Plan

- Weitere Beispiele von metrischen Räumen.

Induzierte Metrik

Def. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$ eine nichtleere Teilmenge von X. Wir definieren eine Abstandsfunktion auf Y wie folgt:

$$\forall x, y \in Y \;\; d_Y(x, y) = d_X(x, y).$$

Mit anderen Worten: d_Y ist die Beschränkung der Funktion d_X (welche auf $X \times X$ definiert ist) auf $Y \times Y$:

$$d_Y = d_{X\,|\,Y \times Y}.$$

Alle Axiome sind erfüllt, weil es sich bei allen Axiomen um eine Eigenschaft von einem beliebigen Punkt (Definitheit), zwei Punkten (Symmetrie) oder drei Punkten (Dreiecksungleichung) handelt. Alle Axiomen sind erfüllt für alle x bzw. x, y, bzw. x, y, z aus dem größeren Raum X. Dann sind sie auch für alle x, y, z aus dem kleineren Teilraum Y erfüllt.

Bemerkung. Wenn nichts gesagt wird und wir eine Teilmenge eines metrischen Raums betrachten, wird immer die induzierte Metrik benutzt.

Direktes (euklidsches) Produkt von metrischen Räumen

Wir betrachten zwei metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y). Auf dem Produkt $X \times Y$ definieren wir die Funktion $d : (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}$.

$$d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2}.$$

Satz 3/Definition. Die oben eingeführte Funktion d ist eine Metrik, d.h., sie erfüllt die Axiome aus der Definition 'Metrischer Raum'. Diese Metrik heißt (euklidsche) Produktmetrik.

Bsp. Falls $X = Y = \mathbb{R}$ mit der Standard-Abstandfunktion ist, ist die Funktion d genau die Abstand auf der Ebene$= \mathbb{R}^2$.

Beweis vom Satz 3

$$\boxed{d\left(\binom{x_1}{y_1},\binom{x_2}{y_2}\right)=\sqrt{d_X(x_1,x_2)^2+d_Y(y_1,y_2)^2}.}$$

Symmetrie und Definitheit sind offensichtlich. Wir müssen nur die Dreiecksungleichung beweisen. D.h., für je drei Punkte

$$p_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\quad p_2=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix},\ p_3=\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}\in X\times Y$$

wir müssen die folgende Ungleichung beweisen:

$$\sqrt{d_X(x_1,x_3)^2+d_Y(y_1,y_3)^2}$$

$$\leq\sqrt{d_X(x_1,x_2)^2+d_Y(y_1,y_2)^2}+\sqrt{d_X(x_2,x_3)^2+d_X(y_2,y_3)^2}$$

$$\boxed{\sqrt{d_X(x_1,x_3)^2+d_Y(y_1,y_3)^2} \le \sqrt{d_X(x_1,x_2)^2+d_Y(y_1,y_2)^2}+\sqrt{d_X(x_2,x_3)^2+d_Y(y_2,y_3)^2}}$$

Wir benutzen jetzt die Dreiecksungleichung in den Räumen X und Y und sehen, dass

$$d_X(x_1,x_3) \le d_X(x_1,x_2)+d_X(x_2,x_3) \text{ und } d_Y(y_1,y_3) \le d_Y(y_1,y_2)+d_Y(y_2,y_3).$$

Daraus folgt:

$$d_X(x_1,x_3)^2+d_Y(y_1,y_3)^2 \le \left(d_X(x_1,x_2)+d_X(x_2,x_3)\right)^2+\left(d_Y(y_1,y_2)+d_Y(y_2,y_3)\right)^2$$

Also genügt es zu zeigen, dass

$$\sqrt{\left(d_X(x_1,x_2)+d_X(x_2,x_3)\right)^2+\left(d_Y(y_1,y_2)+d_Y(y_2,y_3)\right)^2} \le$$
$$\le \sqrt{d_X(x_1,x_2)^2+d_Y(y_1,y_2)^2}+\sqrt{d_Y(x_2,x_3)^2+d_Y(y_2,y_3)^2}.$$

Wir nennen $d_X(x_1,x_2)=a$, $d_Y(y_1,y_2)=b$, $d_X(x_1,x_3)=c$ und $d_Y(y_1,y_3)=d$. Dann wird die letzte Ungleichung oben wie folgt umgeschrieben:

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \le \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}.$$

Also, genügt es, die letzte Ungleichung für die beliebige (nichtnegative) Zahlen a,b,c,d zu zeigen

Wir müssen noch zeigen, dass für beliebigen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}.$$

Das ist aber die Dreiecksungleichung auf der Ebene, für das Dreieck mit Ecken $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, und $\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$.

Satz 3 ist damit bewiesen.

Direktes Produkt von mehreren metrischen Räumen

Wir haben gerade das Produkt von zwei metrischen Raumen definiert. Diese Konstruktion kann man benutzen, um das Produkt von n metrischen Raume zu definieren: wir setzen

$$X_1 \times X_2 \times ... \times X_n = (...(X_1 \times X_2) \times X_3) \times ... \times X_n).$$

(D.h., wir 'lesen' Produkt von links nach rechts)
Diese formale Definition ist mathematisch einwandfrei; z.B. ist es klar, dass das Ergebnis ein metrischer Raum ist; man kann aber befürchten, dass die Formel für die Abstandfunktion zu kompliziert ist. Das ist aber nicht der Fall: sie ist relativ einfach.
Lassen Sie uns es im Fall $n = 3$ sehen:

$$d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = \sqrt{\left(d_{X\times Y}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)\right)^2 + (d_Z(z_1, z_2))^2} =$$

$$= \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2 + d_Z(z_1, z_2)^2}.$$

Man kann relativ leicht zeigen (z.B. Induktionsbeweis), dass die Formel für das Produkt von n metrischen Räumen wie folgt ist:

$$d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_{X_i}(x_i, y_i)^2}.$$

Im Fall $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ mit der Standard-Metrik $d_{\mathbb{R}}(x, y) = |x - y|$ auf jedem $\mathbb{R}$, bekommen wir dann die Standardmetrik auf $\mathbb{R}^n$:

$$d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Noch zwei Beispiele

$$d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

In $\mathbb{R}^n$ betrachten wir die folgenden zwei Abstandsfunktionen, d_1 und d_∞:

$$d_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

$$d_\infty\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \max_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

Es ist relativ einfach zu zeigen, dass diese Funktionen d_1 und d_∞ die Axiome von metrischen Räumen erfüllen, es ist eine Übung für Sie.