Plan

- Definition des metrischen Raums und erste Eigenschaften.
- Einfachste Beispiele

Definition von Metrik

Def. Ein Metrischer Raum besteht aus einer nichtleeren Menge X und aus einer Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$ sodass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

- $\forall\ x, y \in X$ gilt: $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
- $\forall\ x, y \in X$ gilt: $d(x, y) = d(y, x)$.
- $\forall\ x, y, z \in X$ gilt: $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

Bemerkung. Die Elemente von X heißen Punkte. Die Funktion d heißt Metrik oder, umgangssprachlich, Abstandsfunktion. Der Wert dieser Funktion auf Punkten x, y heisst dann Abstand zwischen x und y. Die drei Eigenschaften in der Definition heißen umgangssprachlich Axiome.

Auf den nächsten Folien werde ich mit der Definition spielen.

Das erste Axiom,

$$\forall\ x, y \in X \quad \text{gilt:} \quad d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y.$$

heißt Definitheits-Axiom oder sogar Positive-Definitheits-Axiom.

Das zweite Axiom,

$$\forall\ x, y \in X \ \ \text{gilt:}\ \ d(x, y) = d(y, x),$$

heisst Symmetrie-Axiom oder auch Symmetrie-Eigenschaft.

Das dritte Axiom,

$$\forall\, x, y, z \in X \text{ gilt }\; d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z).$$

heisst Dreiecksungleichung. Selbstverständlich gibt es in einer beliebigen Menge X keine Strecken, und 'Dreieck' ist nur ein Tripel von Punkten (die auch zusammenfallen dürfen).

Die Ungleichung sagt, dass die Summe von zwei 'Seiten', also Abstand von x bis y plus Abstand von y bis z nicht kleiner ist, als die dritte Seite (also der Abstand von x bis z).

Nichtnegativheit der Abstandfunktion

Satz 1. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$.

Bemerkung. Die Nicht-Negativität wird in einigen Bücher als zusätzliche Eigenschaft in der Definition angegeben, Satz 1 behauptet, dass sie aus den anderen Bedingungen folgt. Sie ist daher überflüssig:

$$2d(x,y) = d(x,y) + d(x,y) \overset{\textbf{(Symmetrie)}}{=} d(x,y) + d(y,x)$$
$$\overset{\textbf{(Dreiecksungleichung)}}{\geq} d(x,x) \overset{\textbf{(Definitheit)}}{=} 0$$
$$\Rightarrow d(x,y) \geq 0.$$

Standardbezeichnungen aus der Literatur.

Die Abstandfunktion bezeichne ich standardmässig mit d (oder etwa d_1 wenn noch eine Abstandfunktion auf der gleichen Menge X gegeben ist). Wenn ich verschiedene Metrische Raumen betrachte, etwa X, Y, Z, werde ich die Bezeichnungen d_X, d_Y, d_Z für die Abstandfunktion auf X, Y, Z benutzen.

In der Literatur benutzt man auch den Buchstabe ρ für die Abstandfunktion sowie die elementrageometriesche Bezeichnung $d(x, y) = |xy|$. Ich werde diese Bezeichnungen auch ab und zu benutzen. Der psychologische Vorteil der letzten 'Betrag'-Bezeichnung ist, dass in dieser Bezeichnung die Dreiecksungleichung wie die Ungleichung für den Betrag einer Summe aussieht: vergleichen Sie

$$\begin{aligned} |xz| &\leq |xy| + |yz| \\ |x - z| &\leq |x - y| + |y - z| \end{aligned}$$

Ich werde gleich diese zweite Bezeichnung für die Abstandfunktion benutzen.

Satz 2. (Vieleckungleichung) Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x_1, ..., x_n \in X$, $n \geq 2$. Dann gilt:

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + ... + d(x_{n-1}, x_n).$$

(oder, in der 'Betrag'-Bezeichnung:

$$|x_1 x_n| \leq |x_1 x_2| + |x_2 x_3| + ... + |x_{n-1} x_n|.)$$

Beweis ist eine Übung für Sie. Tipp: Induktionsbeweis. Basis der Induktion ist $n = 2$. Induktionsschritt ist mit Hilfe Dreiecksungleichung zu machen.

- 'Metrischer Raum' ist eines der wichtigsten Objekte in der Mathematik. Sie haben die Definition bestimmt in der Linearen Algebra und analytischen Geometrie und in der Analysis gesehen.
- Mehrere nichttriviale Anwendungen in der Geometrie und in der Analysis werde ich in meinem Kurs zeigen.
- Die metrischen Räume spielen auch eine wichtige Rolle auch in der Informatik, in der Wahrscheinlichkeitstheorie und allgemein in der angewandten Mathematik. Diese Anwendungen werden wir jedoch nicht betrachten.
- Bei solchen vieleinsätzbaren Objekten ist es sinnvoll, die allgemeine Theorie zu entwickeln und nicht jedes mal die gleichen Aussagen in verschiedenen Mathematik- und Anwendungsbereichen zu beweisen.

Beispiele

- Diskreter (trivialler) metrischer Raum.

  Sei X eine beliebige Menge. Definiere die Abstandfunktion wie folgt:

  $$\forall x \in X \;\; d(x,x) = 0 \;\; \text{und} \;\; \forall x, y \in X \text{ mit } \; x \neq y \;\; d(x,y) = 1.$$

  Das ist eine Metrik; die Axiomen der metrischen Raum sind einfach zu überprüfen.

- Ein wichtiges Beispiel ist $\mathbb{R}$ (reelle Gerade) mit dem Abstand:

  $$d(x,y) = |x - y|.$$

  Hier $x, y \in \mathbb{R}$, sind also übliche reelle Zahlen, und 'Betrag' $| \cdot |$ ist der Betrag von reellen Zahlen.

  Die Axiome eines metrischen Raumes sind wieder einfach zu überprüfen.

Ein wichtiges Beispiel für die Intuition ist die Ebene (aus der Schulgeometrie). In diesem Fall ist die "Abstandfunktion" der übliche Abstand auf der Ebene, gemessen z.B. mit einem Lineal.

- Selbstverständlich ist es schwierig, die Lineal-Messung mathematisch zu formalisieren; es gibt Methoden (man führt Axiome der Ebene ein (Euklid-Axiome), und entwickelt dann in Rahmen eines 4+2-Kurses die ganze Theorie; am Ende der Theorie wird diese Lineal-Messung mathematisch-korrekt eingeführt. Dafür haben wir leider keine Zeit.

- Alternative Methoden, die Ebene einzuführen, welche ich z.B. in meinem Kurs Geometrie für Lehramt benutze, ist die Ebene als $\mathbb{R}^2$ zu verstehen. In diesem Fall ist die Abstandsfunktion gegeben durch der Pythagoras-Formel: für zwei Punkten $p_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ definiere
$$d\left(p_1, p_2\right) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$
Das ist eine Metrik: die Definitheit und Symmetrie sind offensichtlich. Die Dreiecksungleichung wurde in der Lineare Algebra gezeigt, mit Hilfe der Cauchy-Ungleichung. In der Analysis hat man diese Ungleichung auch gezeigt; ich weiss nicht, welche Methode Sie gesehen haben.