Thema: Konvergenz von Folgen von Punkten in metrischen Räumen: Plan

- Folgen von Punkten in metrischen Räumen
- Metrische Definiton von Konvergenz

Folgen von Punkten in metrischen Räumen

Def. Sei (X, d) ein metrische Raum.
Eine Folge ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to X$.

Das Bild von $n \in \mathbb{N}$ wird mit a_n bezeichnet. Ich werde auch die ganze Folge mit a_k bezeichnen; mit der Zweideutigkeit dieser Bezeichnung muss man dann leben.

Bsp. Die Punkten in $\ell_1, \ell_2, \ell_\infty$ sind Folgen im metrischen Raum $\mathbb{R}$.

Konvergenz von Folgen

Def. Sei (X, d) ein metrische Raum, a_k eine Folge in X und $a \in X$. Wir sagen, dass die Folge a_k gegen a konvergiert (Bezeichnung: $a_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$), falls die reelle Folge $d(a_k, a)$ gegen 0 konvergiert, in der Sinne von Analysis 1.

D.h., $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ sodass $\forall\ n > N\ \underbrace{|d(a_n, a) - 0|}_{=d(a_n,a)} < \varepsilon.$

Bsp. Die Konvergenz von Punkten aus $\mathbb{R}^n$ im Sinne der Definition oben fällt zusammen mit der in Analysis 2 eingeführten Konvergenz. Auf den nächsten Folie werde ich das in Dimension $n = 2$ zeigen, um komplizierte Bezeichnungen mit mehreren Indizes zu vermeiden.

Konvergenz im Sinne der Analysis 2 ist Konvergenz im Sinne der Standardmetrik d auf $\mathbb{R}^n$

Analysis-Definition: Eine Folge $p_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$ heißt Analysis-konvergent gegen $p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, falls Sie komponentenweise konvergiert:

$$x_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x \text{ und } y_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} y.$$

Wir zeigen zuerst, dass aus Konvergenz in d Analysis-Konvergenz folgt.

Die Folge p_k konvergiere in d gegen p. Dann gilt:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ sodass } \forall \ n > N \ \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon.$

Wir bemerken, dass $|x_n - x| \leq \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}$.
Also, bekommen wir: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ sodass } \forall \ n > N \ |x_n - x| < \varepsilon,$

und das ist die Definition der Konvergenz der Folge x_k gegen x!
(für die zweiten Komponente y ist alles analog.)

Beweis in der anderen Richtung

Die Folge p_k sei Analysis-konvergent gegen p. Dann gilt (ε ist beliebig, deswegen darf ich es mit $\varepsilon/2$ ersetzen:)
$\forall \varepsilon/2 > 0 \ \exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ sodass } \forall n > N_1 \ \ |x_n - x| < \varepsilon/2.$
$\forall \varepsilon/2 > 0 \ \exists N_2 \in \mathbb{N} \text{ sodass } \forall n > N_2 \ \ |y_n - y| < \varepsilon/2.$

Wir setzen $N = \max(N_1, N_2)$, dann gilt:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ sodass } \forall n > N \ \ |x_n - x| + |y_n - y| < \varepsilon.$

Auf der nächsten Folie erkläre ich, dass $\sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} \leq |x_n - x| + |y_n - y|$. Wenn wir es mit der letzten Quantoren-Aussage kombinieren, und berücksichtigen, dass $d(p_n, p) = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}$ bekommen wir:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ sodass } \forall n > N \ \ d(p_n, p) < \varepsilon,$
was die Definition von Konvergenz von p_n gegen p bzgl. d ist.

Bemerkung. Wir werden die gleiche Aussage, dass in $\mathbb{R}^n$ Analysis-Konvergenz und d-Konvergenz äquivalent sind, in dieser Woche noch einmal beweisen, mit Hilfe von Topologie.

Beweis dass $\sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} \leq |x_n - x| + |y_n - y|$:
beide Seiten sind positiv; deswegen ist die Aussage äquivalent zu

$$(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2 \leq (|x_n - x| + |y_n - y|)^2$$

$$= (x_n - x)^2 + \underbrace{2 \cdot |x_n - x| \cdot |y_n - y|}_{\geq 0} + (y_n - y)^2$$

$\square$

In ℓ_1 und ℓ_2 ist die komponentenweise Konvergenz nicht äquivalent zu d_1- bzw. d_2-Konvergenz

Bsp. Wir betrachten die folgende Folge von Elementen von ℓ_1:
$f_1 = (1, 0, ..., 0, ...)$
$f_2 = (0, 1, 0, ..., 0, ...)$
$\vdots$
$f_k = (0, 0, ..., 1_k, 0, ...)$ u.s.w.
Komponentenweise konvergiert sie gegen die Null-Folge: z.B. ist die fünfte Komponente der Folge $(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0....)$.

Aber der Abstand zur Null-Folge ist immer 1, in d_1 und in d_2.

Bsp. Aus d_∞ Konvergenz folgt die komponentenweise Konvergenz.