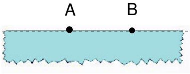
Anwendung: Konstruktionen mit Zirkel und Lineal:

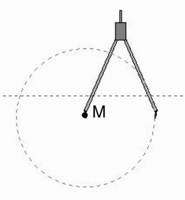
Frage: (Euklid) Welche geometrischen Objekten sind allein mit Zirkel und Lineal konstruierbar?
Regeln (zuerst nichtformal; auf übernächster Folie sind sie formalisierter dargestellt):
Gegeben sind: Ein (in alle Richtungen unendliches) Papierblatt; ein (unendliches) Lineal ohne Maßstab und ein (unendlich grosser) Zirkel. Es ist erlaubt, dass bereits irgendwelche Objekte („geometrische Gebilde“) auf dem Papierblatt eingezeichnet sind: Z.B. sind auf dem Blatt später zwei Punkte mit Abstand 1 vorhanden. Wenn nichts gesagt wird, werden wir annehmen, dass das Blatt leer ist.

Was können wir tun:

Sind zwei verschiedene Punkte A, B gegeben, können wir die (perfekte unendliche) Gerade durch sie zeichnen.

Sind drei Punkte $A \neq B,\ M$ gegeben, können wir einen Kreis mit Radius $|AB|$ um M zeichnen.





Wenn die Schnittpunkte von zwei Geraden, Geraden und einem Kreis oder zweier Kreise existieren und die Anzahl davon endlich ist, können wir einen Schnittpunkt (oder mehrere Schnittpunkte) wählen. Auch wenn auf dem Blatt irgendein Objekt vor der Konstruktion vorhanden ist, können wir die Schnittpunkte der von uns konstruierten Geraden oder Kreise mit dem Objekt bestimmen.

(Damit wir überhaupt anfangen können, können wir einen Punkt des Blattes wählen.)

Alle Konstruktionen die wir durchführen sind ideal (=exakt; es gibt keinen Fehler).

Dasselbe ein bisschen formaler:

Wir definieren den Begriff „konstruierbar“ durch die folgenden Festlegungen:

(a) Die Gerade durch zwei verschiedene gegebene Punkte ist konstruierbar.

(b) Der Kreis um einen gegebenen Punkt dessen Radius gleich dem Abstand zwischen zwei gegebenen Punkten ist, ist konstruierbar.

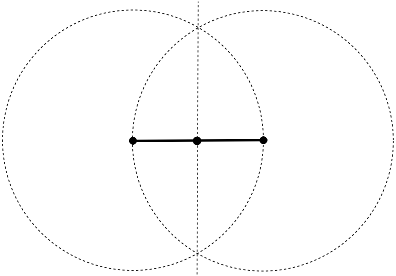
(c) Der Schnittpunkt von zwei sich schneidenden Geraden,

(d) die Schnittpunkte eines gegebenen Kreises und einer den Kreis schneidenden gegebenden Geraden,

(e) und die Schnittpunkte von zwei sich schneidenden gegebenen Kreisen sind konstruierbar.

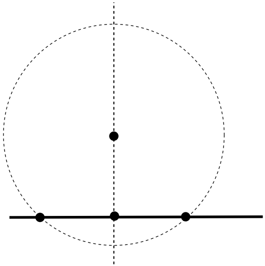
Geometrische Gebilde (wie z.B. Punkte, Geraden, Strecken, Kreise, Dreiecke, Polygone,) die jeweils durch eine endliche Punktmenge festgelegt werden können, wollen wir vorübergehend als „Objekte“ bezeichnen. Wir sagen dann, das Objekt a sei bei Vorgabe der Objekte $a_1, \dots, a_k$ *konstruierbar*, wenn es Objekte $a_{k+1}, \dots, a_n = a$ gibt, so dass a_j bei Vorgabe der Objekte $a_1, \dots, a_{j-1}$ konstruierbar ist für $j = k+1, \dots, n$.

Mittelpunkt einer gegebenen Strecke ist konstruierbar.



Gegeben ist die Strecke AB. Man zeichne die Kreise um A und B mit (gleichenm) Radius $|AB|$.
Die Gerade durch Schnittpunkte der Kreise ist die Mittelsenkrechte. Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten mit AB ist der Mittelpunkt von AB.
Solche Konstruktionen (Weitere Beispiele kommen) werden wir "Bausteinkontruktionen" nennen und nachdem wir sie ausführlich beschrieben haben werden wir sie weiter ohne der Beschreibung verwenden)

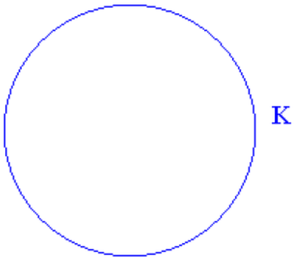
Wir haben mehr gemacht: wir haben die Mittelsenkrechte konstruiert, also die Gerade, die zur gegebenen Strecke orthogonal ist und deren Schnittpunkt der Mittelpunkt der gegebenen Strecke AB ist.
Deswegen ist die Senkrechte durch einen gegebenen Punkt einer gegebenen Geraden konstruierbar (noch eine "Bausteinkontruktion"):



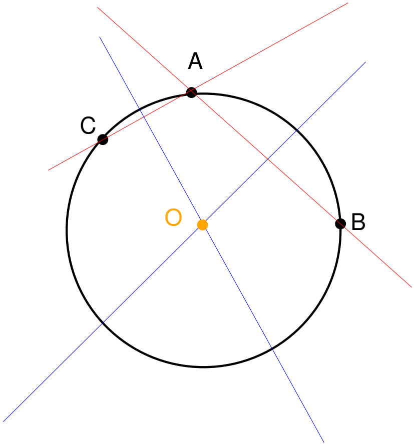
Gegeben sind ein Punkt und eine Gerade. Wir zeichnen einen Kreis mit einem beliebigen Radius um den Punkt. Der Punkt ist dann nach Konstruktion der Mittelpunkt der Stecke mit Endpunkten in den Schnittpunkten des Kreises mit der Geraden.
Für diese Strecke konstruieren wir die Mittelsenkrechte (wie auf vorheriger Folie beschrieben wurde). Sie ist die Gerade, die zur gegebenen Geraden orthogonal ist und durch den gegebenen Punkt geht.
Analog gilt: Lot eines Punktes auf einer Gerade ist konstruierbar.

Mittelpunkt eines Kreises

Gegeben sei ein Kreis K ohne seinen Mittelpunkt. Konstruieren Sie den Mittelpunkt



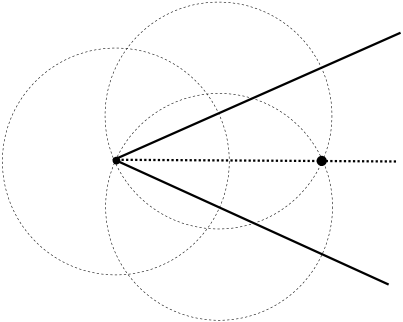
Konstruktion



Man wähle drei Punkte A, B, C auf dem Kreis. Man zeichne die Geraden AB und AC. Man zeichne die Mittelsenkrechte für die Strecken AB und AC. Der Schnittpunkt O der Strecken ist der Mittelpunkt des Kreises.

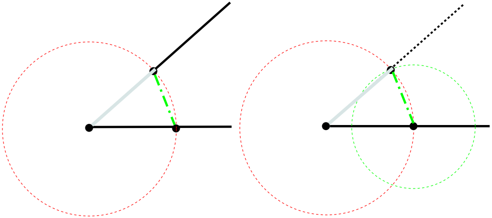
Winkelhalbierende eines gegebenen Winkels ist konstruierbar

Konstruktionsidee: Die beiden Schenkel liegen symmetrisch bzgl. der Winkelhalbierenden.



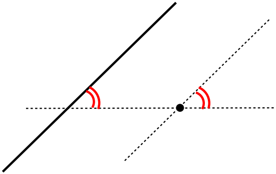
An einem gegebenen Strahl ist vom Anfangspunkt aus der Winkel abzutragen, der die gleiche Größe hat wie ein gegebener Winkel.

Konstruktionsidee: Zu gleichgroßen Sehnen gehören in gleichgroßen Kreisen gleichgroße Mittelpunktswinkel.



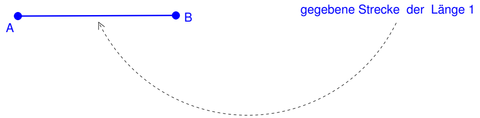
Parallelgerade

Ähnlich: Eine Gerade durch einen gegebenen Punkt, die zu einer gegebenen Geraden parallel ist, ist konstruierbar.

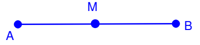


Konstruierbare Zahlen

Def. *Die Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt* *konstruierbar*, *wenn bei gegebener Strecke der Länge 1 eine Strecke der Länge $|a|$ konstruierbar ist.*
Das bedeutet: Als vorgegebenes Objekt auf dem Blatt ist eine Strecke gegeben (also, zwei Endpunkte), deren Länge wir nach Definition gleich 1 setzen. Um eine (positive) Zahl a zu konstruieren, müssen wir mit Zirkel und Lineal und unter Verwendung von den oben erklärten Regeln, eine Konstruktion einer Strecke der Länge $|a|$ beschreiben.
Bsp. Die Zahl $\frac{1}{2}$ ist konstruierbar.

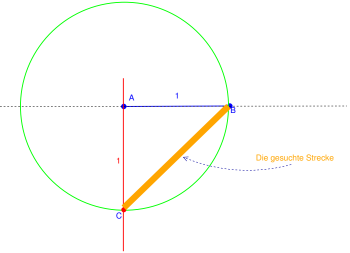


Ziel: konstruieren eine Strecke der Länge 1/2

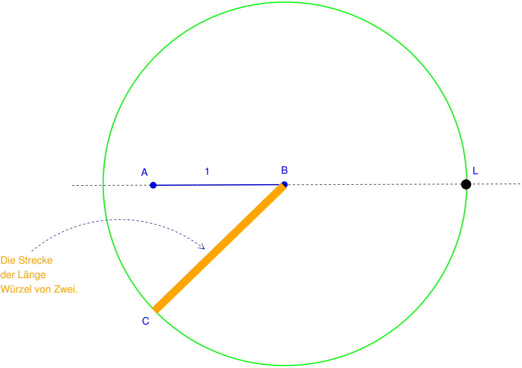


Lösung: man finde den Mittelpunkt M der Strecke (wie oben beschrieben).
Die Strecke AM hat dann die Länge 1/2. Also, wir können (mit Zirkel-Lineal) eine Strecke der Länge 1/2 konstruieren, wenn eine Strecke der Länge 1 vorgegeben ist.

Bsp. Die Zahl $\sqrt{2}+1$ ist konstruierbar



Zuerst konstruieren wir die Strecke der Länge $\sqrt{2}$. Dazu konstruiere man die Gerade durch A, die zu AB orthogonal ist (wie oben beschrieben). Mit Hilfe des Zeichnens eines Kreises vom Radius 1 findet man einen Punkt C auf der Geraden sodass $|AC| = 1$. Dann hat die Strecke CB die Länge $\sqrt{2}$.



Dann „addieren" wir 1 und $\sqrt{2}$: Wir zeichnen einen Kreis um B vom Radius $|BC| = \sqrt{2}$. Einer von den Schnittpunkten L des Kreises mit der Geraden AB hat den Abstand $1+\sqrt{2}$ von A. Also hat die Strecke AL die gesuchte Länge $1+\sqrt{2}$.

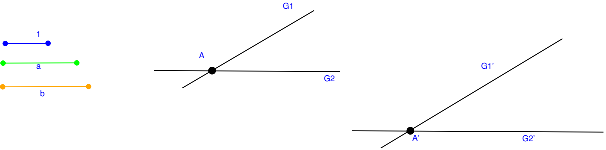
Satz 26 *Sind die Zahlen* $a, b \in \mathbb{R}$ *konstruierbar, so auch die Zahlen* $\underbrace{a+b, a-b, ab, a/b}_{\textit{Körperoperationen}}$ *(falls* $b \neq 0$ *), und* $\sqrt{a}$ *(falls* $a > 0$ *).*

Beweis. Seien Strecken der Längen $1, a, b$ gegeben. Die Konstruktion von Strecken der Längen $a+b$ und $a-b$ (falls $a > b$) ist wie im Bsp. mit $1+\sqrt{2}$ oben und ist trivial. Die Konstruktion von Strecken der Längen a/b und ab läßt sich an den folgenden ähnlichen Dreiecken ablesen: (auf nächste Folie werden wir die Konstruktion der Strecke der Länge a/b ausführlicher angeben)

Solch ein ähnliches Dreieck ist konstruierbar, weil eine Gerade durch einen gegebenen Punkt, die zu einer gegebenen Geraden parallel ist, konstruierbar ist.

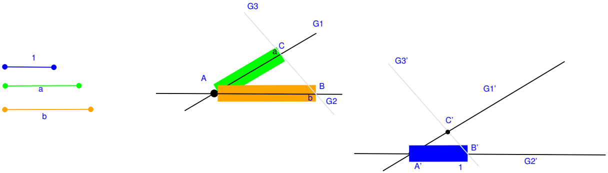
Konstruktion von a/b

Gegeben sind drei Strecken der Längen 1, a und b. Wir müssen die Strecke der Länge a/b konstruieren.



Wir wählen einen Punkt A und konstruieren zwei Geraden, G_1 und G_2 durch A. Dann wählen wir einen anderen Punkt A' und konstruieren zwei Geraden G_1' und G_2' durch A' sodass $G_1 \parallel G_1'$ und $G_2 \parallel G_2'$ ist. Die Konstruktion von solchen Geraden haben wir oben besprochen.

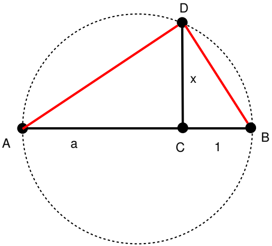
Durch Zeichnen von Kreisen tragen wir die Strecken der Längen 1, a, und b von Punkten A und A' wie auf dem Bild ab.



Die Endpunkte der Strecken bezeichnen wir mit B,B', C wie auf dem Bild.
Dann zeichnen wir die Gerade G_3 durch B und C, und die Gerade G_3', die durch den Punkt B' geht, und parallel zu G_3 ist.
Den Schnittpunkt von G_1' und G_3' bezeichnen wir mit C'. Die Länge von $A'C'$ ist a/b wie wir wollen, weil die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ ähnlich sind, und deswegen $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|A'B'|}{|A'C'|}$, also $\frac{b}{a} = \frac{1}{|A'C'|}$, also $|A'C'| = \frac{a}{b}$ gilt, wie wir wollen.

Konstruktion von $\sqrt{a}$

Konstruiere die Strecke AB der Länge $a+1$.
Konstruiere den Kreis vom Radius $(a+1)/2$ um den Mittelpunkt der Strecke.
Konstruiere die Gerade durch C, die orthogonal zu AB ist. Sei B ein Schnittpunkt der Geraden mit dem Kreis
Die Länge von CD ist $\sqrt{a}$. Tatsächlich ist der Winkel ADB gleich $\frac{\pi}{2}$.



Nach Pythagoras ist

$$\begin{array}{ccccc} |AD|^2 & + & |BD|^2 & = & |AB|^2 \\ x^2 + a^2 & + & x^2 + 1 & = & (a+1)^2. \end{array}$$

Dann $x^2 = a$, also $x = \sqrt{a}$ $\square$

Folgerung *Liegt $a \in \mathbb{R}$ in einer iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$, so ist a konstruierbar.*

Wir wiederholen zuerst die Konstruktion von quadratischen Erweiterungen und besprechen, wie man sie "iteriert".

> **Wicht. Bsp. (Woche 8)** Quadratische Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$.
> Sei $s_1 \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ (später wird vorausgesetzt, dass $s_1 > 0$), sodass $\sqrt{s_1} \notin \mathbb{Q}$.
>
> Setze $\mathbb{Q}(\sqrt{s_1}) := \{x + y\sqrt{s_1} \mid x, y \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}$.

Jetzt nehmen wir $s_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{s_1})$, $s_2 > 0$, sodass $\sqrt{s_2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{s_1})$.
Setze $\mathbb{Q}(\sqrt{s_1})(\sqrt{s_2}) := \{x + y\sqrt{s_2} \mid x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{s_1})\} \subseteq \mathbb{R}$. Wie in der Vorlesung zur Woche 8 kann man zeigen, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{s_1})(\sqrt{s_2})$ ein Körper ist.
Wir können die Konstruktion weiter iterieren: Nehmen wir $s_3 \in \mathbb{Q}(\sqrt{s_1})(\sqrt{s_2})$, $s_3 > 0$, und betrachten
$\mathbb{Q}(\sqrt{s_1})(\sqrt{s_2})(\sqrt{s_3}) := \{x + y\sqrt{s_3} \mid x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{s_1})(\sqrt{s_2})\} \subseteq \mathbb{R}$
u.s.w.
Allgemein gilt: Eine Zahl liegt genau dann in einer iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$, wenn man sie mit Hilfe von endlich vielen Körperoperationen, rationalen Zahlen und quadratischem Wurzelziehen erhalten kann.

Folgerung *Liegt $a \in \mathbb{R}$ in einer iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$, so ist a konstruierbar.*

Beweis: Wie vorher erklärt liegt eine reelle positive Zahl in einer iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$, wenn man die Zahl mit Hilfe von Körper-Operationen, rationellen Zahlen, und quadratischem Wurzelziehen bekommen kann.
(z.B. liegt die Zahl $\frac{(\sqrt{4}+\sqrt{13+\sqrt{23+\sqrt{33}}})}{7+\frac{1}{5}\sqrt{171}}$ in einer iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$).
Im Beweis von Satz 26 haben wir gezeigt, dass wir diese „zulässigen“ Operationen mit Zirkel und Lineal durchführen können (falls eine Strecke der Länge 1 gegeben ist). Die rationellen Zahlen (also die Strecken deren Länge eine beliebige positive rationelle Zahl ist) bekommen wir aus 1 mit Körper-Operationen: Um z.B. die Zahl $2/5$ zu bekommen müssen wir 2 als $1+1$ kontruieren, 5 als $1+1+1+1+1$, und dann 2 durch 5 dividieren. Also ist jedes a aus einer iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$ konstruierbar $\square$

Bemerkung.

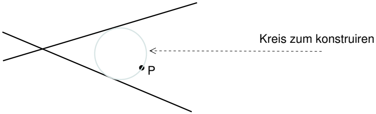
Beweis des Satzes 26 ist konstruktiv – für jede Zahl a aus einer iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$ können wir eine Strecke der Länge $|a|$ wie im Beweis vom Satz 26 konstruieren. Diese Konstruktion ist nicht immer die optimale Konstruktion, wie das Bsp. unten zeigt.

Satz 26 ist eine gewaltige Konstruktionsmethode!

Um eine schwierige Konstruktionsaufgabe zu lösen, können wir wie folgt fortfahren: Wir setzen eine gegebene Strecke gleich 1 und reduzieren (mit Hilfe von Algebra) die Aufgabe zur Konstruktion einer Strecke der Länge aus einer iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$. Dann konstruieren wir diese Strecke wie im Beweis von Satz 26; damit lösen wir die Aufgabe.

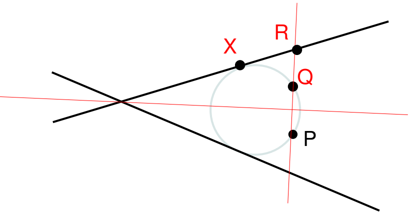
Bsp.

Gegeben sind zwei nichtparallele Geraden und ein Punkt. Man muss einen Kreis konstruieren, der die beiden Geraden berührt und den Punkt enthält.



Die Aufgabe ist nicht besonders einfach; nehmen wir zunächst an, dass Sie nicht sofort eine Lösung gefunden haben. Wie kann man weiter agieren?

Die Aufgabe algebraisch analysieren und Satz 26 anwenden:



Wir betrachten die Winkelhalbierende und die Gerade, die zur Winkelhalbierenden orthogonal ist, und den Punkt P enthält. Die beiden Geraden sind mit Zirkel-Lineal konstruierbar. Dann finden wir den Punkt Q, so dass er die Spiegelung des Punktes P bzgl. der Winkelhalbierenden ist.

Der Punkt Q ist auch mit Zirkel-Lineal konstruierbar und liegt automatisch auf dem gesuchten Kreis. Ausserdem konstruieren wir den Punkt R wie auf dem Bild. Jetzt stellen wir eine Gleichung für die Länge der Strecke RX auf: Nach Sekantensatz haben wir: $|XR|^2 = |RQ| \cdot |RP|$.
Dann gilt $|XR| = \sqrt{|RQ| \cdot |RP|}$.
Die zwei Stecken unter der Wurzel können wir mit Zirkel-Lineal konstruieren. Dann können wir auch die Strecke der Länge $|XR|$ konstruieren, wie wir das im Beweis von Satz 26 gemacht haben (als Strecke der Länge 1 können wir eine beliebige Strecke wählen).
Wenn die Strecke der Länge $|XR|$ konstruiert ist, können wir selbstverständlich den Punkt X finden. Dann ist es einfach, den

Satz 27 . *Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist genau dann konstruierbar, wenn a in einer iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$ enthalten ist.*

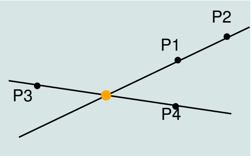
Bemerkung *Ist die Zahl a konstruierbar, so ist bei gegebener Strecke AB auch eine Strecke der Länge $|a| \cdot |AB|$ konstruierbar.*

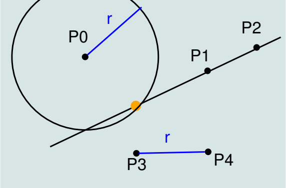
Beweis: „$\Longleftarrow$“ ist Folgerung aus Satz 26. Wir beweisen „$\Longrightarrow$“. Wir werden die Konstruktionsschritte (a)–(e) in Standard-Koordinaten $\binom{x}{y}$ auf $E_2 \equiv \mathbb{R}^2$ nachvollziehen.

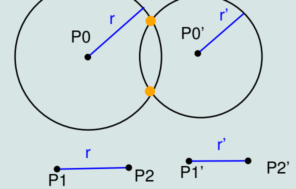
Es genügt zu zeigen: Sind $p_1, \ldots, p_n$ Punkte, deren Koordinaten in einem Körper $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ liegen, und ist der Punkt p aus $p_1, \ldots, p_n$ konstruierbar , so liegen die Koordinaten von p in einer iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{K}$.

Tatsächlich sind oBdA $\binom{0}{0}$ und $\binom{1}{0}$ die Eckpunkte der gegebenen Strecke der Länge 1. Deren Koordinaten liegen also in $\mathbb{Q}$. Falls die Aussage oben richtig ist, liegen die Koordinaten jedes konstruierbaren Punktes in einer iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$. Dann ist die Länge jeder konstruierbaren Strecke gleich

$$\sqrt{\underbrace{(x_1 - x_2)^2}_{\substack{\text{in einer iter.} \\ \text{quadr. Erweiterung von } \mathbb{Q}}} + \underbrace{(y_1 - y_2)^2}_{\substack{\text{in einer iter.} \\ \text{quadr. Erweiterung von } \mathbb{Q}}}} \in \begin{array}{c}\text{iter. quadr.} \\ \text{Erweiterung} \\ \text{von } \mathbb{Q}\end{array}.$$







Es genügt nachzuprüfen, dass:

(i) Schnittpunkt der Geraden $\mathcal{G}_1 := \left\{\binom{x_1}{y_1} + t\binom{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}, \text{ wobei } t \in \mathbb{R}\right\}$ und $\mathcal{G}_2 := \left\{\binom{x_3}{y_3} + s\binom{x_4 - x_3}{y_4 - y_3}, \text{ wobei } s \in \mathbb{R}\right\}$, wobei $x_i, y_i \in \mathbb{K}$, in einer iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{K}$ liegt. (Die Geraden $\mathcal{G}_1$ bzw. $\mathcal{G}_2$ sind die Geraden durch Punkten $\binom{x_1}{y_1}, \binom{x_2}{y_2}$ bzw. $\binom{x_3}{y_3}, \binom{x_4}{y_4}$.)

(ii) Schnittpunkte der Geraden $\mathcal{G}_1 := \left\{\binom{x_1}{y_1} + t\binom{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}, \text{ wobei } t \in \mathbb{R}\right\}$ und des Kreises um $\binom{x_0}{y_0}$, dessen Radius gleich Abstand zwischen $\binom{x_3}{y_3}$ und $\binom{x_4}{y_4}$, wobei $x_i, y_i \in \mathbb{K}$, in einer iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{K}$ liegen.

(iii) Schnittpunkte des Kreises um $\binom{x_0}{y_0}$, dessen Radius gleich Abstand zwischen $\binom{x_1}{y_1}$ und $\binom{x_2}{y_2}$ ist, mit dem Kreis um $\binom{x_0'}{y_0'}$, dessen Radius gleich Abstand zwischen $\binom{x_1'}{y_1'}$ und $\binom{x_2'}{y_2'}$ ist,in einer iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{K}$ liegen (wobei $x_i, y_i, y_i', y_i' \in \mathbb{K}$).

(i)

Falls die Geraden $\mathcal{G}_1 := \left\{ \binom{x_1}{y_1} + t \binom{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}, \text{ wobei } t \in \mathbb{R} \right\}$ und $\mathcal{G}_2 := \left\{ \binom{x_3}{y_3} + s \binom{x_4 - x_3}{y_4 - y_3}, \text{ wobei } s \in \mathbb{R} \right\}$, nicht parallel sind, ist der Schnittpunkt die Lösungsmenge des Systems (auf s, t)

$$\begin{cases} x_1 + t(x_2 - x_1) = x_3 + s(x_4 - x_3) \\ y_1 + t(y_2 - y_1) = y_3 + s(y_4 - y_3) \end{cases},$$

dessen Matrixform

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & -(x_4 - x_3) \\ y_2 - y_1 & -(y_4 - y_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix} \quad \textit{ist}$$

Da die Geraden nichtparallel sind, ist die Koeffizientenmatrix des Systems nichtausgeartet, also ist die Lösung

$$\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & -(x_4 - x_3) \\ y_2 - y_1 & -(y_4 - y_3) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & -(x_4 - x_3) \\ y_2 - y_1 & -(y_4 - y_3) \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -(y_4 - y_3) & (x_4 - x_3) \\ -(y_2 - y_1) & (x_2 - x_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix}$$

Wir sehen, dass die Koordinaten des Schnittpunkts in $\mathbb{K}$ liegen.

(ii)

Man betrachte den Kreis um $\binom{x_0}{y_0}$ mit Radius
$r = \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2}$. Da $(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 \in \mathbb{K}$, liegt r in einer quadratischen Erweiterung von $\mathbb{K}$ (in $\mathbb{K}$ oder in $\mathbb{K}(\sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2})$).
Der Schnittpunkt der Geraden $\mathcal{G} := \{\binom{x_1}{y_1} + t\binom{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}, \text{wobei } t \in \mathbb{R}\}$ mit dem Kreis ist der Punkt der Form $\binom{x_1}{y_1} +$ t $\binom{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$, der auf dem Kreis liegt, i.e.

$$(x_0 - x_1 - t(x_2 - x_1))^2 + (y_0 - y_1 - t(y_2 - y_1))^2 = r^2.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung $at^2 + bt + c = 0$ auf t, deren Koeffizienten a, b, c Elemente von $\mathbb{K}$ oder $\mathbb{K}(r)$ sind.

Deren Lösungen sind $t_\pm = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}$. Sie liegen in einer iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{K}$.
Die Schnittpunkte der Geraden $\mathcal{G}_1$ und des Kreises sind die Punkte $\binom{x_1}{y_1} +$ $t_\pm \binom{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$. Deren Koordinaten liegen in einer iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{K}$.

(iii)

Den Kreis um $\binom{x_0}{y_0}$ (bzw. um $\binom{x_0'}{y_0'}$) dessen Radius gleich dem Abstand r zwischen $\binom{x_1}{y_1}$ und $\binom{x_2}{y_2}$ (bzw. dem Abstand r' zwischen $\binom{x_1'}{y_1'}$ und $\binom{x_2'}{y_2'}$) ist, ist die Lösungsmenge der Systems

$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0, \\ (x - x_0')^2 + (y - y_0')^2 - r'^2 = 0. \end{cases}$$

Subtraktion ergibt

$$2x(x_0 - x_0') + 2y(y_0 - y_0') + (r^2 - x_0^2 - y_0^2) - (r'^2 - {x_0'}^2 - {y_0'}^2) = 0.$$

Da wir o.B.d.A. $(x_0, y_0) \neq (x_0', y_0')$ annehmen können, können wir y durch x (oder x durch y) ausdrücken, dies in eine der Kreisgleichungen einsetzen und dann die entstehende quadratische Gleichung lösen. In jedem Fall sind, um die Koordinaten der konstruierten Punkte aus den Koordinaten der gegebenen Punkte zu berechnen, nur rationale Operationen und das Ziehen einer Quadratwurzel erforderlich. Darum liegen Sie in einer iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{K}$. $\square$

Bsp: Konstruierbare komplexe Zahlen und Konstruktion von regelmäßigen 5-Eck

Wir sagen, dass eine komplexe Zahl $a + ib$ konstruierbar ist, wenn a und b konstruierbare Zahlen sind.
Wir wollen zeigen, dass ein regelmäßiges Fünfeck mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.
Die Schlüsselaussage ist wie folgt:

Aussage: Die Zahl $e^{\frac{2\pi}{5}i}$ ist konstruierbar.

Bemerkung. Aus der Konstruierbarkeit von $e^{\frac{2\pi}{5}i}$ folgt, nach der Definition oben, die Konstruierbarkeit von $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ und $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. Damit kann man einen Winkel der Größe $\frac{2\pi}{5}$ konstruieren, da man ein rechtwinkliges Dreieck mit vorher konstruierbaren Katheten $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ und $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ offensichtlich mit Zirkel-Lineal konstruieren kann. Mit Hilfe dieses Winkels kann man das regelmäßige Fünfeck konstruieren.

Aussage: Die Zahl $e^{\frac{2\pi}{5}i}$ ist konstruierbar.

Zuerst eine Beobachtung. *$z := e^{\frac{2\pi}{n}i} \in \mathbb{C}$ ist eine Nullstelle der Gleichung*

$z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + 1 = 0.$ $\qquad (*)$

Tatsächlich: $1, z, z^2, \ldots, z^{n-1}$ ist eine geometrische Progression, deren Summe $\frac{z^n-1}{z-1} = \frac{\left(e^{\frac{2\pi}{n}i}\right)^n-1}{e^{\frac{2\pi}{n}i}-1} = \frac{\left(e^{2\pi i}\right)-1}{e^{\frac{2\pi}{n}i}-1} = \frac{1-1}{e^{\frac{2\pi}{n}i}-1} = 0$ ist.

Aussage: Die Zahl $e^{\frac{2\pi}{5}i}$ ist konstruierbar.

Beweis der Aussage oben (wir beweisen eigentlich, dass alle Nullstellen der Gleichung $(*)$ konstruierbar sind). Für $n = 5$ lautet die Gleichung $(*)$
$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$. Wir können diese Gleichung vollständig lösen (weil das Polynom Grad 4 hat, gibt es höchstens 4 Lösungen, und wir werden sie alle finden). Es wird klar, dass die Lösungen mit Hilfe der „erlaubten Operationen" (=Körperoperationen und Wurzelziehen) aus der Zahl 1 entstehen. Daher ist die Zahl konstruierbar.

Wir dividieren die Gleichung $(*)$ durch z^2 und bekommen
$z^2 + \frac{1}{z^2} + 2 + z + \frac{1}{z} - 1 = 0$ Da $(z + \frac{1}{z})^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2$, ist die Gleichung äquivalent zu
$w^2 + w - 1 = 0$, wobei $w = z + \frac{1}{z}$. Durch Einsatz der pq-Formel (für die Lösung einer quadratischen Gleichung) bekommen wir
$w = \frac{\pm\sqrt{5}-1}{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Dann ist

$$z + \frac{1}{z} = \frac{\pm\sqrt{5} - 1}{2} \quad (**)$$

$$z + \frac{1}{z} = \frac{\pm\sqrt{5}-1}{2} \quad (**)$$

Die Gleichung $(**)$ ist äquivalent zur quadratischen Gleichung

$$z^2 - \frac{\pm\sqrt{5}-1}{2} z + 1 = 0. \quad (***)$$

Die Nullstellen davon sind ebenfalls mit Hilfe der *pq*-Formel zu finden.
Die *pq*-Formel benutzt nur Körperoperationen und Wurzelziehen.
Die Koeffizienten der quadratischen Gleichung liegen in $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, deswegen liegen die reellen und imaginären Teile der Lösungen in $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ oder in einer quadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.
Dann haben die Nullstellen die Form $z = a + ib$, wobei a in $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ oder in einer quadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ liegt.
Da nach der Beobachtung oben $z = e^{\frac{2\pi}{5}i} = \cos(\frac{2\pi}{5}) + i\sin(\frac{2\pi}{5})$ eine Nullstelle ist, ist $\cos(\frac{2\pi}{5})$ ein Element von $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ oder einer quadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\square$

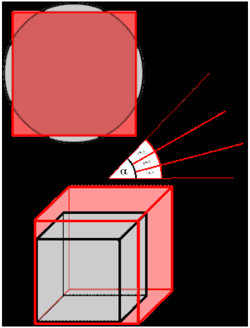
Bemerkung. Die quadratische Gleichung $(***)$ ist eigentlich zwei verschiedenen quadratischen Gleichungen, weil Vorzeichen $\pm$ könnten "$+$" und "$-$" sein. Jede davon hat 2 Lösungen, nach *pq*-Formel. Wir haben also alle 4 Lösungen konstruiert.

Folgerung (bereits vor zwei Folien besprochen). Ein regelmäßiges 5-Eck ist konstruierbar.

Plan

Wir werden

1. Unmöglichkeit der Konstruktion von $7-$Eck und $9-$Eck beweisen
2. Unmöglichkeit von 3 anderen klassischen Konstruktionsproblemen

   besprechen: 

   - die *Dreiteilung des Winkels beweisen*,
   - die *Verdoppelung des Würfels (Delisches Problem) beweisen*
   - und die *Quadratur des Kreises* (nur) besprechen.

Frage Wie beweist man, dass eine Zahl nicht in einer iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$ liegt?
Def. *Eine kubische Gleichung* $x^3 + \ell x^2 + mx + n = 0$ *heißt irreduzibel, wenn die Koeffizienten* ℓ, m, n *rational sind, aber keine Lösung der Gleichung rational ist.*
Satz 28 *Ist die Zahl* x *Lösung einer irreduziblen kubischen Gleichung*

$$x^3 + \ell x^2 + mx + n = 0, \tag{1}$$

so liegt x *nicht in einer iterierten quadratischen Erweiterung von* $\mathbb{Q}$*.*
Def. vor dem Beweis *Liegt* y *in einem Körper, der durch* k*-malige quadratische Erweiterung aus* $\mathbb{Q}$ *entsteht, so sagen wir,* y *sei auf dem Niveau* k*.*
Bsp. $1/2$ ist auf dem Niveau 0, $1 + \sqrt{3}$ ist auf dem Niveau 1.

Widerspuchsbeweis. Angenommen, eine Lösung der Gleichung (1) läge in einer iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$. Sei x_1 die Lösung von (1), die auf dem kleinstem Niveau k ist. Da $x_1 \notin \mathbb{Q}$, ist $k \geq 1$.Es gilt also $x_1 = a + b\sqrt{s}$ mit geeigneten Zahlen a, b, s aus der iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$ mit Niveau $k-1$. Wir setzen dies in (1) ein und erhalten

$$(a+b\sqrt{s})^3 + \ell(a+b\sqrt{s})^2 + m(a+b\sqrt{s}) + n =$$
$$\underbrace{(a^3+3ab^2s+a^2\ell+b^2s\ell+ma+n)}_{A \text{ auf dem Niveau } k-1} + \underbrace{(3a^2b+b^3s+2ab\ell+bm)}_{B \text{ auf dem Niveau } k-1}\sqrt{s} = 0.$$

Ist $B \neq 0$, so ist $\sqrt{s}$ auf dem Niveau $k-1$ (weil $\sqrt{s} = -A/B$ ist, und deswegen auf dem Niveau $k-1$ liegen muss), also ist x_1 auf dem Niveau $k-1$, was den Voraussetzungen widerspricht. Dann ist $A = B = 0$, und deswegen $x_2 := a - b\sqrt{s}$ auch eine Nullstelle der Gleichung (1), denn es ist

$$\begin{aligned} & x_2^3 + \ell x_2^2 + m x_2 + n \\ = \; & (a^3+3ab^2s+a^2\ell+b^2s\ell+ma+n) - (3a^2b+b^3s+2ab\ell+bm)\sqrt{s} = 0. \end{aligned}$$

Nach Satzgruppe von Viëta ist die Summe der drei Nullstellen von (1) gleich $-\ell$, also ist $-\ell - 2a$ ebenfalls eine Nullstelle. Sie ist auf dem Niveau $k-1$. Das ist ein Widerspruch. $\square$

Folgerung *Um zu beweisen, dass eine Zahl nicht konstruierbar ist, können wir zeigen, dass die Zahl eine Nullstelle einer irreduziblen kubischen Gleichung ist.*

Satz 29 *Sei $x^3 + \ell x^2 + mx + n = 0$ eine kubische Gleichung s.d. $\ell, m, n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:*
Diese Gleichung ist g.d. irreduzibel, wenn sie keine ganzzahlige Lösung hat.

Beweis. „$\Longrightarrow$“ ist offensichtlich: ist die Gleichung irreduzibel, so sind nach Def. die Lösungen irrational.

Widerspuchsbeweis in „$\Longleftarrow$“ Angenommen, die Gleichung ist nicht irreduzibel, obwohl keine Lösung ganzahlig ist. Dann gibt es eine rationale Lösung $x = r/s$, wobei $r, s \in \mathbb{Z}$. OBdA ist $ggT(r, s) = 1$. Einsetzen in die Gleichung ergibt $r^3 = -s(\ell r^2 + smr + ns^2)$. Ist $|s| > 1$, so hat s einen Primfaktor p. Dieser muss auch Primfaktor von r^3 sein, und damit von r, ein Widerspruch. Also ist $s = 1$ und daher x ganzzahlige Lösung, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Reguläres 7-Eck ist nicht konstruierbar

Nach Satz 27 müssen wir zeigen, dass $\cos(\frac{2\pi}{7})$ in keiner iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$ liegt. Wir bemerken, dass die Zahlen $2\cos(\frac{2\pi}{7})$, $2\cos\frac{4\pi}{7}$ und $2\cos\frac{6\pi}{7}$ die Lösungen der Gleichung

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0 \tag{2}$$

sind. Mann kann es rechnerisch nachweisen: man setze diese Zahlen in Gleichung (2) und benutze trigonometrische Formeln. Auf der nächsten Folie erkläre ich wie man diese Gleichung gefunden kann.

Die Gleichung ist irreduzibel, weil alle Nullstellen ($2\cos(\frac{2\pi}{7})$, $2\cos\frac{4\pi}{7}$ und $2\cos\frac{6\pi}{7}$) nicht ganzzahlig ist. Deswegen ist $2\cos(2\pi 7)$ nicht konstruierbar. Dann ist auch $\cos(\frac{2\pi}{7})$ nicht konstruierbar. Damit ist bewiesen, dass man das regelmaßigen 7-Eck nicht konstruieren kann.

Erklärung wie wir die Gleichung $y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$ und deren Nullstellen gefunden habe

Es ist klar dass $e^{\frac{2\pi}{7}i} = \cos(\frac{2\pi}{7}) + i\sin(\frac{2\pi}{7})$ eine Lösung der Gleichung

$$z^6 + z^5 + ... + 1 = 0$$

ist. Weil $e^{\frac{2\pi}{7}i}$ die Lösung von $z^7 - 1 = 0$ ist, und $(z^7 - 1) = (z - 1)(z^6 + z^5 + ... + 1)$.

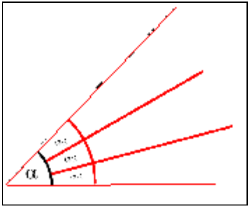
Die Gleichung $z^6 + z^5 + ... + 1 = 0$ is äquivalent zur $z^3 + z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} = 0$.

Man kann die letzte Gleichung in der Form $y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$ schreiben mit $y := z + \frac{1}{z}$ (setzen Sie $y := z + \frac{1}{z}$ in $y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$ ein um es zu sehen). Dann ist

$$y_1 := z_1 + \frac{1}{z_1} = e^{i2\pi/7} + e^{-i2\pi/7} = 2\cos\frac{2\pi}{7}$$

eine Lösung von (2). Die Lösungen von (2) sind neben $2\cos\frac{2\pi}{7}$ noch die Zahlen $2\cos\frac{4\pi}{7}$ und $2\cos\frac{6\pi}{7}$ (die man genauso findet).

Dreiteilung des Winkels



Dieses klassische Problem der griechischen Geometrie fragt, ob man einen beliebigen Winkel mit Hilfe von Zirkel und Lineal allein, in drei gleiche Abschnitte teilen kann. Wir werden zeigen, dass diese Aufgabe unlösbar ist (= nicht für alle Winkel lösbar ist). Einige spezielle Winkel lassen sich jedoch sehr wohl in drei gleiche Abschnitte teilen.

• Dreiteilung des 135°-Winkels ist möglich, weil $135 : 3 = 45$ und Winkel 45° konstruierbar ist.

• Dreiteilung des 90°-Winkels ist ebenfalls möglich, weil $90 : 3 = 30$, und Winkel 30° ist konstruierbar mit Hilfe von Winkelhalbierenden des regelmässigen Dreiecks.

• Dreiteilung des 45°-Winkels ist ebenfalls möglich, weil $45 : 3 = 15$, und Winkel 15° ist konstruierbar mit Hilfe von Winkelhalbierenden des Winkels 30°.

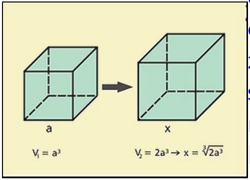
Problem: *Kann man einen beliebigen gegebenen Winkel mit Zirkel und Lineal dreiteilen?*
Antwort: Nein.
Wäre die Winkeldreiteilung mit Zirkel und Lineal lösbar,so wäre insbesondere der Winkel $\pi/9$ konstruierbar, damit wäre $\cos(\pi/9)$ konstruierbar. Wegen der Identität
$\cos 3\theta = \cos 2\theta \cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta =$
$(2cos^2\theta - 1)cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$
und wegen $\cos\frac{\pi}{3} = 1/2$ genügt die Zahl $c = 2\cos\frac{\pi}{9}$ der Gleichung

$$c^3 - 3c - 1 = 0.$$

Diese Gleichung hat keine ganzzahligen Lösungen(denn jede Lösung x erfüllt $x(x^2-3) = 1$,aber $x = \pm 1$ ist keine Lösung).Nach Satz 30 ist die Gleichung dann irreduzibel,und deswegen ist nach Satz 29 die Zahl $\cos(\pi/9)$ nicht konstruierbar. Die Unlösbarkeit der Winkeldreiteilung ist damit gezeigt.Zugleich ist mit diesem Beweis gezeigt, daß das reguläre 9-Eck nicht konstruierbar ist.

Verdoppelung des Würfels (Delisches Problem)

(Konstruktion eines Würfels mit dem doppelten Volumen eines vorgegebenen Würfels)



Gezeichnet von Gericke Helmut

Der Sage nach wurde die Stadt Delos einmal von einer Seuche heimgesucht. Die Bewohner befragten ein Orakel und erhielten den Rat, einen ihrer Altäre zu verdoppeln. Plato interpretierte den Orakelspruch so, dass der würfelförmige Altar durch einen Würfel mit doppeltem Volumen ersetzt werden sollte. Er erklärte, Gott wolle die Griechen beschämen, weil sie das Studium der Mathematik vernachlässigt hätten. Daher ist die Verdopplung des Würfels auch als „Delisches Problem" bekannt.

Wäre es lösbar, so könnte man aus einer Strecke der Länge 1 eine Strecke der Länge $\sqrt[3]{2}$ konstruieren. Nach Satz 27 liegt dann $\sqrt[3]{2}$ in einer iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$. Da $\sqrt[3]{2}$ eine Lösung der kubischen Gleichung

$$x^3 - 2 = 0$$

und diese nach Satz 30 irreduzibel ist,ist das ein Widerspruch zu Satz 29.

Quadratur des Kreises (ohne Beweis)

Aufgabe: *Mit Lineal und Zirkel aus einem gegebenen Kreis ein Quadrat mit demselben Flächeninhalt zu konstruieren.*
Satz (Lindemann 1882) *Das ist unmöglich*

Beweisidee: Wir müssen zeigen,daß die Zahl π in keiner iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$ liegt. Dies folgt daraus,

- daß π transzendent ist (=Nullstelle von keinem Polynom mit rationellen Koeffizienten),
- jede konstruierbare Zahl algebraisch (=nicht tranzendent) ist.

Mit diesem Nachweis wurde das Problem der Quadratur des Kreises endgültig erledigt. Wir werden diese Aussage nicht beweisen. Beweis ist eher analytisch, und nicht algebraisch.