Weitere Beispiele: Metriken auf der Raum von Folgen und von Funktionen

- $d_1,\ d_2\ $ und d_∞-Abstand auf dem Raum von Folgen.
- Raum von C^0-Funkionen $d_1,\ d_2\ $ und d_∞-Abstand auf C^0.

Metriken auf der Raum von Folgen

Def. Unter Folge von reellen oder komplexen Zahlen verstehen wir die Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bzw. $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Die Standard-Bezeichnung für das Bild von $k \in \mathbb{N}$ ist dann a_k.

Metriken auf der Raum von Folgen

Def. Unter Folge von reellen oder komplexen Zahlen verstehen wir die Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bzw. $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Die Standard-Bezeichnung für das Bild von $k \in \mathbb{N}$ ist dann a_k.

Man kann informell die Folge als $\mathbb{R}^\infty$ Vorstellen. Für $\mathbb{R}^n$ haben wir oben verschiedene Abstandfunktionen eingeführt. Wir wiederholen sie:

$$d_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

$$d_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

$$d_\infty\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \max_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

Metriken auf der Raum von Folgen

Def. Unter Folge von reellen oder komplexen Zahlen verstehen wir die Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bzw. $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Die Standard-Bezeichnung für das Bild von $k \in \mathbb{N}$ ist dann a_k.

Man kann informell die Folge als $\mathbb{R}^\infty$ Vorstellen. Für $\mathbb{R}^n$ haben wir oben verschiedene Abstandfunktionen eingeführt. Wir wiederholen sie:

$$d_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

$$d_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

$$d_\infty\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \max_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

Alle diese Abstände kann man ‘mit Vorbehalt’ auf der Menge von Folgen verallgemeinern. Der Vorbehalt ist wie folgt: man muss nicht alle Folgen, sondern eine Teilmenge der Raum von Folgen betrachten

d_1 Abstand

Bezeichnung. ℓ_1 sein die Menge von Folgen a_k sodass $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$ (die Summe von Elementen der Folge konvergiert absolut).

d_1 Abstand

Bezeichnung. ℓ_1 sein die Menge von Folgen a_k sodass $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$ (die Summe von Elementen der Folge konvergiert absolut).

Man sieht sofort, dass die Menge von solchen Folgen ein Unterraum im Vektorraum von Folgen bildet: wenn zwei Folgen in ℓ_1 liegen, dann liegt auch die Summe in ℓ_1. Wenn wir eine Folge aus ℓ_1 mit einer Konstante multiplizieren, dann liegt auch das Ergebnis in ℓ_1.

d_1 Abstand

Bezeichnung. ℓ_1 sein die Menge von Folgen a_k sodass $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$ (die Summe von Elementen der Folge konvergiert absolut).

Man sieht sofort, dass die Menge von solchen Folgen ein Unterraum im Vektorraum von Folgen bildet: wenn zwei Folgen in ℓ_1 liegen, dann liegt auch die Summe in ℓ_1. Wenn wir eine Folge aus ℓ_1 mit einer Konstante multiplizieren, dann liegt auch das Ergebnis in ℓ_1.

Man definiert die Metrik d_1 auf dem Raum ℓ_1 wie folgt

$$d_1(a_k, b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k - b_k|.$$

Man beweist relativ einfach, dass alle Axiomen aus der Definition von metrischem Raum erfüllt sind.

d_∞ Abstand

$$\boxed{d_\infty\left(\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\right)=\max_{i=1}^{n}|x_i-y_i|.}$$

d_∞ Abstand

$$
d_\infty\left(\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\right)=\max_{i=1}^{n}|x_i-y_i|.
$$

Bezeichnung. ℓ_∞ sein die Menge von beschränken Folgen a_k $(a_1, \dots, a_k, \dots)$.

d_∞ Abstand

$$d_\infty\left(\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\right)=\max_{i=1}^{n}|x_i-y_i|.$$

Bezeichnung. ℓ_∞ sein die Menge von beschränken Folgen a_k $(a_1,\ldots,a_k,\ldots)$.

Die Menge von solchen Folgen bildet wieder ein Unterraum im Vektorraum von Folgen:

d_∞ Abstand

$$d_\infty\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \max_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

Bezeichnung. ℓ_∞ sein die Menge von beschränken Folgen a_k $(a_1, \ldots, a_k, \ldots)$.

Die Menge von solchen Folgen bildet wieder ein Unterraum im Vektorraum von Folgen:

Man definiert die Metrik d_∞ auf dem Raum ℓ_1 wie folgt

$$d_\infty(a_k, b_k) = \sup\{|a_k - b_k|\}_{k \in \mathbb{N}}.$$

Man beweist relativ einfach, dass alle Axiomen aus der Definition von metrischem Raum erfüllt sind.

d_2 Abstand

$$\boxed{d_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}.}$$

d_2 Abstand

$$d_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}.$$

Bezeichnung. ℓ_2 sein die Menge von Folgen a_k sodass $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$ ist.

Die Menge von solchen Folgen bildet wieder ein Unterraum im Vektorraum von Folgen:

d_2 Abstand

$$d_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}.$$

Bezeichnung. ℓ_2 sein die Menge von Folgen a_k sodass $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$ ist.

Die Menge von solchen Folgen bildet wieder ein Unterraum im Vektorraum von Folgen:

Man definiert die Metrik d_2 auf dem Raum ℓ_2 wie folgt

$$d_2(a_k, b_k) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k - b_k|^2}.$$

Man beweist relativ einfach, dass alle Axiomen aus der Definition von metrischem Raum erfüllt sind.

Die oben eingeführte Metriken auf Unterräumen von Folgen sind wichtig für Mathematik und für den Kurs. Nachteil ist, dass sie nicht für alle Folgen definiert sind. Unten geben wir ein Beispiel von einer Metrik auf dem Raum von allen folgen. Jedoch ist das Beispiel nicht besonders wichtig für die Mathematik.

Die oben eingeführte Metriken auf Unterräumen von Folgen sind wichtig für Mathematik und für den Kurs. Nachteil ist, dass sie nicht für alle Folgen definiert sind. Unten geben wir ein Beispiel von einer Metrik auf dem Raum von allen folgen. Jedoch ist das Beispiel nicht besonders wichtig für die Mathematik.

Bsp. Sei C_k eine reelle positive Folge, sodass $\sum_{k=1}^{\infty} C_k < \infty$. Z.B. Sei $C_k = 2^{-k}$.

Dann definiere

$$d(a,b) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{|a_k - b_k|}{1 + |a_k - b_k|}.$$

Alle Axiomen sind erfüllt.

Die oben eingeführte Metriken auf Unterräumen von Folgen sind wichtig für Mathematik und für den Kurs. Nachteil ist, dass sie nicht für alle Folgen definiert sind. Unten geben wir ein Beispiel von einer Metrik auf dem Raum von allen folgen. Jedoch ist das Beispiel nicht besonders wichtig für die Mathematik.

Bsp. Sei C_k eine reelle positive Folge, sodass $\sum_{k=1}^{\infty} C_k < \infty$. Z.B. Sei $C_k = 2^{-k}$.

Dann definiere

$$d(a, b) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{|a_k - b_k|}{1 + |a_k - b_k|}.$$

Alle Axiomen sind erfüllt. Diese Abstandfunktion ist für alle Folgen definiert (für vorherige Abstandfunktionen ist das Hauptproblem, dass für einigen Folgen Abstand $= \infty$ ist, was nicht mit der Definition kompatibel ist; hier ist es nicht der Fall.)

Metriken in den Funktionenräumen

Die Beispiele bis jetzt waren einfach, geometrisch und teilweise bekannt.

Metriken in den Funktionenräumen

Die Beispiele bis jetzt waren einfach, geometrisch und teilweise bekannt. Mehrere Anwendung in der Mathematik benutzen aber komplizierten metrischen Räumen.

Metriken in den Funktionenräumen

Die Beispiele bis jetzt waren einfach, geometrisch und teilweise bekannt. Mehrere Anwendung in der Mathematik benutzen aber komplizierten metrischen Räumen. Wir werden diese Anwendungen relativ bald erleben, wenn wir teilweise bekannten für Sie Aussagen aus Analysis und Theorie von Differentialgleichungen betrachten werden.

Metriken in den Funktionenräumen

Die Beispiele bis jetzt waren einfach, geometrisch und teilweise bekannt. Mehrere Anwendung in der Mathematik benutzen aber komplizierten metrischen Räumen. Wir werden diese Anwendungen relativ bald erleben, wenn wir teilweise bekannten für Sie Aussagen aus Analysis und Theorie von Differentialgleichungen betrachten werden. Später kommen ganz neue unbekannte Beispiele und neue Anwendungen.

Metriken in den Funktionenräumen

Die Beispiele bis jetzt waren einfach, geometrisch und teilweise bekannt. Mehrere Anwendung in der Mathematik benutzen aber komplizierten metrischen Räumen. Wir werden diese Anwendungen relativ bald erleben, wenn wir teilweise bekannten für Sie Aussagen aus Analysis und Theorie von Differentialgleichungen betrachten werden. Später kommen ganz neue unbekannte Beispiele und neue Anwendungen.

$C^0([a,b];\mathbb{R})$ wird die Standardbezeichung für den Raum von stetigen Funktionen auf dem geschlossenen Intervall $[a,b]$. Die Bezeichnung C^0 wird auch für die stetige Funktionen auf einem metrischem Raum benutzt; die Definition von stetigen Funktionen auf einem beliebigen metrischen Raum ist aus Analysis 2-3 bekannt und wird auch später wiederholt.

Metriken in den Funktionenräumen

Die Beispiele bis jetzt waren einfach, geometrisch und teilweise bekannt. Mehrere Anwendung in der Mathematik benutzen aber komplizierten metrischen Räumen. Wir werden diese Anwendungen relativ bald erleben, wenn wir teilweise bekannten für Sie Aussagen aus Analysis und Theorie von Differentialgleichungen betrachten werden. Später kommen ganz neue unbekannte Beispiele und neue Anwendungen.

$C^0([a,b];\mathbb{R})$ wird die Standardbezeichung für den Raum von stetigen Funktionen auf dem geschlossenen Intervall $[a,b]$. Die Bezeichnung C^0 wird auch für die stetige Funktionen auf einem metrischem Raum benutzt; die Definition von stetigen Funktionen auf einem beliebigen metrischen Raum ist aus Analysis 2-3 bekannt und wird auch später wiederholt.
$C^k([a,b];\mathbb{R})$ wird die Standardbezeichung für den Raum von Funktionen auf dem geschlossenen Intervall $[a,b]$, die k-mal differenzierbar sind und so dass die $k$te Ableitung stetig ist. Bei beliebigen metrischen Räumen kann man den Begriff "Ableiten" nicht definieren. Wir werden in der Kurs spezielle zusätzliche Bedienungen auf den metrischen Räumen sehen, die erlauben, irgendwelche Analogien von Ableitung definieren, C^k mit $k > 1$ wird aber nie erreicht.

d_1 Abstand auf $C^0([a, b]; \mathbb{R})$

Def. Für $f, g \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$ definieren wir
$d_1(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|dt$.

d_1 Abstand auf $C^0([a,b];\mathbb{R})$

Def. Für $f, g \in C^0([a,b];\mathbb{R})$ definieren wir
$d_1(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt$.
Axiomen aus der Definition von metrischen Raum sind einfach zu überprüfen.

d_1 Abstand auf $C^0([a,b];\mathbb{R})$

Def. Für $f, g \in C^0([a,b];\mathbb{R})$ definieren wir
$d_1(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|dt$.
Axiomen aus der Definition von metrischen Raum sind einfach zu überprüfen.
Bitte vergleichen Sie d_1 Metrik auf ℓ_1 mit der d_1 Metrik auf $C^0([a,b];\mathbb{R})$.

Auf dem Raum ℓ_1 definiert man
$$d_1(a_k, b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k - b_k|.$$

d_1 Abstand auf $C^0([a,b];\mathbb{R})$

Def. Für $f, g \in C^0([a,b];\mathbb{R})$ definieren wir
$d_1(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt$.
Axiomen aus der Definition von metrischen Raum sind einfach zu überprüfen.
Bitte vergleichen Sie d_1 Metrik auf ℓ_1 mit der d_1 Metrik auf $C^0([a,b];\mathbb{R})$.

Auf dem Raum ℓ_1 definiert man
$$d_1(a_k, b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k - b_k|.$$

Bemerkung. In Unterschied zu d_1 auf ℓ_1, kann man die Metrik auf den ganzen Raum definieren, weil $\int_a^b |f(t) - g(t)| dt$ immer $< \infty$ ist.

d_1 Abstand auf $C^0([a,b];\mathbb{R})$

Def. Für $f, g \in C^0([a,b];\mathbb{R})$ definieren wir $d_1(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt$.
Axiomen aus der Definition von metrischen Raum sind einfach zu überprüfen.
Bitte vergleichen Sie d_1 Metrik auf ℓ_1 mit der d_1 Metrik auf $C^0([a,b];\mathbb{R})$.

Auf dem Raum ℓ_1 definiert man

$$d_1(a_k, b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k - b_k|.$$

Bemerkung. In Unterschied zu d_1 auf ℓ_1, kann man die Metrik auf den ganzen Raum definieren, weil $\int_a^b |f(t) - g(t)| dt$ immer $< \infty$ ist.

Bemerkung. Man kann auch den Abstand d_1 auf der größere Menge L_1 von Funktionen auf dem Intervall definieren; diese Definition kommt eventuell in der Übungsaufgaben, wird aber im Kurs nicht besonders wichtig.

d_2 und d_∞ Metriken auf $C^0([a,b];\mathbb{R})$.

$$d_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

$$d_\infty\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \max_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

Def. Für $f, g \in C^0([a,b];\mathbb{R})$ definieren wir

$$d_2(f,g) = \sqrt{\int_a^b |f(t) - g(t)|^2 dt}.$$

d_2 und d_∞ Metriken auf $C^0([a,b];\mathbb{R})$.

$$d_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}.$$

$$d_\infty\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \max_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

Def. Für $f, g \in C^0([a,b];\mathbb{R})$ definieren wir
$d_2(f,g) = \sqrt{\int_a^b |f(t) - g(t)|^2 dt}$.

Def. Für $f, g \in C^0([a,b];\mathbb{R})$ definieren wir
$d_\infty(f,g) = \max_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$.

Die Bemerkungen auf der vorherigen Seite sind auch im Fall von d_2 und d_∞ richtig.