Thema: Konvergenz von Folgen ist ein topologisches Begriff: Plan

- Topologische Definition von Konvergenz
- Äquivalenz von metrischen und topologischen Definitionen

Konvergenz von Folgen kann man mit Hilfe von Topologie definieren

Def. Sei (X, d) ein metrische Raum, $x \in X$. Eine beliebige offene Menge, welche x enthält, heißt Umgebung von x. Die Standardbezeichnung ist $U(x)$. Z.B. ist für jedes $r > 0$ der offene Ball $B_r(x)$ eine Umgebung von x.

Satz 8a. Sei (X, d) ein metrische Raum und x_k eine Folge (von Punkten des Raumes). Dann gilt: Die Folge konvergiert gegen $x \in X$ g.d.w. für jede Umgebung von x ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für jedes $n \geq N$ der Punkt x_n in dieser Umgebung liegt.

Bemerkung. Wir sehen, dass wir für die Definition von Umgebung und auch für den Begriff "Konvergenz" nur Topologie brauchen.

Beweis vom Satz 8a

$$\boxed{\forall\ U(x)\ \exists\ N \in \mathbb{N} \text{ sodass } \forall\ n \geq N\ x_n \in U(x)}$$

Beweis in Richtung $\Longleftarrow$: Die Bedingung oben, im Kasten, sei erfüllt; wir müssen zeigen, dass x_n gegen x konvergiert, also dass $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ sodass } \forall\ n > N\ \ \underbrace{|d(x_n, x) - 0|}_{=d(x_n,x)} < \varepsilon$.

Für $\varepsilon > 0$ nehmen wir $U(x) = B_\varepsilon(x)$. Wir haben früher gezeigt, dass $B_\varepsilon(x)$ offen ist, und den Punkt x enthält, also ist $B_\varepsilon(x)$ eine Umgebung von x.

Nach Voraussetzungen liegen alle Elemente der Folge, ab einem Element Nummer N, in $B_\varepsilon(x)$; deswegen gilt:

$$\forall\ n > N\ \ \underbrace{|d(x_n, x) - 0|}_{=d(x_n,x)} < \varepsilon$$

$\square$

Beweis in Richtung $\Longrightarrow$:

Satz 8a. Sei (X, d) ein metrische Raum und x_k eine Folge (von Punkten des Raumes). Dann gilt: die Folge konvergiert gegen $x \in X$ g.d.w. für jede Umgebung von x existiert ein $N \in \mathbb{N}$ sodass für jedes $n \geq N$ liegt der Punkt x_n in dieser Umgebung.

Sei $U(x)$ eine Umgebung von x. Dann existiert nach Definition von offenen Mengen ein $r > 0$ sodass $B_r(x) \subseteq U(x)$. Nach Definition von Konvergenz existiert dann N sodass $\forall\ n > N \quad x_n \in B_r(x)$. Dann liegen alle Elemente x_n für $n > N$ auch in $U(x)$. $\square$

Folgerung. In $\mathbb{R}^n$ (mit d_2-Abstand) konvergiert eine Folge $a_k = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix}$ gegen $a = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, g.d.w. sie komponentenweise (Analysis-Konvergenz) konvergiert:

$$x_1(k) \overset{k\to\infty}{\to} x_1, \; \dots \;, x_n(k) \overset{k\to\infty}{\to} x_n.$$

Beweis in Richtung $\Longrightarrow$: Alle drei betrachteten Topologien auf $\mathbb{R}^n$, Ω_1 konstruiert durch die Metrik d_1, Ω_2 und Ω_∞, sind äquivalent. Also ist d_2-Konvergenz äquivalent zu d_1 und zu d_∞-Konvergenz.

Wenn die Folge a_k in der Metrik d_∞ konvergiert, konvergiert $\max_{i=1,..,n} |x_i(k) - x_i|$ gegen 0 und deswegen konvergiert jede Komponente $x_i(k)$ gegen x_i.

Beweis in Richtung $\Longleftarrow$: Wenn die Folge komponentenweise konvergiert, konvergiert für jedes i die Folge $|x_i(k) - x_i|$ gegen 0. Dann konvergiert die Summe $\sum_{i=1}^n |x_i(k) - x_i|$ auch gegen 0. Aber $\sum_{i=1}^n |x_i(k) - x_i|$ ist genau $d_1(a_k, a)$. $\square$

Def. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$.
A heißt abgeschlossen, falls für jede Folge a_k von Elementen aus A, welche in X konvergiert, ihr Grenzwert auch in A liegt.

Bsp. Abgeschlossene Bälle sind abgeschlossen.

Beweis. Wir betrachten den Ball $\bar{B}_r(x)$. Sei a_k eine Folge sodass alle Elemente in $\bar{B}_r(x)$ liegen; d.h. $\forall k \in \mathbb{N}\ d(a_k, x) \leq r$.
Wir nehmen an, dass $a_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$; unseres Ziel ist zu zeigen, dass $d(a, x) \leq r$.

Wir benutzen die Widerspruchsbeiweismethode: angenommen, $d(a, x) = r + \varepsilon$ für ein positives ε. Nach Definition von Konvergenz,

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ sodass } \forall\ n > N\ d(a_n, a) < \varepsilon.$$

Das gibt uns einen Widerspruch zur Dreiecksungleichung, denn

$$\underbrace{d(a, a_n)}_{<\varepsilon} + \underbrace{d(a_n, x)}_{\leq r} \geq \underbrace{d(a, x)}_{=r+\varepsilon}.$$

Den Begriff “abgeschlossen” kann man nur mit Hilfe von Topologie definieren

Satz 8b. Sei (X, d) ein metrische Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann gilt: A ist abgeschlossen g.d.w. wenn das Komplement A^c offen ist.

Wiederholung der Def. und Bezeichnung aus der elementaren Mengenlehre. Das Komplement einer Teilmenge $A \subseteq X$ in X ist die Menge von Elementen von X, welche nicht in A liegen. Die Bezeichnung ist A^c.

Beweis von Satz 8b

Satz 8b. *A ist abgeschlossen g.d.w. wenn das Komplement A^c offen ist.*

Beweis in Richtung $\Longrightarrow$: Sei A abgeschlossen. Wir machen einen Widerspruchbeweis. Wir nehmen also an, dass A^c nicht offen ist. Dann gibt es $x \in A^c$ sodass kein Ball um x vollständig in A^c liegt. Wir benutzen solche Bälle, um eine konvergente Folge von Elementen von A zu 'konstruieren', deren Grenzwert nicht in A liegt.

Wir nehmen eine Folge von Radien $r_k > 0$, welche gegen 0 konvergiert. Z.B. $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = \frac{1}{4}$, ... , $r_k = 2^{-k}$,... .

Nach Annahme ist $B_{r_k}(x) \cap A \neq \varnothing$; deswegen $\exists x_k \in A$ mit $x_k \in B_{r_k}(x)$. Die Folge a_k konvergiert gegen $x \notin A$, weil $d(a_k, x) < r_k$; also haben wir einen Widerspruch bekommenen und die Richtung $\Longrightarrow$ des Satzes 8b ist bewiesen.

Beweis in Richtung $\Longleftarrow$:

Satz 8b. A ist abgeschlossen g.d.w. wenn das Komplement A^c offen ist.

Sei jetzt A^c offen. Wir betrachten eine beliebige konvergente Folge a_k von Punkten von A; $a_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} a$. Wir müssen zeigen, dass $a \in A$ liegt.
Wir machen wieder einen Widerspruchbeweis: sei $a \in A^c$. Dann existiert ein $r > 0$ sodass $B_r(a) \subseteq A^c$. Dann ist für jedes k $d(a_k, a) \geq r$. Dann kann die Folge nicht gegen a konvergieren, also haben wir einen Widerspruch. Der Satz 8b ist damit bewiesen. $\square$

Morgansche Gesetze und Vereinigungen und Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen

Die Morgansche Gesetzte aus der Mengenlehre sind wie folgt:

$$\bigcup_{i \in \mathcal{I}} {M_i}^c = \left(\bigcap_{i \in \mathcal{I}} M_i \right)^c , \quad \bigcap_{i \in \mathcal{I}} {M_i}^c = \left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} M_i \right)^c .$$

Sie gelten für beliebigen Teilmengen $M_i \subseteq M$ und für alle (auch unendliche) Indexmengen $\mathcal{I}$. Der Beweis ist irgendwie trivial und folgt sofort aus der Definitionen von Vereinigung und Durchschnitt.

Wenn wir den Satz 8b mit Sätze 5 und 6 kombinieren, bekommen wir:

Folgerung. Der Durchschnitt von Elementen einer jeder Familie von abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen. Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.