Was machen Affinitäten mit Quadriken?

Sei F eine Affinität, sei Q eine Quadrik (in $\mathbb{R}^n$).
Frage *Was ist $Bild_F(Q)$ einer Quadrik Q?*
Antwort (Lemma 16) *Es ist eine Quadrik.*
Beweis. Da F eine Affinität ist, ist die Umkehrabbildung F^{-1} auch eine Affinitätund hat deswegen die Form
$F^{-1}(x) = Bx + b$ $\qquad (*)$
für ein $b \in \mathbb{R}^n$ und eine nicht ausgeartete $n \times n$ Matrix B. (Man kann B und b explizit ausrechnen.) Ist $x \in Bild_F(Q)$, so ist $F^{-1}(x) \in Q$, also

$$\underbrace{\left((b_1 \ \cdots \ b_n) + (x_1 \ \cdots \ x_n)B^t\right)}_{(F^{-1}(x))^t=(Bx+b)^t} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \underbrace{\left(B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right)}_{F^{-1}(x)=Bx+b} +$$

$$(a_1 \ \cdots \ a_n) \underbrace{\left(B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right)}_{F^{-1}(x)=Bx+b} + a = 0,$$ und deswegen

$$x^t \underbrace{B^t A B}_{A'} x + \underbrace{\left(2B^t A b + B^t a\right)^t}_{\vec{a}'} x + \underbrace{a^t b + b^t A b + a}_{a'} = 0 \qquad (**).$$ $\square$

Bemerkung *Dies ist die Formel für die Gleichung der Quadrik $Bild_F(Q)$.*

Hauptsätze der Theorie der Quadriken (Normalformen)

Satz 18 *Man kann jede Quadrik mit Hilfe einer Isometrie in eine Quadrik mit der Gleichung*

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + (\underbrace{0 \cdots 0}_{k} \; a_{k+1} \cdots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a = 0$$

überführen, sodass höchstens eines der $a_{k+1}, ..., a_n, a$ ungleich 0 ist.

Satz 18' Man kann jede Quadrik mit Hilfe einer Isometrie in eine Quadrik mit der erweiterten Matrix rechts überführen. (Höchstens eines der $a_{k+1}, ..., a_n, a$ ist ungleich 0.)

$$Erw_Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \vdots \\ & & \lambda_k & & & & 0 \\ & & & 0 & & & \frac{a_{k+1}}{2} \\ & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & 0 & \frac{a_n}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{a_{k+1}}{2} & \cdots & \frac{a_n}{2} & a \end{pmatrix}$$

Bemerkung *Da die Gleichungen $f(x) = 0$ und $\lambda \cdot f(x) = 0$ für $\lambda \neq 0$ gleiche Lösungsmengen haben, kann man noch eine Zahl gleich 1 setzen, z.B. λ_1.*

Die Formel aus Satz 18 ohne Matrizen

Satz 18 *Man kann jede Quadrik mit Hilfe einer Isometrie in eine Quadrik mit der Gleichung*

$$(x_1 \ \cdots \ x_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + (\underbrace{0 \cdots 0}_{k} \ a_{k+1} \cdots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a = 0$$

überführen, sodass höchstens eines der $a_{k+1}, \ldots, a_n$, a ungleich 0 ist.

Man kann jede Quadrik mit Hilfe einer Isometrie in eine Quadrik überführen, die durch eine der folgenden zwei Gleichungen gegeben ist:

- (in der Formel unten ist $k \in \{1, ..., n\}$)

$$\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_k x_k^2 + a = 0$$

- (in der Formel unten ist $k \in \{1, ..., n-1\}$)

$$\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_k x_k^2 + a_n x_n = 0$$

Folgerung *Bis auf Isometrien ist jede Quadrik in $\mathbb{R}^2$ (mit dem Standard-Skalarprodukt) eine Ellipse, Hyperbel, Parabel, ein Punkt, eine Gerade, ein Geradenpaar oder $\varnothing$.*

Beweis der Folgerung: Nach Satz 18 sieht die Gleichung einer Quadrik nach einer geeigneten Isometrie wie folgt aus ($\lambda > 0$, $\mu > 0$):

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 + \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c = 0 & \text{Punkt} \\ c > 0 & \varnothing \\ c < 0 & \text{Ellipse} \end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & -\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 - \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c \neq 0 & \text{Hyperbel} \\ c = 0 & \text{zwei nichtparallele Geraden} \end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c = 0 & \text{Gerade} \\ c > 0 & \varnothing \\ c < 0 & \text{zwei parallele Geraden} \end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + (0 \quad c)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 0 \iff \lambda x^2 = -cy \quad \text{entspricht}$$

$$\begin{cases} c = 0 & \text{Gerade (bereits behandelt)} \\ c \neq 0 & \text{Parabel} \end{cases}$$

$\square$

Bemerkung. Dimension 2 ist nicht wesentlich: Man kann eine ähnliche Klassifikation in höheren Dimensionen machen. Selbstverständlich wächst die Anzahl der Fälle mit der Dimension. In Dimension 3 hat man den Quadriken noch Namen gegeben (etwa Paraboloid: $\{(x, y, z) \mid ax^2 + by^2 + z = 0\}$).

Satz 19 *Man kann jede Quadrik mit Hilfe einer Affinität in eine Quadrik der Form*

$$(x_1 \ \cdots \ x_n) \begin{pmatrix} \pm 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \pm 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + (\underbrace{0 \cdots 0}_{k} \ a_{k+1} \cdots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a = 0$$

überführen, sodass höchstens eines der $a_{k+1}, \ldots, a_n, a$ ungleich 0 ist. (Man kann die Vorfaktoren sogar auf ± 1 bringen.)

Man kann jede Quadrik mit Hilfe einer affinen Abbildung in eine Quadrik mit der rechts stehenden erweiterten Matrix überführen (wobei höchstens eines der $a_{k+1}, \ldots, a$ ungleich 0 ist.)

$$Erw_Q = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & & \vdots \\ & & 1 & & & & & & & \vdots \\ & & & -1 & & & & & & \vdots \\ & & & & \ddots & & & & & \vdots \\ & & & & & -1 & & & & 0 \\ & & & & & & 0 & & & \frac{a_{k+1}}{2} \\ & & & & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & & & 0 & \frac{a_n}{2} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{a_{k+1}}{2} & \cdots & \frac{a_n}{2} & a \end{pmatrix}$$

Folgerung *Bis auf Anwendung einer affinen Abbildung ist jede Quadrik in* $\mathbb{R}^2$ *ein Kreis, die Standard-Hyperbel* $x^2 - y^2 = 1$*, die Standard-Parabel* $y = x^2$*, ein Punkt, eine Gerade, ein Geradenpaar [*$(x-y)(x+y) = 0$ *oder* $x^2 = 1$*], oder* $\varnothing$*.*
(Beweis wie bei der Folgerung aus Satz 18)

Wiederholung: Diagonalisierung symmetrischer Matrizen über $\mathbb{R}$

Wiederholung: A heißt symmetrisch, falls $A^t = A$.
Wiederholung – Satz 37 Vorl. 15 LA I *Ist A symmetrisch, so gibt es eine orthogonale Matrix O, sodass $O^{-1}AO$ diagonal ist. (Symmetrische Matrizen über $\mathbb{R}$ sind diagonalisierbar mit Hilfe orthogonaler Transformationen.)*

In Vorl. 15 LAAG I haben wir gesehen, dass man auch die Reihenfolge der Diagonalelemente der Diagonalmatrix $O^{-1}AO$ beliebig wählen kann.

Für eine geeignete Matrix O gilt also: $O^{-1}AO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$

Bemerkung: Nicht vergessen, dass für orthogonale Matrizen $O^{-1} = O^t$ gilt.

Idee des Beweises von Satz 18: Wir werden die Gleichung der Quadrik schrittweise (mit Hilfe von Isometrien) vereinfachen.

Beweis. Man betrachte die Isometrie F, sodass F^{-1} durch $F^{-1}(x) = \vec{0} + Ox = Ox$ gegeben ist, wobei O orthogonal ist. Nach Lemma 16 ist $Q_1 := \mathrm{Bild}_F(Q)$ eine Quadrik, deren Gleichung lautet:

$$x^t \underbrace{O^t A O}_{A'} x + \underbrace{\left(2O^t A \underbrace{b}_{\vec{0}} + O^t a\right)^t}_{\vec{a}'} x + \underbrace{a^t \underbrace{b}_{\vec{0}} + a}_{a'} = 0 \iff x^t \underbrace{O^t A O}_{A'} x + \underbrace{a^t O}_{(\vec{a}')^t} x + a' = 0 \text{ ist.}$$

Nach Satz 37 LA I kann man O so wählen, dass

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Dann betrachte man die Affinität F_1, sodass F_1^{-1} die Translation $F_1^{-1}(x) = b + x$ ist. Diese ist ebenfalls eine Isometrie. Nach Lemma 16 ist $\mathrm{Bild}_{F_1}(Q_1)$ eine Quadrik, deren Gleichung lautet:

$$x^t \underbrace{\mathrm{Id}^t A' \mathrm{Id}}_{A'} x + \underbrace{\left(2\mathrm{Id}^t A' b + \mathrm{Id}^t a'\right)^t}_{\vec{a}''} x + \underbrace{(\vec{a}')^t b + a'}_{a''} = 0 \iff x^t A' x + \underbrace{\left(2A' b + (a')^t\right)^t}_{\vec{a}''} x + \underbrace{\vec{a}'^t b + a'}_{a''} = 0.$$

Da A' wie oben ist, können wir b so wählen, dass $\vec{a}'' = (\underbrace{0 \cdots 0}_{k}, a_{k+1}, \dots, a_n)$ gilt. (Für $i \leq k$ setze $b_i = -\frac{a_i'}{2\lambda_i}$, sonst $b_i = 0$.)

Ist $k = n$, oder $(a_{k+1}, ..., a_n) = (0 \cdots 0)$, so sind wir fertig.
Wenn $(a_{k+1}, ..., a_n) \neq (0 \cdots 0)$ ist, betrachte man eine $(n-k) \times (n-k)$ orthogonale Matrix O_{n-k}, sodass (für ein $\lambda \in \mathbb{R}$) gilt:

$$O_{n-k} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Existenz: Mit dem Gram-Schmidt'schen Verfahren kann man eine orthonormale Basis $(o_1, ..., o_{n-k})$ finden, sodass o_1 proportional zu $\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ ist. Dann ist die Matrix O_{n-k} mit $O_{n-k} e_i = o_i$
orthogonal (da die Basis orthonormal ist) und sie überführt ein Vielfaches von e_1 in einen Vektor, der zu $\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ proportional ist.

Man betrachte die Isometrie F_2 von $\mathbb{R}^n$ mit F_2^{-1} gegeben durch

$$F_2^{-1}(x) = \vec{0} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & O_{n-k} \end{pmatrix}}_{\text{Das ist eine orthogonale Matrix, z.B. } O} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ Nach Lemma 16 ist

$Q_2 := Bild_{F_2}(Q_1)$ eine Quadrik mit der Gleichung

$$(x_1 \ \cdots \ x_n) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & O_{n-k}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & O_{n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} +$$

$$\underbrace{(0 \cdots 0 a_{n-k} \cdots a_n) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & O_{n-k}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x^t O a = \lambda x^t e_{k+1} = \lambda e_{k+1}^t x} + a_0'' = 0 \iff$$

$$(x_1 \ \cdots \ x_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + (\underbrace{0 \cdots 0}_{k} \, \lambda \, \underbrace{0 \cdots 0}_{n-k-1}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a_0'' = 0.$$

Jetzt betrachten wir die Isometrie F_3, sodass F_3^{-1} die Translation $F_3^{-1}(x) = \bar{b} + x$ ist, mit $\bar{b} = (\underbrace{0 \cdots 0}_{k} \bar{b}_{k+1} \cdots \bar{b}_n)$. Ist ein $\vec{a}_i'' \neq 0$, so können wir $\bar{b}$ so wählen, dass $a_0'' = 0$. (Z.B. $\bar{b} = (0 \cdots 0 \quad \underbrace{\frac{-a}{\bar{b}_k}}_{k\text{-te Stelle}} \quad 0 \cdots 0)$).

Satz 18 ist bewiesen. Um Satz 19 zu beweisen, müssen wir noch die passende „Skalierung“ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mu_1 \cdot x_1 \\ \vdots \\ \mu_n \cdot x_n \end{pmatrix}$ wählen, die offensichtlich eine affine Abbildung ist, um die von Null verschiedenen Koeffizienten auf ± 1 zu bringen.

Bsp. zu Beweis von Satz 18

Wir betrachten die Quadrik $Q: \quad x^t \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} x + 2\,(-2,1,2)\,x + 2 = 0$ im $\mathbb{R}^3$.

Nach dem Algorithmus im Beweis von Satz 16 sollen wir zuerst die Matrix $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ diagonalisieren (mit Hilfe von orthogonalen Matrizen).

In LA I haben wir gelernt, dass die Basis, in welcher die Matrix Diagonalgestalt hat, aus Eigenvektoren besteht. Das charakteristische Polynom ist $\lambda^3 - 9\lambda^2 - 9\lambda + 81$, , die Nullstellen davon sind $\lambda_1 = 9, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -3$ und die entsprechenden Eigenvektoren sind $v_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},$ (Sie sind automatisch zueinander orthogonal, da die Eigenwerte verschieden sind. Ich habe sie zusätzlich normiert, damit sie eine orthonormale Basis bilden.)

Als orthogonale Transformationsmatrix erhält man dann

$\mathrm{O} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Im neuen Koordinatensystem $x = Oy$ sieht die Gleichung nach Lemma 16 wie folgt aus:

$$y^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} y + 2\,(0,3,0)\,y + 2 = 0\,.$$

Wir müssen noch den zweiten Eintrag in $\vec{a}$ auf 0 bringen: Da

$$9y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2 + 6y_2 + 2 =$$

$$9y_1^2 + 3(y_2+1)^2 - 6y_2 - 3 - 3y_3^2 + 6y_2 + 2 =$$

$$9z_1^2 + 3z_2^2 - 3z_3^2 - 1$$

sehen wir, dass nach der Parallelverschiebung $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 + 1 \\ y_3 \end{pmatrix}$ die Gleichung der Quadrik Normalform hat.