Ziel: Topologische Begriffe (etwa aus Analysis) wiederholen

- Bälle
- Offene Mengen
- Beschreiben von offenen Mengen auf $\mathbb{R}$.

Bälle

Def. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$. Sei $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Wir definieren den offenen und den abgeschlossenen Ball durch die Formeln:

$$B_r(x) = \{y \in X | d(x, y) < r\}, \quad \bar{B}_r(x) = \{y \in X | d(x, y) \leq r\}.$$

Die beide Bälle sind nichtleer, weil ich $r > 0$ vorausgesetzt habe; sie enthalten deswegen den Punkt x selbst, weil $d(x, x) = 0 < r$. Für die Standard-Metrik auf $\mathbb{R}^n$ ist der 1-Ball (d.h. mit $r = 1$) der 'gewöhnliche' Ball mit Radius 1.

Übung, die wir jetzt zusammen machen: wir malen die 1-Bälle in $\mathbb{R}^2$ für die Metriken d_1 und d_∞.

$$B_r(x) = \{y \in X \,|\, d(x,y) < r\}, \quad \bar{B}_r(x) = \{y \in X \,|\, d(x,y) \leq r\}.$$

$$d_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

$$d_\infty\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \max_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

Abstand zwischen Punkt und einer Menge

Def. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $A \subseteq X$. Wir definieren den Abstand eines Punktes x zur Teilmenge A wie folgt:

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) | a \in A\}.$$

(ich benutze den gleichen Buchstaben für den Abstand von Punkt und Menge, wie für für den Abstand zwischen zwei Punkten.)

Bemerkung. Für $A = \varnothing$ ist $d(x, A) = +\infty$.

Def. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $r > 0$, $A \subseteq X$.
Die r-Umgebung von A ist die folgende Teilmenge von X:

$$U_r(A) = \{x \in X | d(x, A) < r\}.$$

Bsp. Falls A aus einem Punkt x besteht, ist $U_r(A) = B_r(x)$.

Durchmesser (Diameter)

Def. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir defininieren Durchmesser (Diameter) von A wie folgt:

$$diam(A) = \sup\{d(x, y) | x, y \in A\}.$$

Der Durchmesser kann durchaus gleich $+\infty$ sein.

Eine Menge heißt beschränkt, falls der Durchmesser endlich ist.

Hausaufgabe. Die Vereinigung von zwei beschränkten Mengen ist beschränkt.

Offene Mengen

Def. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$.
A heisst offen, wenn die folgende Eigenschaft erfüllt ist:

$$\forall a \in A \ \exists r > 0 \mid B_r(a) \subseteq A.$$

Beispiele:

- $A = X$ ist offen.
- $A = \varnothing$ ist offen.
- Offene Bälle sind offen. Wir beweisen es:
  Wir nehmen $B_r(p)$; sei $x \in B_r(p)$; wir müssen jetzt $r_1 > 0$ finden, sodass $B_{r_1}(x) \subseteq B_r(p)$.
  Ich schlage $r_1 = r - d(p, x) > 0$ vor. Wir müssen dann zeigen, dass für alle y mit $d(y, x) < r_1$ gilt $d(y, p) < r$.
  Das folgt aber aus der Dreiecksungleichung:

$$\underbrace{d(y, x)}_{<r_1} + \underbrace{d(x, p)}_{=r-r_1} \geq d(y, p) \quad !$$

Offene Teilmengen von $\mathbb{R}$ kann man explizit beschreiben.

Satz 4. Auf $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik ist jede offene Menge die disjukte Vereinigung von (eventuell, unendlich vielen) offenen Intervalen.

Ein offenes Interval ist die Menge $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$. Wir erlauben auch $a = -\infty$ und $b = \infty$.

Beweis. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ offen.
Wir definieren auf A die Äquivalenzrelation: die Punkten $x, y \in A$ sind äquivalent, falls das Interval $(\min(x, y), \max(x, y)) \subseteq A$. Diese Relation ist offensichtlich

- reflexiv, weil für $x = y$ das Interval leer ist und in jeder Menge liegt,
- symmetrisch, weil der Austausch $x \longleftrightarrow y$ nichts macht,
- transitiv: es seien $x \sim y$ und $y \sim z$. Man betrachtet alle mögliche relative Positionen von Punkten, es gibt 6 davon, und sieht sofort, dass es immer $x \sim z$.

Die Menge A ist daher die disjunkte Vereinigung der Äquivalenzklassen.

Es genügt deswegen zu zeigen, dass die Äquivalenzklasse von einen beliebigen Punkt $x \in A$ ein offenes Interval ist.

Wir müssen zeigen, dass die Äquivalenzklasse von einen Punkt $x \in A$ ein offenes Interval ist.
Die Punkten $x, y \in A$ sind äquivalent, falls das Interval $(\min(x, y), \max(x, y)) \subseteq A$

Sei $[x]$ Äquivalenzklasse von x; wir betrachten $a = \inf[x]$ und $b = \sup[x]$. Wir zeigen jetzt, dass $[x] = (a, b)$ ist. Wir mussen zeigen, dass $(a, b) \supseteq [x]$, und dass $(a, b) \subseteq [x]$.

Wir bemerken, dass die Menge $[x]$ offen ist: in der Tat, es sei $y \in [x]$. Da A offen ist, gibt es ein Ball $B_r(y) \subseteq A$. Alle Elemente des Balls sind zu y äquivalent; dann sind sie auch zu x äquivalent wegen Transitivität und deswegen $B_r(y) \subseteq [x]$. Also, $[x]$ ist offen.

Deswegen erhält das Interval (a, b) alle Punkte von $[x]$: für jedes $y \in [x]$ gilt $a \leq y \leq b$ nach Konstruktion von a und b. Die Gleichheit $a = y$ oder $b = y$ ist nicht möglich, weil $[x]$ offen ist. Also, $(a, b) \supseteq [x]$.

Alle Punkte von (a, b) liegen in $[x]$. In der Tat, sei $y \in (a, b)$. Dann ist $a = \inf[x] < y < \sup[x] = b$. Nach Definition des Infimums und Supremums (die beide sind exakte Schränke) existiert Element $a', b' \in [x]$ mit $a < a' < y$ und $y < b' < b$. Da $a' \sim b'$, liegt das Interval (a', b') in A, schliesslich liegt auch der Punkt y in A. Satz 4 ist damit 'fast' bewiesen, wir müssen noch zeigen, dass die Vereinugung von Intervalle offen ist. Wir zeigen aber eine viel allgemeinere Aussage:

Satz 5. Vereinigung von Elementen von jeder Familie von offenen Mengen ist offen.

Bemerkung. Das Wort 'Familie' ist ein Synonym für 'Menge', ich versuche mathematisch korrektere Formulierung 'Menge von offenen Mengen'.

Bemerkung. Die Familie kann auch unendlich sein. Z.B. Im Beweis vom Satz 4 haben wir gezeigt, dass jede Äquivalenzklasse eines Elementes von a ein offenes Intervall ist. Wir wissen nicht, ob die Anzahl von Äquivalenzklassen endlich ist; eigentlich konstruiert man sofort Beispiele sodass die Anzahl unendlich ist. Das stört uns aber nicht, weil die Vereinigung von Elementen von <u>jeder</u> Familie von offenen Mengen offen ist.

Satz 5. Vereinigung von Elementen von jeder Familie von offenen Mengen ist offen.

Beweis. Wir betrachten die Familie $U_i, \ i \in \mathcal{I}$ von offenen Mengen. Wir zeigen dass $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i$ offen ist. Sei $x_0 \in \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i$. Dann existiert i_0 mit $x_0 \in U_{i_0}$. Dann existiert $r > 0$ sodass $B_r(x_0) \subseteq U_{i_0}$. Dann liegt auch $B_r(x_0) \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i$. Satz 5 ist bewiesen. Deswegen ist auch Satz 4 bewiesen.

Eine direkte Anwendung des Satzes 5

Def. Die *r-Umgebung von A* ist
$$U_r(A) = \{x \in X | d(x, A) < r\}.$$

Folgerung. Für jedes A ist $U_r(A)$ offen.

Bemerkung. Selbstverständlich, kann man diese Aussage direkt zeigen. Ich möchte sie u.A. nutzen, um Mächtigkeit des Satzes 5 zu demonstrieren.

Aus der Definition folgt, dass $U_r(A) = \bigcup_{a \in A} B_r(a)$. In der Tat,

$x \in U_r(A) \iff \inf\{d(a,x) \mid a \in A\} < r \iff$
$\exists a \in A \text{ so dass } d(a,x) < r \iff \exists a \in A \mid x \in B_r(a) \iff$
$x \in \bigcup_{a \in A} B_r(a)$.

Die Menge $\bigcup_{a \in A} B_r(a)$ ist aber eine Vereinigung von offenen Mengen und ist deswegen offen. Damit ist Folgerung bewiesen.

Satz 6. Durchschnitt von endlich viel offenen Mengen ist offen.

Bemerkung. Man konstruiert sofort die Beispiele von unendlich viel offenen Mengen, sodass Durchschnitt nicht offen ist. Z.B. in $\mathbb{R}^2$ nimmt man $U_i = B_{\frac{1}{k}}(\vec{0})$, $k \in \mathbb{N}$.

Beweis. Es genügend für zwei Mengen zu zeigen; weil die Erweiterung auf eine beliebigen endliche Familie von Mengen einfach ist. Z.B. um zu zeigen, dass $U \cap V \cap W$ offen ist, benutzen wir, dass $U \cap V \cap W = \underbrace{(U \cap V)}_{\text{offen}} \cap W$.

Es seien also $U, V \subseteq X$ offen. Sei $x \in U \cap V$. Dann ist $x \in U$ und $x \in V$. Da U und V offen sind, existiert $r_U > 0$ und $r_V > 0$ mit $B_{r_U}(x) \subseteq U$ und $B_{r_V}(x) \subseteq V$. Sei $r = \min(r_U, r_V)$; wie haben $r > 0$. Dann ist $B_r(x) \subseteq B_{r_U}(x) \subseteq U$ und $B_r(x) \subseteq B_{r_V}(x) \subseteq V$, schließlich $B_r(x) \subseteq U \cap V$. Satz 6 ist bewiesen.