Teilverhältnis

Wir arbeiten in $\mathbb{K}^n$. Man kann alles in der Sprache eines beliebigen affinen Raums formulieren (dabei muss man zum Beispiel $b - a$ durch den Vektor $\vec{ab}$ ersetzen usw.). Nach dem Hauptsatz der affinen Geometrie ändert dies nichts, solange die Dimension endlich ist. Der Vorteil der allgemeineren Formulierung besteht darin, dass die Aussagen auch für unendlichdimensionale Räume gelten.

Def. Ist (a, b, c) ein kollineares Punktetripel ("kollinear" bedeutet, dass die Punkte auf einer Geraden liegen) und $a \neq b$, so heißt der durch die Gleichung $c - a = \lambda(b - a)$ eindeutig bestimmte Skalar λ das Teilverhältnis des kollinearen Punktetripels (a, b, c), bezeichnet durch $TV(a, b, c)$.

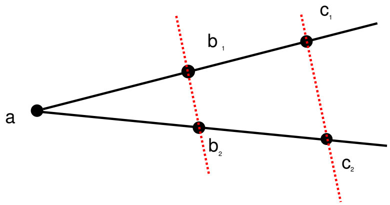
Def. Ist (a, b, c) ein kollineares Punktetripel ("kollinear" bedeutet, dass die Punkte auf einer Geraden liegen) und $a \neq b$, so heißt der durch die Gleichung $c - a = \lambda(b - a)$ eindeutig bestimmte Skalar λ das Teilverhältnis des kollinearen Punktetripels (a, b, c), bezeichnet durch $TV(a, b, c)$.

Eine äquivalente Definition ist wie folgt: Die Punkte a, b, c liegen auf einer Geraden und $a \neq b$. Dann ist das Paar (a, b) ein Koordinatensystem auf der Geraden (betrachtet als ein affiner Raum der Dimension 1). Dann ist die Koordinate des Punktes c das Teilverhältnis $TV(a, b, c)$.

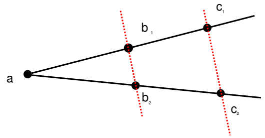
Eine "altmodische", aber oft in der Elementargeometrie verwendete Bezeichnung für das Teilverhältnis ist $TV(A, B, C) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}}$. Diese Bezeichnung ist tatsächlich gut für mnemonische Zwecke: Damit ein Bruch, in dem Zähler und Nenner Vektoren sind, sinnvoll ist, müssen die Vektoren proportional sein – und deswegen die Punkte A, B, C kollinear. Damit der Nenner $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ ist, muss $A \neq B$ sein. Jetzt kann man die Formel $\lambda = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}}$ "umformen" zu $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$, und das ist die Formel aus der Definition des Teilverhältnisses.

Exkurs: Strahlensatz

Satz 16 (Strahlensatz) *Seien (a, b_1, c_1) und (a, b_2, c_2) kollineare Punktetripel auf verschiedenen Geraden durch $a \notin \{b_1, b_2, c_1, c_2\}$. Dann sind die Geraden $\mathcal{G}_{b_1,b_2}$ und $\mathcal{G}_{c_1,c_2}$ genau dann parallel, wenn $TV(a, b_1, c_1) = TV(a, b_2, c_2)$.*



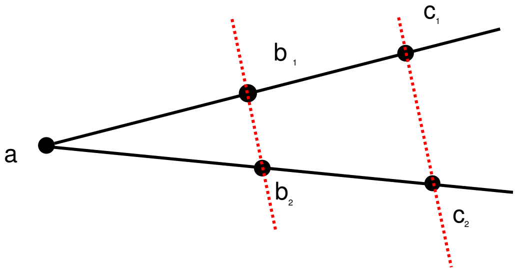
Satz 16 (Strahlensatz) *Seien (a, b_1, c_1) und (a, b_2, c_2) kollineare Punktetripel auf verschiedenen Geraden durch $a \notin \{b_1, b_2, c_1, c_2\}$. Dann sind die Geraden $\mathcal{G}_{b_1,b_2}$ und $\mathcal{G}_{c_1,c_2}$ genau dann parallel, wenn $TV(a, b_1, c_1) = TV(a, b_2, c_2)$.*



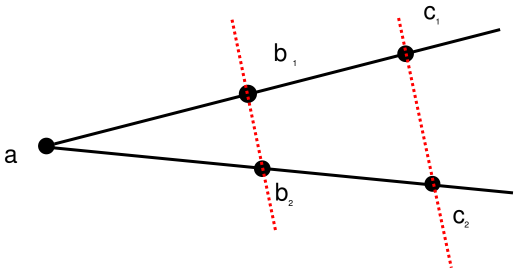
Bemerkung. Wenn (a, b_1, c_1) und (a, b_2, c_2) kollineare Punktetripel auf verschiedenen Geraden durch $a \notin \{b_1, b_2, c_1, c_2\}$, und Geraden $\mathcal{G}_{b_1,b_2}$ und $\mathcal{G}_{c_1,c_2}$, dann gilt auch $TV(a, b_1, c_1)(b_2 - b_1) = (c_2 - c_1)$. Das folgt sofort aus der Aussage des Strahlensatzes:

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 = (c_1 - a) - (c_2 - a) &\overset{\text{def von TV und Satz 16}}{=} \underbrace{TV(a, b_1, c_1)}_{TV(a,b_2,c_2)}(b_1 - a - (b_2 - a)) \\ &= \underbrace{TV(a, b_1, c_1)}_{=TV(a,b_2,c_2)}(b_1 - b_2). \end{aligned}$$

Außerdem, wenn $TV(a, b_1, c_1)(b_2 - b_1) = (c_2 - c_1)$, dann sind die Geraden $\mathcal{G}_{b_1,b_2}$ und $\mathcal{G}_{c_1,c_2}$ parallel, sodass aus der Aussage $TV(a, b_1, c_1)(b_2 - b_1) = (c_2 - c_1)$ die Gleichung $TV(a, b_1, c_1) = TV(a, b_2, c_2)$ folgt.



Beweis. Nach Def. gilt $\begin{array}{lcl} TV(a,b_1,c_1)=\lambda & \iff & c_1-a=\lambda(b_1-a) \\ TV(a,b_2,c_2)=\mu & \iff & c_2-a=\mu(b_2-a) \end{array}$
Nach Def. sind die Geraden $\mathcal{G}_{b_1,b_2}$ und $\mathcal{G}_{c_1,c_2}$ parallel genau dann, wenn c_2-c_1 und b_2-b_1 linear abhängig sind. Aus $c_1-a+(c_2-c_1)=c_2-a$ folgt $c_2-c_1=c_2-a-(c_1-a)=\mu(b_2-a)-\lambda(b_1-a)$ und ebenso $b_2-b_1=(b_2-a)-(b_1-a)$. Dann
$\alpha(c_2-c_1)+\beta(b_2-b_1)=\vec{0} \iff$
$\alpha(\mu(b_2-a)-\lambda(b_1-a))+\beta((b_2-a)-(b_1-a))=$
$(\alpha\mu+\beta)(b_2-a)-(\alpha\lambda+\beta)(b_1-a)=\vec{0}$. Da die Vektoren b_2-a und b_1-a linear unabhängig sind, ist dies äquivalent zu dem linearen Gleichungssystem $\left\{\begin{array}{l}\alpha\mu+\beta=0\\ \alpha\lambda+\beta=0\end{array}\right.$ für die Unbekannten α,β.



Das System $\left\{ \begin{array}{l} \alpha\mu + \beta = 0 \\ \alpha\lambda + \beta = 0 \end{array} \right.$ in Matrix-Form:

$$\begin{pmatrix} \mu & 1 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Falls $\lambda \neq \mu$, ist die Matrix nicht ausgeartet, weil
$det \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = (\mu - \lambda) \neq 0.$
Also gibt es, falls $\lambda \neq \mu$, nur die triviale Lösung, was bedeutet, dass $c_2 - c_1$ und $b_2 - b_1$ linear unabhängig sind und die Geraden $\mathcal{G}_{b_1,b_2}$ und $\mathcal{G}_{c_1,c_2}$ deswegen nicht parallel sind. Falls $\lambda = \mu$ ist, gibt es auch nichttriviale Lösungen, z.B. $\alpha = -1, \ \beta = \mu$. Deswegen sind $c_2 - c_1$ und $b_2 - b_1$ dann linear abhängigund die Geraden parallel. $\square$

Hilfslemma 5. Es existiert eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $v \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $G(\lambda v) = f(\lambda)G(v)$.

Beweis. Wegen $G(\vec{0}) = \vec{0}$ ist die Gleichung für $v = \vec{0}$ stets (für alle Funktionen $f(\lambda)$) erfüllt, und sie ist für $\lambda = 0$ und alle $v \in \mathbb{R}^n$ erfüllt, wenn wir $f(0) = 0$ setzen. Wir werden von jetzt an $v \neq \vec{0}$ und $\lambda \neq 0$ annehmen.

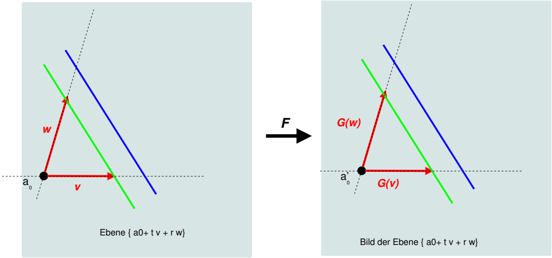
Da F injektiv ist, gilt $F(a_0 + v) = a_0' + G(v) \neq a_0'$. Nach Voraussetzung liegt $F(a_0 + \lambda v)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ auf der Geraden $L(a_0', a_0' + G(v)) := \{a_0' + t \cdot G(v) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Also existiert (genau ein) $f(\lambda, v) \in \mathbb{R}$, sodass $F(a_0 + \lambda v) = a_0' + f(\lambda, v)G(v)$ gilt.

Wir bemerken, dass $TV(a_0', F(a_0 + \lambda v), F(a_0 + v)) = \frac{1}{f(\lambda,v)}$ gilt. Um Hilfslemma 5 zu beweisen, müssen wir zeigen, dass $f(\lambda, v)$ unabhängig von v ist, d.h., dass für alle $\lambda \neq 0, v \neq \vec{0}, w \neq \vec{0}$ gilt:

$$f(\lambda, v) = f(\lambda, w).$$

1. Fall: v und w sind linear unabhängig.

Dann betrachten wir die Geraden $H := \{a_0 + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ und $J := \{a_0 + tw \mid t \in \mathbb{R}\}$ durch a_0



und die Geraden $L_1 := L(a_0 + v, a_0 + w)$, $L_2 := L(a_0 + \lambda v, a_0 + \lambda w)$, die parallel sind, weil die Vektoren $a_0 + w - (a_0 + v) = w - v$ und $a_0 + \lambda w - (a_0 + \lambda v) = \lambda(w - v)$ gleiche Untervektorräume erzeugen. Nach HL 2 sind dann $Bild_F(L_1)$ und $Bild_F(L_2)$ auch parallel. Die andere Richtung des Strahlensatzes impliziert nun, dass

$$TV(a_0', F(a_0 + \lambda v), F(a_0 + v)) = TV(a_0', F(a_0 + \lambda w), F(a_0 + w))$$

gilt. Daraus folgt $\frac{1}{f(\lambda,v)} = \frac{1}{f(\lambda,w)}$. Dann gilt $f(\lambda, v) = f(\lambda, w)$.

2. Fall: $w = \mu v$.

In diesem Fall wählen wir ein von v linear unabhängiges $z \in \mathbb{R}^n$.
Dann gilt mit zweifacher Anwendung des 1. Falls:
$f(\lambda, v) = f(\lambda, z) = f(\lambda, w)$.

Hilfslemma 5 ist bewiesen.

Folgerung. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist ein Körperautomorphismus, d.h. es gilt

(i) $f(1) = 1$ und für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

(ii) $f(\lambda) + f(\mu) = f(\lambda + \mu)$,

(iii) $f(\lambda \cdot \mu) = f(\lambda) \cdot f(\mu)$.

Beweis. Wähle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Da F injektiv ist, folgt $G(v) = F(a_0 + v) - F(a_0) \neq 0$.

(i) $G(v) = G(1 \cdot v) = f(1) \cdot G(v) \Longrightarrow (f(1) - 1)G(v) = \vec{0} \Longrightarrow f(1) = 1$.

(ii) $G((\lambda + \mu)v) = f(\lambda + \mu)G(v)$
$G((\lambda + \mu)v) = G(\lambda v + \mu v) \overset{HL\ 4}{=} G(\lambda v) + G(\mu v) = (f(\lambda) + f(\mu))G(v)$.
Diese Gleichungen beweisen $f(\lambda + \mu) = f(\lambda) + f(\mu)$.

(iii) $G((\lambda\mu)v) = f(\lambda\mu)G(v)$
$G((\lambda\mu)v) = G(\lambda(\mu v)) = f(\lambda)G(\mu v) = f(\lambda)f(\mu)G(v)$.
Diese Gleichungen beweisen $f(\lambda \cdot \mu) = f(\lambda) \cdot f(\mu)$, $\square$

Bisher wurde noch nicht benutzt, daß wir über dem Körper $\mathbb{R}$ arbeiten. (Wir haben nur benutzt, dass $1 + 1 \neq 0$ ist, weil wir den Satz 16 benutzt haben.)
Das folgende Hilfslemma aber wäre etwa für den Körper $\mathbb{C}$ (statt $\mathbb{R}$) nicht wahr.

Hilfslemma 6. Die Identität $f = Id$ ist der einzige Körperautomorphismus von $\mathbb{R}$.

In $\mathbb{C}$ ist die Aussage des Hilfslemmas 6 falsch: Die Abbildung „konjugieren“: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $a + i \cdot b \mapsto a - i \cdot b$ ist ein nichtrivialer Körperautomorphismus von $\mathbb{C}$.

Hilfslemma 6. Die Identität $f = Id$ ist der einzige Körperautomorphismus von $\mathbb{R}$.

Beweis. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Körperautomorphismus. Die Additivität von f und $f(1) = 1$ zeigen, daß $f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 1 + 1 = 2$ und – induktiv – daß $f(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Aus $f(0) + f(0) = f(0+0) = f(0)$ folgt $f(0) = 0$ und aus $f(n + (-n)) = 0 = f(n) + f(-n) = n + f(-n)$ für $n \in \mathbb{N}$ folgt $f(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Ist $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, so gilt

$$1 = f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = f(n)f\left(\frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right) \Longrightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

Verwenden wir nochmals die Multiplikativität von f, so erhalten wir $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}$ für alle $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Weiter gilt $Bild_f(\mathbb{R}_{\geq 0}) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$, denn aus $r \geq 0$ folgt $f(r) = f(\sqrt{r}^2) = f(\sqrt{r})^2 \geq 0$.
Zusammen mit der Additivität von f, ergibt das $r \geq s \Longrightarrow f(r) \geq f(s)$, d.h. f ist monoton wachsend. Ist schließlich $r \in \mathbb{R}$ beliebig, so wählen wir $x_i, y_i \in \mathbb{Q}$ mit $\lim x_i = r = \lim y_i$ und $x_i < r < y_i$. Dann folgt $f(r) = r$ aus $x_i = f(x_i) \leq f(r) \leq f(y_i) = y_i$ und $\lim x_i = r = \lim y_i$. $\square$

Zusammenfassung des Beweises des Satzes 15

Satz 15 (Fundamentalsatz der affinen Geometrie über $\mathbb{R}$) Sei $F : \mathbb{R}^{n \geq 2} \to \mathbb{R}^n$ eine Bijektion, welche Geraden auf Geraden abbildet. Dann ist F eine Affinität.

Wir wählen einen festen Punkt $a_0 \in \mathbb{R}^n$, setzen $a_0' := F(a_0) \in \mathbb{R}^n$ und definieren $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ folgendermaßen: Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gelte

$$F(a_0 + v) = a_0' + G(v)$$

Wir haben gezeigt, dass G eine lineare Abbildung ist:
HL 3,4: $G(v + w) = G(v) + G(w)$.
HL 5: $G(\lambda v) = f(\lambda)G(v)$, wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Körperautomorphismus ist.
HL 6: f ist Identität (d.h. $G(\lambda v) = \lambda G(v)$).
Dann ist G linearund deswegen ist F eine Affinität. $\square$

Unterkapitel: Isometrien des Euklidschen Raums sind Affinitäten

(Wir definieren zuerst die Begriffen “Isometrien” und “Euklidsche Räume”).

Wiederholung: Skalarprodukt

Def. Ein Skalarprodukt auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V ist eine symmetrische positiv definite Bilinearform.

Dies selbe Definition–ausführlicher. Es seien $(V, +, \cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, u, u', u'', v, v', v'' beliebige Vektoren aus V und $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{R}$ beliebige Skalare. Ein Skalarprodukt auf V ist eine Abbildung $\sigma : V \times V \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

(Bilinearität) $\sigma(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = \lambda' \sigma(u', v) + \lambda'' \sigma(u'', v)$, $\sigma(u, \lambda' v' + \lambda'' v'') = \lambda' \sigma(u, v') + \lambda'' \sigma(u, v'')$.

(Symmetrie) $\forall u, v \in V$ gilt $\sigma(u, v) = \sigma(v, u)$.

(Positive Definitheit) $\sigma(u, u) > 0$ für $u \neq \vec{0}$.

Bsp. Das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$,

$\sigma(x, y) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n = (x_1 \; ... \; x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, ist ein Skalarprodukt.

Fakt (Satz 35 LA I). Es gibt ein Koordinatensystem in welchem das Skalarprodukt das Standard-Skalarprodukt ist.

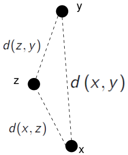
Euklidsche Räume

Def. Ein affiner Vektorraum $\mathcal{A}$ über einem Vektorraum mit Skalarprodukt heißt ein Euklidscher Raum.

Bsp. (Standard) Euklidischer Raum: $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$: $\mathcal{A} = \mathbb{R}^n$; $V = \mathbb{R}^n$; $\langle \ , \ \rangle$ $=$ Standard-Skalarprodukt.

Metrische Räume

Def. Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt eine Metrik, wenn $\forall x, y, z \in X$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:



(Definitheit) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(Symmetrie) $d(x, y) = d(y, x)$,

(Dreiecksungleichung) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Die Nicht-Negativität $d(x, y) \geq 0$ haben wir nicht als zusätzliche Eigenschaft angegeben. Da sie aus den anderen Bedingungen folgt, ist sie überflüssig:

$$2d(x, y) = d(x, y) + d(x, y) \overset{\text{(Symmetrie)}}{=} d(x, y) + d(y, x) \overset{\text{(Dreiecksungleichung)}}{\geq} d(x, x) \overset{\text{(Definitheit)}}{=} 0$$

$\Rightarrow d(x, y) \geq 0.$

Def. Das Paar (X, d) heißt ein metrischer Raum.

Euklidischer Raum als metrischer Raum

Def – Wiederholung. Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt eine Metrik, wenn $\forall x, y, z \in X$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(Definitheit) $d\,(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(Symmetrie) $d\,(x, y) = d(y, x)$,

(Dreiecksungleichung) $d\,(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Def. Das Paar (X, d) heißt ein metrischer Raum.

Bsp. Im Euklidischen Raum $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ ist die oben definierte Abstandsfunktion $d(x, y) = |xy| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$ eine Metrik:

Definitheit folgt aus positiver Definitheit des Skalarprodukts und wurde oben besprochen.

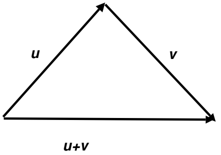
Symmetrie folgt aus der Definition und wurde ebenfalls oben besprochen.

Beweis der Dreiecksungleichung noch eine Aussage aus LA I ((Cauchy-Schwarz) Lemma 32)

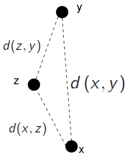
Cauchy-Schwarz Lemma und Dreiecksungleichung

Cauchy-Schwarz-Ungleichung (LA I, Lemma 32) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle $u, v \in \mathbb{R}^n$). Ferner gilt: $\langle u, v\rangle = |u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren proportional sind mit nicht-negativem Koeffizienten und $\langle u, v\rangle = -|u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren proportional sind mit nicht-positivem Koeffizienten.

Folgerung (Dreiecksungleichung). Für alle $u, v \in \mathbb{R}^n$ gilt: $|u+v| \leq |u| + |v|$. Ferner gilt: Ist $|u+v| = |u| + |v|$, dann sind die Vektoren proportional, mit einem nichtnegativem Koeffizienten.



Bemerkung. Daraus folgt sofort die Dreiecksungleichung für die euklidische Abstandsfunktion:
$\underbrace{d\,(x,y)}_{|x-y|} \leq \underbrace{d(x,z)}_{|x-z|} + \underbrace{d(z,y)}_{|z-y|}$, da $x - y = (x-z) + (z-y)$.



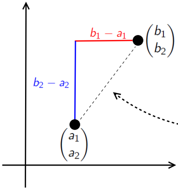
Beweis. $(|u+v|)^2 = \langle u+v, u+v\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} |u|^2 + 2\langle u, v\rangle + |v|^2$

$(|u| + |v|)^2 \qquad = \qquad |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2.$

Da nach Cauchy-Schwarz $\langle u, v\rangle \leq |u||v|$, ist $(|u+v|)^2 \leq (|u| + |v|)^2$ und deswegen $|u+v| \leq |u| + |v|$. $\square$

Bezug zur Schulgeometrie: Diese Definition ist im Wesentlichen der Satz des Pythagoras:

Wir betrachten die Punkte $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.



Die Länge ist $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

Wir betrachten das rechtwinklige Dreieck auf dem Bild: die Katheten sind parallel zu den Achsen, und die Hypotenuse ist die Strecke, die $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$und $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ verbindet.

Die Katheten haben die Längen $|\ b_1 - a_1\ |$ und $|\ b_2 - a_2\ |$.

Damit ist die Länge der Hypotenuse $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$, also gleich dem Abstand zwischen $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ nach unserer Definition.

Eine Abbildung $I : X \to X$, welche die Metrik erhält, d.h. $d(I(x), I(y)) = d(x, y)$, heißt Isometrie (wenn ich von Isometrien des $\mathbb{R}^2$ und des $\mathbb{R}^3$ spreche, werde ich auch die Bezeichnungen Bewegung oder Kongruenz benutzen).

Die Menge $Iso(X, d) := \{\text{alle bijektiven Isometrien von } X\}$ heißt die Isometriegruppe von (X, d).

Die Isometriegruppe ist tatsächlich eine Gruppe im Sinne der Algebra. Das bedeutet, dass die Menge

$Iso(X, d) := \{\text{alle bijektiven Isometrien von } X\}$ bezüglich der Operation "Verknüpfung von zwei Abbildungen" die Gruppenaxiome erfüllt. Insgesamt gibt es drei Gruppenaxiome:

(G1): $a(bc) = (ab)c$ (für alle $a, b, c \in G$) Assoziativität

(G2): Es gibt ein $e \in G$ mit $ea = a$ (für alle $a \in G$). Existenz eines neutralen Elements

(G3): Für jedes $a \in G$ gibt es ein $b \in G$ mit $ba = e$. Existenz inverser Elemente

Warum ist die Operation der Verkettung von Abbildungen auf $Iso(X, d)$ wohldefiniert?

Wir müssen zeigen, dass die Verkettung von zwei bijektiven Isometrien auch eine bijektive Isometrie ist.
In der Tat, die Verkettung von bijektiven Abbildungen ist immer eine bijektive Abbildung. Also muss man nur zeigen, dass $d(f \circ g(x), f \circ g(y)) = d(x, y)$ ist. Nach Definition der Verkettung, gilt $f \circ g(x) = f(g(x))$ und $f \circ g(y) = f(g(y))$. Da f eine Isometrie ist, erhalten wir $d(f(\underbrace{g(x)}_{x'}), f(\underbrace{g(y)}_{y'})) = d(g(x), g(y)) \overset{\text{weil } g \text{ Isometrie}}{=} d(x, y)$.

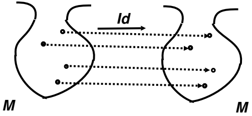
Damit ist $f \circ g$ wie gewünscht eine Isometrie.

Warum ist die Menge $Iso(X,d)$ eine Gruppe bzgl. der Operation der Verkettung von Abbildungen?

(G1): $a(bc) = (ab)c$ (für alle $a, b, c \in G$) Assoziativität (G2): Es gibt $e \in G$ mit $ea = a$. (für alle $a \in G$) Existenz eines neutralen Elements (G3): Für jedes $a \in G$ gibt es ein $b \in G$ mit $ba = e$. Existenz inverser Elemente

Das Axiom $(G1)$ ist für die Operation "Verknüpfung von Abbildungen" immer erfüllt.

Bezüglich $(G2)$: das neutrale Element ist die Identitätsabbildung $Id : X \to X$, $Id(x) = x$; sie ist offensichtlich eine bijektive Isometrie.



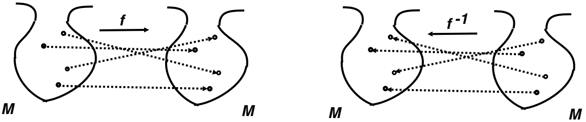
Also muss man hier nur die Existenz des inversen Elements zeigen.

Existenz des inversen Elements zu einem $f \in Iso(X, d)$.

Wiederholung. $Iso(X, d) := \{\text{alle bijektiven Isometrien von } X\}$

Als inverses Element zu $f \in Iso(X, d)$ schlage ich vor, die inverse Bijektion $f^{-1} : X \to X$ zu nehmen. Sie ist definiert durch

$$f^{-1}(x) = y \quad \text{falls } f(y) = x. \qquad (*)$$



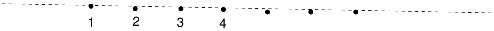
Die Regel $(*)$ liefert tatsächlich eine wohldefinierte Abbildung: Da f eine Bijektion ist, ist f surjektiv, und jedes x kann man als Bild eines Elements y darstellen. Damit ist die Regel $(*)$ für alle x definiert.
Da f bijektiv ist, ist f injektiv, und deswegen ist das y mit $f(y) = x$ eindeutig. Da f eine Bijektion ist, ist f^{-1} auch eine Bijektion.
Um zu zeigen, dass f^{-1} eine Isometrie ist, müssen wir zeigen, dass $d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) = d(x, y)$. Nach Definition sind $f^{-1}(x) = x'$ mit $f(x') = x$ und $f^{-1}(y) = y'$ mit $f(y') = y$. Dann ist $d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) = d(x', y') \stackrel{\text{weil } f \text{ Isometrie}}{=} d(f(x'), f(y')) = d(x, y)$ wie gewünscht.

Diskussion des Wortes “bijektiv” in der Definition von $Iso(X, d)$

Wiederholung. $Iso(X, d) := \{\text{alle bijektiven Isometrien von } X\}$

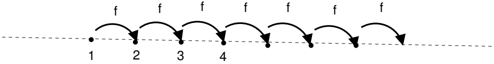
Wenn wir das Wort “bijektiven” weglassen, ist $Iso(X, d)$ nicht immer eine Gruppe:

Bsp. $X = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ und $d(k, m) := |k - m|$. Die Axiome des metrischen Raums sind einfach nachzuweisen.



Die Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeben durch $f(k) = k + 1$ ist eine Isometrie, da

$d(f(k), f(m)) = d(k+1, m+1) = |k+1-(m+1)| = |k-m| = d(k, m).$



Die Abbildung ist aber nicht bijektiv, weil sie nicht surjektiv ist: Es gibt kein $y \in \mathbb{N}$ s.d. $f(y) = y + 1 = 1$.

Wir werden aber hauptsächlich über $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ sprechen. In diesem Fall ist jede Isometrie automatisch eine Bijektion.

Die Gruppe $Iso(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$

Satz 17 *Jede Isometrie I von $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ hat die Form*

$I(x) = Ox + b$, *wobei O eine orthogonale $n \times n$-Matrix ist, und $b \in \mathbb{R}^n$.*

Ich werde zuerst die Definition und die Eigenschaften von orthogonalen Matrizen wiederholen.

Was ist eine orthogonale Matrix?

Def. (LA I) Eine $n \times n$ Matrix $O \in Mat(n, n, \mathbb{R})$ ist orthogonal, wenn $OO^t = Id$, wobei Id die Einheitsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ und O^t die zu O transponierte Matrix ist.

Bedeutung von $OO^t = Id$.

Def. (Lin. Alg.) Eine $n \times n$ Matrix $O \in Mat(n, n, \mathbb{R})$ ist orthogonal, wenn $OO^t = Id$, wobei Id die Einheitsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ und O^t die zu O transponierte Matrix ist.

Fakt (LA I). *$A \in Mat(n, n)$ ist genau dann orthogonal, wenn das Standard-Skalarprodukt der $i-$ten Zeile mit der $j-$ten Zeile gleich* $\begin{cases} 1, & falls\ i = j \\ 0, & falls\ i \neq j \end{cases}$ *ist.*

Fakt (LA I). *Sind $A, B \in Mat(n, n)$ orthogonal, so sind A^{-1}, AB und A^t auch orthogonal. Es gilt: $det(A) = \pm 1$.*

Bitte üben: Welche der folgenden Matrizen sind orthogonal?

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$S(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$F(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Beweis von Satz 17 in $\Longleftarrow$ Richtung: Warum ist $f(x) = Ox + v$ eine Isometrie?

Beobachtung. $\langle x, y \rangle = x^t y = (x_1, ..., x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ (Als Ergebnis des Matrixproduktes $(x_1, ..., x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ bekommen wir eine 1×1-Matrix. Wir identifizieren 1×1-Matrizen mit Zahlen.)
Wir müssen zeigen, dass $d(a, b)^2 = d(f(a), f(b))^2$ ist. Wir rechnen es aus:
$d(f(a), f(b))^2 = \langle f(a) - f(b), f(a) - f(b) \rangle =$
$\langle Oa + v - (Ob + v), Oa + v - (Ob + v) \rangle =$
$\langle O(a - b), O(a - b) \rangle \overset{\text{Beob.}}{=} (O(a - b))^t O(a - b) \overset{(AB)^t = B^t A^t}{=}$
$(a - b)^t \underbrace{O^t O}_{Id} (a - b) =$
[weil das Matrixprodukt assoziativ ist]
$(a - b)^t (a - b) = \langle a - b, a - b \rangle = d(a, b)^2.$

Beweis des Satzes 17 in $\Longrightarrow$ Richtung

Sei f eine Isometrie des $\mathbb{R}^n$. Wir betrachten $v = -f(\vec{0})$ und die Translation

$$T_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad T_v(x) = x + v \ \ (= x - f(\vec{0})).$$

Sie ist eine Isometrie (da
$d(T_v(x), T_v(y)) = |x + v - (y + v)| = |x - y| = d(x, y))$.
Wir betrachten die Verkettung $\tilde{f} := T_v \circ f$, welche als Verkettung von zwei Isometrien ebenfalls eine Isometrie ist. Unser Ziel ist es zu zeigen, dass $\tilde{f}$ eine lineare orthogonale Abbildung $x \mapsto Ox$ (für eine orthogonale Matrix O) ist.

Bemerkung. Wir wissen noch nicht, dass $\tilde{f}$ linear ist. Zu zeigen, dass $\tilde{f}$ linear ist, ist ein Teil der Aufgabe.

Unten werden wir nur die folgenden Eigenschaften von $\tilde{f}$ benutzen:
(a) $\tilde{f}$ ist eine Isometrie.
(b) $\tilde{f}(\vec{0}) = T_v \circ f(\vec{0}) = T_v(f(\vec{0})) = f(\vec{0}) - f(\vec{0}) = \vec{0}$.

Beweis, dass $\tilde{f}$ linear ist

Wir müssen zeigen, dass $\tilde{f}(x+y) = \tilde{f}(x) + \tilde{f}(y)$, und dass $\tilde{f}(\lambda x) = \lambda \tilde{f}(x)$.
Wir zeigen zuerst, dass $\tilde{f}$ das Skalarprodukt erhält: $\langle \tilde{f}(x), \tilde{f}(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ (für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$).
Da $d(x,y) = d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y))$ ist, bekommen wir

$$\langle x-y, x-y \rangle = \langle \tilde{f}(x) - \tilde{f}(y), \tilde{f}(x) - \tilde{f}(y) \rangle \overset{\text{Linearität}}{\Longrightarrow}$$
$$\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle - 2\langle x, y \rangle = \langle \tilde{f}(x), \tilde{f}(x) \rangle + \langle \tilde{f}(y), \tilde{f}(y) \rangle - 2\langle \tilde{f}(x), \tilde{f}(y) \rangle. \quad (*)$$

Weil $\tilde{f}(\vec{0}) = \vec{0}$, bekommen wir $\langle x, x \rangle = \langle x - \vec{0}, x - \vec{0} \rangle = d(x, \vec{0})^2 = d(\tilde{f}(x), \underbrace{\tilde{f}(\vec{0})}_{\vec{0}})^2 = \langle \tilde{f}(x) - \vec{0}, \tilde{f}(x) - \vec{0} \rangle = \langle \tilde{f}(x), \tilde{f}(x) \rangle$. Analog gilt: $\langle y, y \rangle = \langle \tilde{f}(y), \tilde{f}(y) \rangle$. Wir setzen dies in $(*)$ ein und bekommen $\langle \tilde{f}(x), \tilde{f}(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ wie angekündigt.

Beweis $\tilde{f}(\lambda x) = \lambda \tilde{f}(x)$

Jetzt zeigen wir $\tilde{f}(\lambda x) - \lambda \tilde{f}(x) = \vec{0}$.Dazu betrachten wir
$d(\tilde{f}(\lambda x), \lambda \tilde{f}(x))^2 = \langle \tilde{f}(\lambda x) - \lambda \tilde{f}(x), \tilde{f}(\lambda x) - \lambda \tilde{f}(x) \rangle =$
$\langle \tilde{f}(\lambda x), \tilde{f}(\lambda x) \rangle - 2\lambda \langle \tilde{f}(x), \tilde{f}(\lambda x) \rangle + \lambda^2 \langle \tilde{f}(x), \tilde{f}(x) \rangle =$
[da f das Skalarprodukt erhält]
$= \langle \lambda x, \lambda x \rangle - 2\lambda \langle x, \lambda x \rangle + \lambda^2 \langle x, x \rangle = 0$. Dann ist $\tilde{f}(\lambda x) = \lambda \tilde{f}(x)$ wie angekündigt.

Analog zeigt man, dass $\tilde{f}(x+y) = \tilde{f}(x) + \tilde{f}(y)$:

$$\langle \tilde{f}(x) + \tilde{f}(y) - \tilde{f}(x+y), \tilde{f}(x) + \tilde{f}(y) - \tilde{f}(x+y) \rangle =$$

[Ausrechnen unter Benutzung von $\langle x, y \rangle = \langle \tilde{f}(x), \tilde{f}(y) \rangle$]

$$\langle x + y - (x+y), x + y - (x+y) \rangle = 0.$$

Dann ist $\tilde{f}$ linear. Also kann man $\tilde{f}$ in der Form $\tilde{f}(x) = Ax$ für eine $n \times n$-Matrix A darstellen. Wir zeigen, dass die Matrix A orthogonal ist. Da $\tilde{f}$ Skalarprodukt erhält, gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle = x^t y = \left(\tilde{f}(x)\right)^t \tilde{f}(y) = (Ax)^t Ay = x^t A^t A y$$

.

Dann muss $A^t A = Id$ sein. (Um dies zu zeigen, setzen wir $x = e_i$ und $y = e_j$ ein und bekommen, dass der $(i,j)-$ Eintrag von $A^t A$ gleich 1 für $i = j$ und sonst 0 ist.) Damit ist A orthogonal.

Dann ist $\tilde{f}(x) = T_v \circ f(x) = f(x) + v = Ox$. Also ist $f(x) = Ox - v$.Damit ist der Satz bewiesen.

Exkurs: Klassifikation orthogonaler 2×2-Matrizen.

Aussage: Es gilt:

(a) Jede orthogonale 2×2-Matrix A mit $\det(A) = 1$ hat die Form $D(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$, wobei $\alpha \in [0, 2\pi[$. Ist $\sin(\alpha) \neq 0$, so hat die Matrix (über $\mathbb{R}$) keine Eigenvektoren.

(b) Jede orthogonale 2×2-Matrix A mit $\det(A) = -1$ hat die Form $S(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$, wobei $\alpha \in [0, 2\pi[$.

Diese Matrix hat die Eigenwerte 1 und -1.

Beweis.

Wir benutzen

> **Fakt (LA I).** $A \in \mathrm{Mat}(n,n)$ ist genau dann orthogonal, wenn das Standardskalarprodukt der i-ten Zeile mit der j-ten Zeile gleich $\begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases}$ ist.
>
> **Fakt (LA I).** *Sind $A, B \in \mathrm{Mat}(n,n)$ orthogonal, so sind A^{-1}, AB und A^t auch orthogonal. Es gilt:* $\det(A) = \pm 1$.

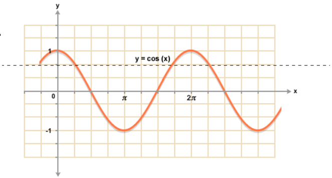
Ist $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ orthogonal, dann gelten nach den oben wiederholten Aussagen die folgenden Gleichungen:

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{12}^2 & = 1 \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 & = 1 \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} & = 0 \end{cases}$$

Wir lösen (=finden eine parametrische Darstellung der Lösungsmenge) diese Gleichungen und erhalten die Matrizen aus der Aussage.

Aus $a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1$ folgt $|a_{11}| < 1$ und deswegen existiert (genau) ein $\alpha \in [0, \pi]$ mit $\cos(\alpha) = a_{11}$, siehe das Bild.

Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\cos(\alpha) = a_{11}$, da die Funktion cos stetig ist und $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi) = -1$ erfüllt.



Dann muss $a_{12}^2 = \sin(\alpha)^2$ sein, da $a_{11}^2 = \cos(\alpha)^2$ und

$\underbrace{a_{11}^2}_{\cos(\alpha)^2} + a_{12}^2 = 1$.

Dann gilt:
$a_{12} = -\sin(\alpha)$ oder $a_{12} = \sin(\alpha)$. Im zweiten Fall ersetzen wir $\alpha \longrightarrow -\alpha$. Diese Operation ändert $\cos(\alpha)$ nicht, da cos eine gerade Funktion ist, und ändert das Vorzeichen von sin, sodass dann $a_{12} = -\sin(\alpha)$ gilt.

Analog, aus der Gleichung $a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1$ folgt die Existenz eines $\beta \in \mathbb{R}$ mit $a_{21} = \sin(\beta)$ und $a_{22} = \cos(\beta)$.

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{12}^2 & = 1 \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 & = 1 \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} & = 0 \end{cases}$$

Jetzt setzen wir $a_{11} = \cos(\alpha)$, $a_{12} = -\sin(\alpha)$, $a_{21} = \sin(\beta)$, $a_{22} = \cos(\beta)$ in die dritte Gleichung ein und erhalten:

$$0 = \cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta) \overset{\text{trig. Formel}}{=} \sin(\beta - \alpha).$$

Dann ist $\beta - \alpha = k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
Wenn k eine gerade Zahl ist, gilt

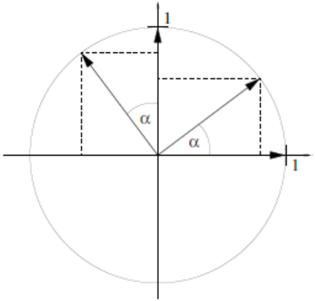
$$\sin(\beta) = \sin(\alpha), \quad \cos(\beta) = \cos(\alpha).$$

Dann ist die Matrix $A = D(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Wenn k eine ungerade Zahl ist, gilt $\sin(\beta) = -\sin(\alpha)$ und $\cos(\beta) = -\cos(\alpha)$. Also ist die Matrix $A = S(-\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$. $\square$

Orthogonale Matrix mit det = 1 entspricht einer Drehung

Wir betrachten die Matrix $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ aus Fall (a) von Lemma 4.
Diese Matrix entspricht der Drehung (mit Winkel α) um den Nullpunkt des Koordinatensystems:
In der Tat, die Multiplikation mit der Matrix A dreht die Basisvektoren (und damit auch alle Vektoren) um den Winkel α:



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

(Drehungen werden dabei gegen den Uhrzeigersinn durchgeführt.)

Orthogonale 2×2-Matrizen und komplexe Zahlen

Wir betrachten $\mathbb{C}$. Für jede (fest gewählte) komplexe Zahl $\lambda + i\mu \neq 0 + i0$ können wir die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $(x + iy) \mapsto (\lambda + i\mu)(x + iy) = \lambda x - \mu y + i(\lambda y + \mu x)$ betrachten.

Jetzt betrachten wir diese Abbildung als eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda x - \mu y \\ \lambda y + \mu x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Wir sehen, dass die Matrix der Abbildung zur Matrix einer Drehung proportional ist (Faktor: $\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$).

Jetzt betrachten wir eine andere Abbildung von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$: $(x + iy) \mapsto \overline{(x + iy)} = x - iy$. Diese Abbildung ist keine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung, allerdings kann man sie als eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ betrachten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Wir sehen, dass die Matrix dieser Abbildung eine orthogonale Matrix mit $\det = -1$ ist.

Erweiterte Koordinaten

Sei $\mathbb{K}^n$ ein $n-$dimensionaler affiner Raum. Die erweiterten Koordinaten des Punktes $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ sind $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1}$. (Das ist für alle $\mathbb{K}$ sinnvoll, weil 1 in jedem Körper $\mathbb{K}$ wohldefiniert ist. In dieser Vorlesung kann man $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ annehmen.)

Rechnen Sie selbst: Was sind die erweiterten Koordinaten von
$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Antwort. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Zuerst sieht der Begriff „Erweiterte Koordinaten“ künstlich aus: Wozu sollte man eine 1 unten hinzufügen? Wir werden in der Theorie der Quadriken sehen, dass diese Schreibweise doch nützlich ist. Hier werde ich zeigen, dass in einigen bereits erlernten Begriffen erweiterte Koordinaten ganz natürlich vorkommen.

Bsp: Affine Kombinationen in erweiterten Koordinaten

Wiederholung.
Der Punkt $x \in \mathbb{K}^n$ ist eine affine Kombination der Punkte $x_1, ..., x_k \in \mathbb{K}^n$, wenn es Zahlen $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ gibt mit $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k = 1$ sodass
$x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_k x_k \qquad (*)$

Hier, in der affinen Kombination $(*)$, kann man statt x und statt $x_1, ..., x_k$ die erweiterten Koordinaten von x bzw. x_i einsetzen: Die Gleichung bleibt richtig:
$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix} + ... + \lambda_k \begin{pmatrix} x_k \\ 1 \end{pmatrix}$, weil unten $\lambda_1 + ... + \lambda_k = 1$ steht.

Affinitäten – Wiederholung

Def. – Wiederholung Eine Affinität von $\mathbb{K}^n$ ist eine Abbildung $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ der Form $F(x) = Bx + b$,
wobei $B \in GL_n(\mathbb{K})$ eine nichtausgeartete quadratische $n \times n$-Matrix ist.

Eine wichtige Klasse von Affinitäten vom euklidischen Raum $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ bilden die Isometrien, also Affinitäten der Form $F(x) = Ox + b$, wobei O eine orthogonale Matrix ist.

Bsp. Affinitäten in erweiterten Koordinaten

Man kann jede Affinität Bx + b (eigentlich jede affine Abbildung, wir werden aber nur Affinitäten benutzen) in der „erweiterten Form“ schreiben:

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} & & \\ & \mathrm{B} & \\ & & \end{matrix}} & \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \\ 0 \cdots 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bx + b \\ \\ 1 \end{pmatrix}$$

Erklärung: Ausrechnen. Z.B. ist es einfach zu sehen, dass auf der letzten $n+1$-ten Stelle des Produktes 1 steht, weil die letzte Zeile von der „erweiterten Matrix“ gleich (0...0 1) ist. Auf dem ersten Platz des Produktes steht $(b_{11}\ \ldots\ b_{1n}\ \ b_1)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = (b_{11}\ \ldots\ b_{1n})\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + b_1$ wie in $Bx + b$. Analog für jede Zeile.

Abschnitt: Quadriken (im $\mathbb{R}^n$)

Wir arbeiten im $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Skalarprodukt und Standardkoordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Def. Die Lösungsmenge der Gleichung

$$\boxed{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a = 0}$$

heißt Quadrik. ($a_{ij}, a_i, a \in \mathbb{R}$. $A = (a_{ij})$ wird $\neq \mathbf{0}$ vorausgesetzt.)

Fragen:

- In welche „beste“ Form kann man die Gleichung der Quadrik mit Hilfe einer Isometrie bzw. einer affinen Transformation bringen?
- Gegeben eine Quadrik, wie kann man die „beste“ Form der Quadrik finden, ohne die Transformation explizit anzugeben?

Gleichung einer Quadrik in Matrix-Form

Die Gleichung

$$\boxed{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} a_ix_i + a = 0}$$

kann man in der „Matrix-Form“

$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a = 0$ schreiben.

Ferner gilt: Man kann immer voraussetzen (o.B.d.A.), dass die Matrix $A := (a_{ij})$ symmetrisch ist.Tatsächlich, wenn wir die Matrix A durch die Matrix $\frac{1}{2}(A + A^t)$ ersetzen (die offensichtlich symmetrisch ist), wird die Gleichung und deswegen die Lösungsmenge nicht geändert: $x^tAx \overset{\text{Das ist } 1\times 1 \text{ Matrix}}{=} (x^tAx)^t \overset{\text{Rechenregeln}}{=} x^tA^tx$, und deswegen ist die ursprüngliche Gleichung dieselbe wie

$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{t} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a = 0.$

Erweiterte Matrix der Gleichung

Man kann die Gleichung einer Quadrik auch in folgender Form schreiben:

$$(x_1 \ \cdots \ x_n \ 1) \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_1/2 \\ \vdots \\ a_n/2 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} a_1/2 & \cdots & a_n/2 \end{matrix}} & a \end{pmatrix}}_{\text{Erweiterte (symmetrische) Matrix } Erw_Q} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Beweis: Einfach nachrechnen und die Gleichung $(x_1 \ \cdots \ x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + (a_1 \ \cdots \ a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a = 0$ bekommen. (Oder die äquivalente Gleichung $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^n a_ix_i + a = 0$)

Rechnen Sie selbst:

Schreiben Sie bitte die Gleichung $x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x + 6y + 1 = 0$ in
(a) Matrixform, (b) der erweiterten Matrixform.

Antwort. (a) $(x \ y) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (4 \ 6) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 1 = 0$

(b) $(x \ y \ 1) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$

Beispiele in dim 2: Ausgeartete Quadriken

$\varnothing$ ist eine Quadrik: Die entsprechende Gleichung (eine von mehreren)
$x^2+y^2+1=0 \iff (x\ y)\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+1=0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0.$

Ein Punkt ist eine Quadrik: Z.B. ist $\binom{1}{2}$ die Lösungsmenge der Gleichung $(x-1)^2+(y-2)^2=0$. Und diese Gleichung ist
$x^2+y^2-2x-4y+5=0 \iff (x\ y)\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+(-2\ -4)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+5=0$
$\iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & -2\\-1 & -2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0.$

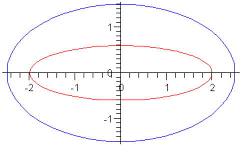
Eine Gerade ist eine Quadrik: Z.B. ist die Gerade $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ sodass } x=y\right\}$ die Lösungsmenge der Gleichung $(x-y)^2=0$. Und diese Gleichung ist
$x^2-2xy+y^2=0 \iff (x\ y)\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\-1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0.$

(Die Vereinigung von) Zwei Geraden ist eine Quadrik: Z.B. ist $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ sodass x=y}\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ sodass x=-y}\right\}$ die Lösungsmenge der Gleichung $(x-y)(x+y)=0$. Und diese Gleichung ist
$x^2-y^2=0 \iff (x\ y)\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0.$

Nichtausgeartete Quadriken in dim 2

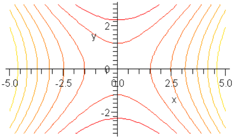
Ellipse: $ax^2 + by^2 = c$, wobei $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$.

$$(x\ y)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - c = 0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$



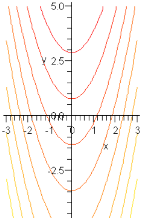
Hyperbel: $ax^2 - by^2 = c$, wobei $a > 0,\ b > 0\ c \neq 0$.

$$(x\ y)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - c = 0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$



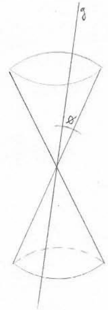
Parabel: $ax^2 + by = 0$, wobei $a \neq 0,\ b \neq 0$.

$$(x\ y)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + by = 0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b/2 \\ 0 & b/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$



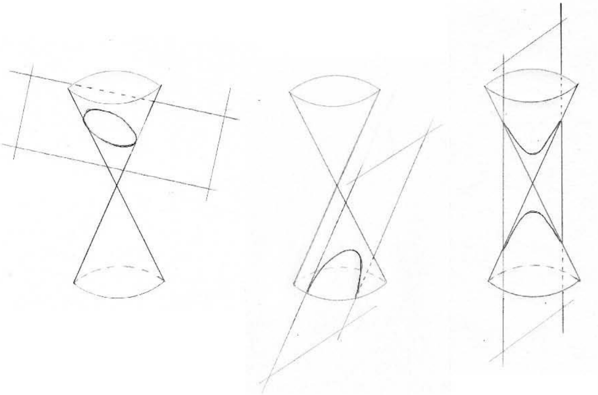
Quadriken als Kegelschnitte

Klassische Definition: (Menaechmus IV Jh.v.Chr.)
(Doppel-)Kegel im 3-dimensionalen Raum, mit Achse g besteht aus den Punkten auf den Geraden, die einen festen Winkel θ mit g bilden.



Kegelschnitt = Schnitt eines Kegels mit einer Ebene.

Kegelschnitt = Schnitt eines Kegels mit einer Ebene.



Ein Doppel-Kegel ist eine Quadrik mit der Gleichung
$x^2 + y^2 - \tan^2(\theta)z^2 = 0$.
Die Schnittmenge dieses Kegels mit der Ebene
$\left\{ \begin{pmatrix} x_0 + sx_1 + tx_2 \\ y_0 + sy_1 + ty_2 \\ z_0 + sz_1 + tz_2 \end{pmatrix} \text{ sodass } \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}$ ist (als Punktmenge in der Ebene mit den Koordinaten s, t) die Menge

$$(x_0 + sx_1 + tx_2)^2 + (y + sy_1 + ty_2)^2 - \tan^2(\theta)(z_0 + sz_1 + tz_2)^2 =$$

$$\underbrace{\left(x_1^2 + y_1^2 - \tan^2(\theta)z_1^2\right)}_{a_{11}} t^2 + 2\underbrace{\left(x_1x_2 + y_1y_2 - \tan^2(\theta)z_1z_2\right)}_{a_{12}=a_{21}} ts +$$

$$\underbrace{\left(x_2^2 + y_2^2 - \tan^2(\theta)z_2^2\right)}_{a_{22}} s^2 + \underbrace{2\left(x_1x_0 + y_1y_0 - \tan^2(\theta)z_1z_0\right)}_{a_1} t +$$

$$\underbrace{2\left(x_2x_0 + y_2y_0 - \tan^2(\theta)z_2z_0\right)}_{a_2} s + \underbrace{\left(x_0^2 + y_0^2 - \tan^2(\theta)z_0^2\right)}_{a} = 0$$

Wir sehen, dass die Menge eine Quadrik ist.
Man kann zeigen, dass man jede nichtausgeartete Quadrik bekommen kann, indem man eine geeignete Ebene (also, $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$) wählt.