Topologie auf einem metrischem Raum: Plan

- Topologie auf einem metrischem Raum
- “Vergleichen´´ von Topologien
- Lipschitz-äquivalenten metrischen Räume

Topologie auf einem metrischem Raum (X, d)

Auf dem metrischen Raum (X, d) haben wir den Begriff 'offene Mengen' definiert (richtiger wäre den Begriff 'offene Teilmengen' zu benutzen). Einige Teilmengen sind offen, einige sind nicht.

A heißt offen, wenn $\forall a \in A \; \exists r > 0 \mid B_r(a) \subseteq A$.

Bezeichnung. Die Mengen von offenen Mengen von X wird Ω bezeichnet (bzw., wenn mehrere Metriken im Spiel sind, Ω_d, Ω_1, Ω_2) und wird Topologie auf X heißen.

Also Topologie ist als Objekt eine Teilmenge $\Omega \subseteq 2^X$. Hier ist 2^X die Standardbezeichnung für die Menge aller Teilmengen von X.

Beispiele

A heißt offen, wenn $\forall a \in A \; \exists r > 0 \mid B_r(a) \subseteq A$.

Bsp. Die Topologie Ω auf $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik d haben wir bereits konstruiert: die Elemente von Ω bestehen aus der beliebige Vereinigung von offenen Intervallen.

Bsp. Betrachten wir jetzt die diskrete Metrik auf einer beliebigen Menge X:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq y \\ 0 & \text{für } x = y. \end{cases}$$

Dann ist jede Teilmenge offen, und $\Omega = 2^X$. Solche Topologie heißt diskrete Topologie.

Sätze 5 und 6 sind Aussagen über Eigenschaften von Ω

Satz 5. Vereinigung von Elementen von jeder Familie von offenen Mengen ist offen.
Satz 6. Durchschnitt von endlich viel offenen Mengen ist offen.

Außerdem gilt es trivialerweise:

- $\varnothing \in \Omega$ (weil jeder Punkt von $\varnothing$ ....)
- und $X \in \Omega$ (weil alle $B_r(x) \subset X$)

Sie haben bestimmt das Wort 'Topologie' gehört. Topologie ist ein Gebiet von Mathematik, der sich mit der Theorie von topologischen Räumen beschäftigt. Struktur des topologischen Raums, oder, kurzer, Topologie, auf einer nichtleere Menge X ist eine Teimenge Ω von 2^X (elementen von Ω heißen dann offene Mengen), sodass die alle auf der vorherigen Seite aufgelistete Eigenschaften (heißen auch Axiomen) erfüllt sind:

1. $X \in \Omega$, $\varnothing \in \Omega$.
2. Vereinigung von Elementen von jeder Familie von offenen Mengen ist offen.
3. Durchschnitt von endlich viel offenen Mengen ist offen.

Wir werden ausschließlich Topologien betrachten, die von Metriken kommen. Nicht alle Topologien sind metrisch. Z.B. die Topologie $\Omega = \{\varnothing, X\}$ ist nicht metrisch (falls X aus mehr als einen Punkt besteht).

Es ist jedoch auch in der metrischen Theorie sinnvoll, die Aussagen oder Beweisen, die nur topologische Eigenschaften/Begriffen benutzen, mit Hilfe von topologischen Axiomen beweisen; weil wie wir es gleich sehen, einige Metriken gleichen Topologien haben.

Vergleichen von Topologien

Def. Seien d_1, d_2 zwei Metriken auf X und Ω_1, Ω_2 die entsprechenden Topologien. Wir sagen, dass Ω_1 schwächer als Ω_2 ist, wenn $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$. In Worten, jede Menge, die bzgl. d_1 offen ist, ist auch bezgl. d_2 offen.

Außerdem sagen wir, dass die Topologien Ω_1 und Ω_2 äquivalent sind, falls Ω_1 schwächer als Ω_2 ist und gleichzeitig Ω_2 schwächer als Ω_1; also falls $\Omega_1 = \Omega_2$. In diesem Fall ist eine Teilmenge für d_1 g.d.w. sie ist offen für d_2.

Bsp. Sei d eine beliebige Metrik auf X und d_d die diskrete Metrik, $d_d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq y \\ 0 & \text{für } x = y. \end{cases}$ Dann ist Ω schwächer als Ω_d (weil $\Omega_d = 2^X$.)

Bemerkung. Die Relation 'schwächer' ist eine Teilordnung auf der Menge von Metriken auf X.

Wann sind zwei (metrischen) Topologien äquivalent

Satz 7. Seien d_1, d_2 zwei Metriken auf X und Ω_1, Ω_2 die entschprechende Topologien. Dann gilt:
Die erste Topologie ist schwächer als die zweite $\underbrace{\text{g.d.w.}}_{\Longleftrightarrow}$ jeder offenen Ball in sinne von d_1 enthält einen offenen Ball in d_2 mit dem gleichen Zentrum.

(Wenn die Bälle 'klein' sind, dann ist die Topologie 'stark')

Beweis vom Satz 7

Satz 7. $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \iff$ jeder offenen Ball in sinne von d_1 enthält einen offenen Ball in d_2 mit dem gleichen Zentrum.

Beweis in Richtung $\Longrightarrow$:
Wir nehmen an, dass $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$. Dann ist jeder offener d_1-Ball offen in d_2, $B_r^{d_1}(x) \in \Omega_2$. Deswegen existiert für jeden Punkt von $B_r^{d_1}(x)$ einen d_2-Ball um den Punkt, welcher in $B_r^{d_1}(x)$. Da der Punkt $x \in B_r^{d_1}(x)$, sind wir mit dem Beweis in diese Richtung fertig.

Beweis in Richtung $\Longleftarrow$:

Satz 7. $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \Longleftrightarrow$ jeder offenen Ball in sinne von d_1 enthält einen offenen Ball in d_2 mit dem gleichen Zentrum.

Angenommen, jeder offenen Ball in d_1 enthält einen offenen Ball in d_2 mit dem gleichen Zentrum. Wir müssen zeigen, dass jede Teilmenge $U \in \Omega_1$ ist auch offen in d_2; wir zeigen es.

Sei $y \in U$, dann $\exists\ r > 0$ sodas $B_r^{d_1}(y) \subseteq U$. Dann existiert nach unserer Annahme ein $r_0 > 0$ sodass $B_{r_0}^{d_2}(y) \subseteq B_r^{d_1}(y)$. Schließlich ist $B_{r_0}^{d_2}(y) \subseteq U$ und U ist offen in d_2. Satz 7 ist bewiesen.

Folgerungen aus Satz 7

Satz 7. $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \iff$ jeder offenen Ball in sinne von d_1 enthält einen offenen Ball in d_2 mit dem gleichen Zentrum.

Folgerung. Ist $d_1 \leq d_2$, dann ist $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$.

(Wenn die Abstände in d_1 kleiner sind, dann ist die Topologie schwächer)

Beweis. In diesem Fall ist für jeden Punkt $x \in X$ und jeden Radius $r > 0$ $B_r^{d_1}(x) \supseteq B_r^{d_2}(x)$, und wir sehen dass der offenen r-Ball in sinne von d_1 den offenen r-Ball in d_2 mit dem gleichen Zentrum enthält, $\square$

Stärkere Version der Folgerung. Ist $d_1 \leq C \cdot d_2$ für eine positive Konstante $C \in \mathbb{R}$, dann ist $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$.

(Weil für jedem metrichen Raum (X, d) der r-Ball in d fällt zusammen mit dem $\frac{1}{C}r$-Ball in der Metrik $C \cdot d$.)

(Eigentlich, die Topologien der Metriken d_2 und $C \cdot d_2$ sind äquivalent. Das ist ein Spezialfall von der Aussage auf der nächsten Folie)

Lipschitz-Äquivalenz von Metriken (in Hausaufgaben bereits besprochen). Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832–1903)

Def. Seien d_1 und d_2 zwei Metriken auf X. Sie heißen Lipschitz-Äquivalent (oder bi-Lipschitz-Äquivalent), wenn es positive Konstanten c, C existieren, sodass

$$c \cdot d_2 \leq d_1 \leq C \cdot d_2.$$

Das ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation.

Folgerung. Sind d_1 und d_2 Lipschitz-Äquivalent, dann sind auch die Topologien der Metriken äquivalent.

Die Topologien der Metriken $d_1, d = d_2, d_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent

$$d_1\left(\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

$$d_2\left(\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

$$d_\infty\left(\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\right) = \max_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

Es ist einfach zu sehen, dass $d_\infty \leq d_2 \leq d_1 \leq n \cdot d_\infty$. Daraus folgt, dass alle diese Metriken Lipschitz-Äquivalent, und die Topologien der Metriken $d_1, d = d_2, d_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.

Wird (würde?) in Hausaufgaben gezeigt. Die Metriken d_1, d_2, d_∞ auf $\ell_1 \cap \ell_2 \cap \ell_\infty$ sind nicht Lipschitz-Äquivalent. Auch die Metriken d_1, d_2, d_∞ auf $C^0([a, b]; \mathbb{R})$ sind nicht Lipschitz-Äquivalent.