdot \beta') + i(-\beta \cdot \alpha' + \alpha \cdot \beta').)$$

Man kann zeigen, dass $\sigma_{\mathbb{C}}$ hermitesch ist und dass, wenn σ positiv definit ist, auch $\sigma_{\mathbb{C}}$ positiv definit ist.